WELTY

FUNDAMENTOS DE TRANSFERENCIA DE MOMENTO, CALOR Y MASA

Temas que trata la obra:

- Conceptos y definiciones
- Estática de fluidos
- Descripción de un fluido en movimiento
- Observación de la masa: enfoque de volumen de control
- Segunda ley de Newton del movimiento: enfoque de volumen de control
- Conservación de la energía: enfoque de volumen de control
- Esfuerzo cortante en el flujo laminar
- Análisis de un elemento diferencial de fluido en el flujo laminar
- Ecuaciones diferenciales de flujo de fluidos
- Flujo de fluidos no viscosos
- Análisis dimensional
- Flujo viscoso
- El efecto de turbulencia en la transferencia de momento
- Flujo en conductores cerrados
- Fundamentos de la transferencia de calor
- Ecuaciones diferenciales de la transferencia de calor
- Conducción en estado permanente
- Conducción en estado no permanente
- Transferencia convectiva de calor
- Correlaciones en la transferencia convectiva de calor
- Ebullición y condensación
- Equipo para la transferencia de calor
- Transferencia de calor por radiación
- Fundamentos de la transferencia de masa
- Ecuaciones diferenciales de la transferencia de masa
- Difusión molecular en estado permanente
- Difusión molecular en estado no permanente
- Transferencia convectiva de masa
- Transferencia de masa en una interfase
- Correlaciones de transferencia convectiva de masa
- Equipo de transferencia de masa

Fundamentos de transferencia de momento, calor y masa

JAMES R. WELTY
Profesor y Director del Departamento
de Ingeniería Mecánica
Universidad Estatal de Oregón

CHARLES E. WICKS
Profesor y Director del Departamento
de Ingeniería Química
Universidad Estatal de Oregón

ROBERT E. WILSON
Profesor de Ingeniería Mecánica
Universidad Estatal de Oregón

LIMUSA

PROLOGO

Los objetivos básicos de esta edición son los mismos que los de la primera. El proceso de transferencia sigue siendo el tema básico a tratar, para el cual este libro es el instrumento de estudio.

En esta edición hemos actualizado el material, introduciendo aplicaciones de la tecnología actual. También hemos modificado la presentación para incluir un estudio adicional y más detallado en aquellas áreas que parecen presentar mayor grado de dificultad para el estudiante. Creemos, y verdaderamente confiamos en que esta edición mantendrá los aciertos acerca de los que tantas personas han comentado.

Realmente el cambio más obvio en esta edición es la incorporación de unidades SI. Hemos introducido un tratamiento equilibrado de unidades SI y sistema inglés, tanto en los problemas que se presentan como ejemplo, como en los que aparecen al final de cada capítulo. También hemos modificado las tablas de propiedades físicas para incluir en ellas datos en SI correspondientes a sólidos y gases. No existe, a nuestro juicio, ninguna buena recopilación de las propiedades de los líquidos en unidades SI. Por esta razón, sigue siendo necesario que tanto el profesor como el estudiante efectúen las conversiones pertinentes para los líquidos, cuando las propiedades se requieran en unidades SI. En cada uno de los problemas de ejemplo se ha agregado el valor correspondiente entre paréntesis y seguido del resultado final, en el sistema alterno, ya sea que se haya trabajado en sistema inglés o SI. Estamos convencidos de que la buena comprensión así como la facilidad para resolver problemas en el área del proceso de transferencia, son indispensables para el ingeniero competente sin importar su campo fundamental dentro de la ingeniería. El curso para el cual se ha utilizado como texto durante los últimos seis años en la Universidad Estatal de Oregón, ha tenido cada vez mayor aceptación en

todos los campos de la ingeniería. Esperamos que el tratamiento unificado de los procesos de transferencia se popularice cada vez más también en otras instituciones.

La asistencia y los comentarios críticos de numerosos estudiantes en años pasados nos han sido de gran ayuda en la preparación de esta edición. En especial, queremos agradecer el apoyo que nos han brindado varios de nuestros colegas, quienes la han utilizado en sus cátedras. Esperamos haber incorporado todo aquello que contribuya a mejorar el texto.

Corvallis, Oregón

J. R. Welty

C. E. Wicks

R. E. Wilson

PROLOGO A LA PRIMERA EDICION EN INGLES

Tradicionalmente los programas de estudio de ingeniería incluían cursos acerca de la transferencia de momento en mecánica de fluidos, por lo general en los departamentos de Ingeniería Civil o Mecánica. Los programas de estudios de Ingeniería Química y Mecánica han abarcado cursos de transferencia de energía o calor y el tema de la transferencia de masa o difusión ha sido casi del dominio exclusivo de los ingenieros químicos. Cuando se les estudia en esta forma fragmentada, las semejanzas en las descripciones tanto cualitativas como cuantitativas entre ambos temas, a menudo o se ignoran o se piensa que son coincidencias.

En 1960, con la publicación de *Transport Phenomena*, de R. B. Bird, W. E. Stewart y E. N. Lightfoot, de la Universidad de Wisconsin, estos tres temas, previamente fragmentados, se unieron en un solo volumen con un enfoque unificado hacia el proceso de transferencia. Así, los estudiantes pueden aprender una sola disciplina en lugar de tres y utilizar las semejanzas en descripción y cálculo para reforzar su conocimiento de los procesos individuales de transferencia. Una razón adicional para la popularidad del enfoque unificado es el interés creciente en situaciones en las que aparecen implicadas en un solo proceso dos o a veces hasta tres clases de transferencia. Es invaluable una descripción fundamental y sistemática del proceso de transferencia, a este respecto.

La gradual evolución de los programas de estudio de ingeniería para incluir más áreas importantes de temas básicos ha llevado a muchas instituciones a ofrecer cursos de transferencia de momento, calor y masa. En estos casos, el proceso de transferencia se considera tan fundamental para los conocimientos básicos del estudiante de ingeniería como la mecánica, la termodinámica, la ciencia de los materiales y la electricidad y el magnetismo básicos. Fue en este contexto en el que evolucionó la presente obra. Desde 1963 este material ha sido desarrollado y utilizado, en parte, por grupos de

alumnos a nivel de segundo año de la Universidad Estatal de Oregón, en el curso titulado Procesos de Transferencia y Cambio. Este libro es el resultado de los apuntes de clase, que se han revisado y reescrito al menos una vez durante cada uno de los cinco años anteriores. Las opiniones y críticas de los estudiantes y profesores, han sido de gran ayuda para los autores.

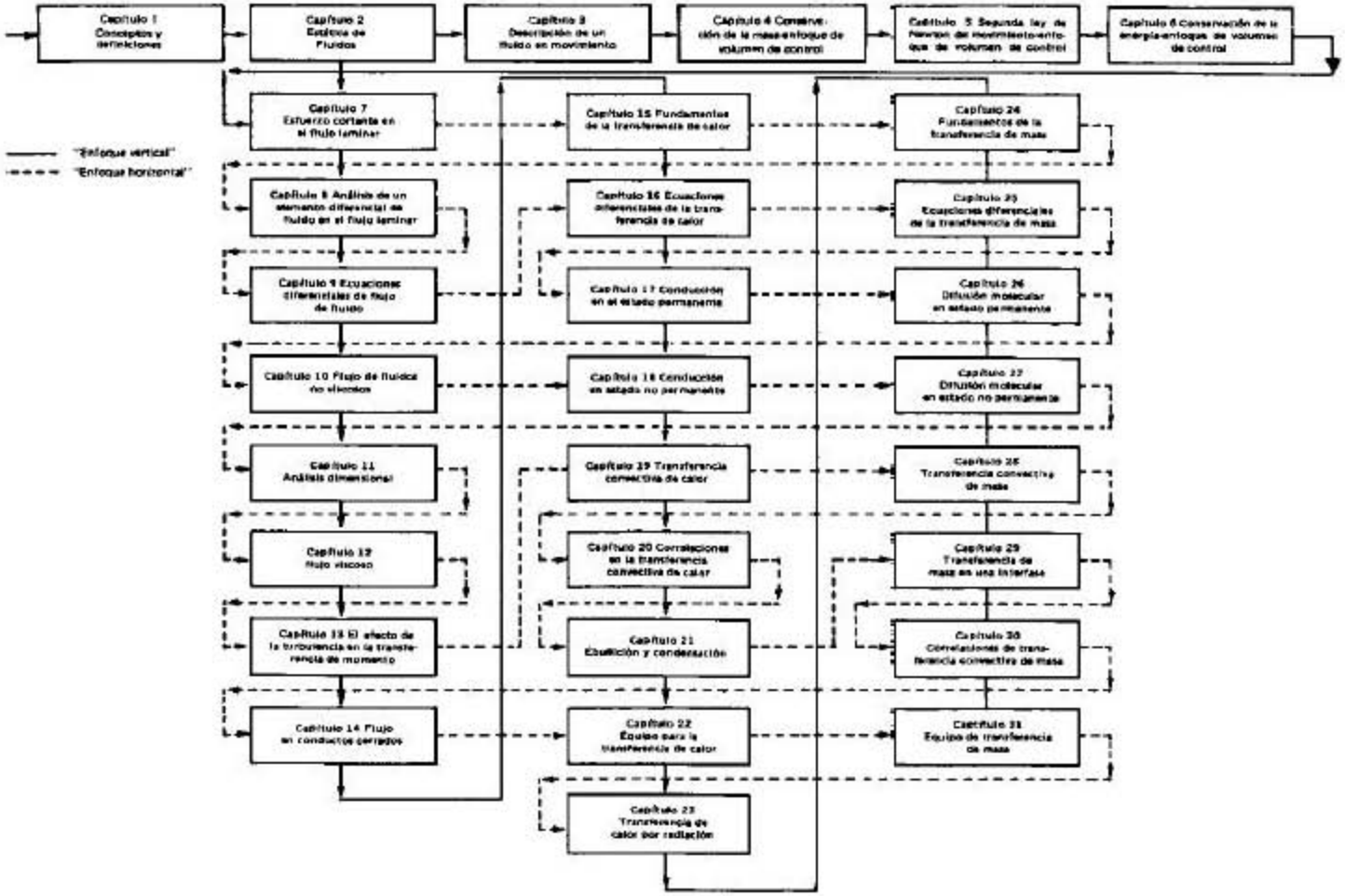
Es necesario hacer ciertas concesiones para escribir un libro de esta naturaleza. El interés primordial de los autores ha sido escribir un texto básico para aumentar la comprensión del estudiante de la transferencia de momento, energía y masa. Hemos mantenido las aplicaciones específicas de este material en un mínimo; esperamos que los cursos de laboratorio planeados para impartirlos posteriormente, tratarán las aplicaciones específicas así como las técnicas para la solución de problemas. En este texto hemos incluido tres capítulos de "aplicaciones" (capítulos 14, 22 y 31). Estos aparecen cerca del final de cada sección con el objeto de proporcionar información sobre el equipo y para indicar la clase de problemas que se pueden tratar de resolver con el material contenido en el texto. Estos capítulos se han incluido con el fin de motivar al alumno, dando sin embargo, un mínimo de aplicaciones para aquellos estudiantes para quienes éste sea un estudio final acerca de la transferencia de momento, energía y masa.

La obra se ha escrito a nivel de segundo año de ingeniería. Se presupone que el estudiante ha tomado anteriormente cursos de mecánica y matemáticas, en lo referente a ecuaciones diferenciales, así como cursos de introducción a la química y a la física. Además sería muy útil que hubiera tomado un curso de termodinámica anterior o simultáneamente al uso de este texto.

El nivel matemático de la obra ha preocupado mucho a los autores. Hemos empleado la notación vectorial principalmente en el desarrollo de las ecuaciones fundamentales. La compacidad, generalidad y exactitud de la notación vectorial nos parecieron suficientes para rechazar las objeciones de aquellos que han sugerido que este tratamiento es demasiado sofisticado. Otros, aunque en pequeño número, han sugerido que habría sido mejor usar tanto notación como operaciones tensoriales más generales. La selección ha sido un término medio, estimado por los autores como el mejor. Es necesario un conocimiento de las ecuaciones diferenciales en lo que se refiere a la solución de ecuaciones de segundo orden. Se incluyen, a manera de ejemplo, tres problemas que comprenden la solución a ecuaciones diferenciales parciales por el método de separación de variables; sin embargo, puede omitirse su estudio sin ocasionar ningún perjuicio en cuanto a la comprensión.

Pueden emplearse dos diferentes enfoques en el uso de este material. Ambos son diagramáticamente opuestos. El texto está organizado en forma "vertical". Los temas de transferencia de momento, energía y masa, están presentados en ese orden. El enfoque "horizontal" alterno, aparece indicado en el diagrama. Este enfoque implica el estudio de temas semejantes para los tres tipos de transferencia, considerando un mecanismo de transferencias a la vez. Los autores estamos conscientes de que los profesores pueden preferir

Secuencias alternas para el estudio de la transferencia de momento, calor, energía y masa



cualquiera de estos enfoques y hemos organizado el libro para que se acomode a ambas escuelas de pensamiento.

Los primeros tres capítulos pueden estudiarse u omitirse, a criterio del profesor. Probablemente el material contenido en ellos ya se haya estudiado en cursos previos, pero puede ayudar a igualar el nivel de conocimientos de los estudiantes de diversas ramas, antes de empezar el estudio de los procesos de transferencia.

Los capítulos 4, 5 y 6 son fundamentales para la comprensión de todo el texto, por lo que debe profundizarse en su estudio y asegurarse su comprensión total antes de proceder al estudio de los subsecuentes. El concepto de volumen de control que se introduce en este punto, es básico para la comprensión de los siguientes capítulos. Esta forma de estudiar los procesos de transferencia es una de las principales diferencias entre este texto y el de Bir, Stewart y Lightfoot.

Los capítulos del 7 al 14 tratan exclusivamente de transferencia de momento, del 15 al 23, de transferencia de energía y del 24 al 31 de transferencia de masa. Todos pueden considerarse en secuencia horizontal como se mencionó anteriormente. La única parte separada es el capítulo 23 que trata de la transferencia de energía radiante que no tiene paralelo en la transferencia de momento ni en la de masa.

Los autores estamos firmemente convencidos de que los procesos de cambio son fundamentales para los estudios ingenieriles. Creemos que la falta de un texto ampliamente aceptado ha obstaculizado la adopción de este punto de vista en numerosas instituciones. Esperamos que este texto pueda persuadir a algunas escuelas a aceptar, como parte de sus programas, la transferencia de momento, energía y masa, dotando así a sus egresados de un conocimiento vital.

Corvallis, Oregón

J. R. Welty

C. E. Wicks

R. E. Wilson

CONTENIDO

Capítulo 1 CONCEPTOS Y DEFINICIONES 21

1.1 Fluidos y el continuo, 21
1.2 Propiedades en un punto, 22
1.3 Variación de las propiedades de un fluido de un punto a otro, 27
1.4 Unidades, 30

Capítulo 2 ESTATICA DE FLUIDOS 35

2.1 Variación de presión en un fluido estático, 35
2.2 Aceleración rectilínea uniforme, 39
2.3 Fuerzas sobre las superficies sumergidas, 40
2.4 Flotación, 44
2.5 Conclusión, 46

Capítulo 3 DESCRIPCION DE UN FLUIDO EN MOVIMIENTO 53

3.1 Leyes físicas fundamentales, 53
3.2 Campos de flujo de fluidos: representaciones lagrangiana y euleriana, 54
3.3 Flujos permanentes y no permanentes, 55
3.4 Líneas de corriente, 56
3.5 Sistemas y volúmenes de control, 57

Capítulo 4 OBSERVACION DE LA MASA: ENFOQUE DE VOLUMEN DE CONTROL 59

4.1 Relación integral, 59
4.2 Formas específicas de la expresión integral, 60
4.3 Conclusión, 65

Capítulo 5 SEGUNDA LEY DE NEWTON DEL MOVIMIENTO: ENFOQUE DE VOLUMEN DE CONTROL 71

5.1 Relación integral para el momento lineal, **71**
5.2 Aplicaciones de la expresión integral para el momento lineal, **76**
5.3 Relación integral para el momento de momento, **83**
5.4 Aplicaciones a las bombas y turbinas, **85**
5.5 Conclusión, **90**

Capítulo 6 CONSERVACION DE LA ENERGIA: ENFOQUE DE VOLUMEN DE CONTROL 101

6.1 Relación integral para la conservación de la energía, **101**
6.2 Aplicaciones de la expresión integral, **109**
6.3 La ecuación de Bernoulli, **113**
6.4 Conclusión, **118**

Capítulo 7 ESFUERZO CORTANTE EN EL FLUJO LAMINAR 127

7.1 Relación de Newton para la viscosidad, **127**
7.2 Fluidos no newtonianos, **129**
7.3 Viscosidad, **130**
7.4 Esfuerzo cortante en los flujos laminares multidimensionales de un fluido newtoniano, **135**
7.5 Conclusión, **140**

Capítulo 8 ANALISIS DE UN ELEMENTO DIFERENCIAL DE FLUIDO EN EL FLUJO LAMINAR 143

8.1 Flujo laminar totalmente desarrollado en un conducto circular de sección transversal constante, **144**
8.2 Flujo laminar de un fluido newtoniano hacia abajo por una superficie plana inclinada, **147**
8.3 Conclusión, **150**

Capítulo 9 ECUACIONES DIFERENCIALES DE FLUJO DE FLUIDOS 153

9.1 La ecuación de continuidad diferencial, **153**
9.2 Ecuaciones de Navier-Stokes, **157**
9.3 Ecuación de Bernoulli, **167**
9.4 Conclusión, **169**

Capítulo 10 FLUJO DE FLUIDOS NO VISCOSOS 173

10.1 Rotación de un fluido en un punto, **173**
10.2 La función de corriente, **175**
10.3 Flujo no rotacional, no viscoso, alrededor de un cilindro infinito, **177**
10.4 Flujo no rotacional. El potencial de la velocidad, **180**

10.5 Carga total en el flujo no rotacional, 182
10.6 Utilización del flujo potencial, 182
10.7 Conclusión, 184

Capítulo 11 ANALISIS DIMENSIONAL 187
11.1 Dimensiones, 187
11.2 Semejanzas geométrica y cinemática, 188
11.3 Análisis dimensional de la ecuación de Navier-Stokes, 189
11.4 El método de Buckingham, 191
11.5 Teoría de modelos, 194
11.6 Conclusión, 196

Capítulo 12 FLUJO VISCOSO 203
12.1 Experimento de Reynolds, 203
12.2 Arrastre, 205
12.3 El concepto de capa límite, 208
12.4 Las ecuaciones de capa límite, 211
12.5 Solución de Blasius para la capa laminar límite en una placa plana, 212
12.6 Flujo con un gradiente de presión, 218
12.7 Análisis integral de von Kármán del momento, 220
12.8 Conclusión, 225

Capítulo 13 EL EFECTO DE LA TURBULENCIA EN LA TRANSFERENCIA DE MOMENTO 229
13.1 Descripción de la turbulencia, 229
13.2 Esfuerzos cortantes turbulentos, 231
13.3 Hipótesis de la longitud de mezclado, 234
13.4 Distribución de la velocidad a partir de la teoría de la longitud de mezclado, 235
13.5 Distribución universal de velocidades, 236
13.6 Relaciones empíricas adicionales para un flujo turbulento, 239
13.7 La capa límite turbulenta en una placa plana, 240
13.8 Factores que afectan la transición de flujo laminar a turbulento, 242
13.9 Conclusión, 243

Capítulo 14 FLUJO EN CONDUCTOS CERRADOS 245
14.1 Análisis dimensional del flujo en los conductos, 245
14.2 Factores de fricción para flujos laminar, turbulento y de transición totalmente desarrollados en conductos circulares, 247
14.3 Factor de fricción y determinación de la pérdida de carga en el flujo de un tubo, 252
14.4 Análisis del flujo en un tubo, 256

14.5 Factores de fricción correspondientes a un flujo a la entrada de un conducto circular, 259
14.6 Conclusión, 263

Capítulo 15 FUNDAMENTOS DE LA TRANSFERENCIA DE CALOR 269
15.1 Conducción, 270
15.2 Conductividad térmica, 271
15.3 Convección, 278
15.4 Radiación, 279
15.5 Mecanismos combinados de transferencia de calor, 280
15.6 Conclusión, 286

Capítulo 16 ECUACIONES DIFERENCIALES DE LA TRANSFERENCIA DE CALOR 293
16.1 La ecuación diferencial general de transferencia de energía, 293
16.2 Formas especiales de la ecuación diferencial de energía, 297
16.3 Condiciones de frontera comúnmente encontradas, 299
16.4 Conclusión, 300

Capítulo 17 CONDUCCION EN EL ESTADO PERMANENTE 303
17.1 Conducción unidimensional, 303
17.2 Conducción unidimensional con generación interna de energía, 312
17.3 Transferencia de calor de superficies extendidas, 317
17.4 Sistemas en dos y tres dimensiones, 325
17.5 Conclusión, 339

Capítulo 18 CONDUCCION EN ESTADO NO PERMANENTE 351
18.1 Soluciones analíticas, 351
18.2 Tablas de temperatura y tiempo correspondientes a formas geométricas simples, 362
18.3 Solución gráfica del flujo transitorio unidimensional de energía, gráfica Schmidt, 366
18.4 Un método integral de conducción unidimensional no permanente, 370
18.5 Conclusión, 375

Capítulo 19 TRANSFERENCIA CONVECTIVA DE CALOR 381
19.1 Consideraciones fundamentales acerca de la transferencia convectiva de calor, 381
19.2 Parámetros importantes en la transferencia convectiva de calor, 382
19.3 Análisis dimensional de la transferencia convectiva de energía, 384
19.4 Análisis exacto de la capa laminar límite, 388
19.5 Análisis integral aproximado de la capa térmica límite, 393
19.6 Analogías entre transferencias de energía y momento, 396
19.7 Consideraciones acerca del flujo turbulento, 398

Capítulo 20 CORRELACIONES EN LA TRANSFERENCIA CONVECTIVA DE CALOR 413
20.1 Convección natural, 413
20.2 Convección forzada en el flujo interno, 422
20.3 Convección forzada en el flujo externo, 429
20.4 Transferencia de calor en el punto de estancamiento, 437
20.5 Conclusión, 441

Capítulo 21 EBULLICION Y CONDENSACION 447
21.1 Ebullición, 447
21.2 Condensación, 454
21.3 Conclusión, 461

Capítulo 22 EQUIPO PARA LA TRANSFERENCIA DE CALOR 465
22.1 Tipos de cambiadores de calor, 466
22.2 Análisis de cambiadores de calor de un solo paso: diferencia logarítmica media de temperatura, 468
22.3 Análisis de cambiadores de calor de contraflujo y de tubo y coraza, 474
22.4 El método de número de unidades de transferencia (NUT) de análisis y diseño de cambiadores de calor, 477
22.5 Consideraciones adicionales acerca del diseño de cambiadores de calor, 487
22.6 Conclusión, 488

Capítulo 23 TRANSFERENCIA DE CALOR POR RADIACION 493
23.1 Naturaleza de la radiación, 493
23.2 Radiación térmica, 494
23.3 La intensidad de la radiación, 497

23.4 Ley de Planck de la radiación, **498**
23.5 Ley de Stefan-Boltzmann, **500**
23.6 Emitancia y absorbencia de las superficies sólidas, **502**
23.7 Transferencia de calor radiante entre cuerpos negros, **508**
23.8 Intercambio de energía radiante en cavidades negras cerradas, **513**
23.9 Intercambio de energía radiante habiendo superficies rerradiantes presentes, **516**
23.10 Transferencia de energía radiante entre superficies grises, **517**
23.11 Radiación de los gases, **521**
23.12 El coeficiente de transferencia de calor radiante, **525**
23.13 Conclusión, **526**

Capítulo 24 FUNDAMENTOS DE LA TRANSFERENCIA DE MASA 533
24.1 Transferencia de masa molecular, **534**
24.2 El coeficiente de difusión, **546**
24.3 Transferencia convectiva de masa, **562**
24.4 Conclusión, **563**

Capítulo 25 ECUACIONES DIFERENCIALES DE LA TRANSFERENCIA DE MASA 571
25.1 La ecuación diferencial de transferencia de masa, **571**
25.2 Formas especiales de la ecuación diferencial de transferencia de masa, **575**
25.3 Condiciones de frontera encontradas usualmente, **578**
25.4 Conclusión, **581**

Capítulo 26 DIFUSION MOLECULAR EN ESTADO PERMANENTE 587
26.1 Transferencia unidimensional de masa, independiente de reacciones químicas, **588**
26.2 Sistemas unidimensionales asociados con la reacción química, **601**
26.3 Sistemas bidimensionales y tridimensionales, **610**
26.4 Transferencia simultánea de momento, calor y masa, **617**
26.5 Conclusión, **627**

Capítulo 27 DIFUSION MOLECULAR EN ESTADO NO PERMANENTE 639
27.1 Soluciones analíticas, **640**
27.2 Tablas de tiempos de concentración correspondientes a algunas formas geométricas simples, **644**
27.3 Solución gráfica correspondiente al flujo unidireccional transitorio de masa: la gráfica modificada de Schmidt, **647**
27.4 Conclusión, **651**

Capítulo 28 TRANSFERENCIA CONVECTIVA DE MASA 657
28.1 Consideraciones fundamentales acerca de la transferencia convectiva de masa, 657
28.2 Parámetros importantes en la transferencia convectiva de masa, 659
28.3 Análisis dimensional de la transferencia convectiva de masa, 661
28.4 Análisis exacto de la concentración laminar de la capa límite, 664
28.5 Análisis aproximado de la capa límite de concentración, 672
28.6 Analogías de transferencia de masa, energía y momento, 675
28.7 Modelos de coeficientes de transferencia de masa, 684
28.8 Conclusión, 687

Capítulo 29 TRANSFERENCIA DE MASA EN UNA INTERFASE 697
29.1 Equilibrio, 697
29.2 Teoría de las dos resistencias, 701
29.3 Conclusión, 709

Capítulo 30 CORRELACIONES DE TRANSFERENCIA CONVECTIVA DE MASA 717
30.1 Transferencia de masa a placas, cilindros y esferas, 717
30.2 Transferencia de masa para flujo turbulento a través de tubos, 727
30.3 Transferencia de masa en columnas de pared mojada, 727
30.4 Transferencia de masa en camas empacadas y fluidificadas, 730
30.5 Transferencia de masa con reacción química, 731
30.6 Coeficientes de capacidad para torres industriales, 732
30.7 Conclusión, 733

Capítulo 31 EQUIPO DE TRANSFERENCIA DE MASA 739
31.1 Tipos de equipos de transferencia de masa, 740
31.2 Tanques o estanques de transferencia de masa intermitentes, 743
31.3 Balance de masas correspondiente a torres de contacto continuo: ecuaciones de la línea de operación, 746
31.4 Balances de entalpia correspondientes a las torres de contacto continuo, 757
31.5 Coeficientes de capacidad de transferencia de masa, 758
31.6 Análisis de equipo de contacto continuo, 760
31.7 Conclusión, 771

1
CONCEPTOS Y DEFINICIONES

La transferencia de momento en un fluido incluye el estudio del movimiento de los fluidos así como de las fuerzas que producen dicho movimiento. A partir de la segunda ley de Newton del movimiento, se sabe que la fuerza se relaciona directamente con la rapidez de cambio del momento de un sistema. Excluyendo a las fuerzas de acción a distancia, tales como la gravedad, se puede demostrar que las que actúan sobre un fluido, como la presión y el esfuerzo cortante, son el resultado de una transferencia microscópica (molecular) de momento. Así pues, al tema que estamos estudiando, al que históricamente se le ha llamado mecánica de fluidos, se le puede denominar también transferencia de momento.

La historia de la mecánica de fluidos nos muestra la hábil combinación del trabajo analítico realizado en hidrodinámica en los siglos XIX y XX, y el conocimiento empírico acerca de la hidráulica que el hombre ha acumulado a lo largo del tiempo. La unión de estas disciplinas desarrolladas separadamente fue realizada por primera vez por Ludwig Prandtl, en 1904, con su teoría de la capa límite, que fue verificada por medio de la experimentación. La mecánica de fluidos o moderna transferencia de momento es tanto analítica, como experimental.

Cada área de estudio tiene su frascología y su nomenclatura propias. Ya que la transferencia de momento es típica, introduciremos las definiciones y conceptos básicos para tener una base de comunicación.

1.1 FLUIDOS Y EL CONTINUO

Un fluido se define como una substancia que se deforma continuamente bajo la acción de un esfuerzo cortante. Una consecuencia importante de esta definición es que cuando un fluido se encuentra en reposo, no pueden existir

esfuerzos cortantes. Tanto los líquidos como los gases son fluidos. Algunas substancias, como el vidrio, se clasifican técnicamente como fluidos. Sin embargo, la rapidez con la que se deforma el vidrio a temperaturas normales es tan pequeña que no es práctico considerarlo como fluido.

Concepto de Continuo. Los fluidos, al igual que el resto de la materia, están formados por moléculas, cuya cantidad supera a la imaginación. En una pulgada cúbica de aire a temperatura ambiente, hay aproximadamente 10^{20} moléculas. Para poder predecir el movimiento individual de tales moléculas se necesitaría una teoría extremadamente complicada, que estaría más allá de nuestra capacidad actual. Ya que tanto la teoría cinética de los gases como la mecánica estadística estudian el movimiento de las moléculas, este estudio se realiza en términos de grupos estadísticos y no de moléculas individuales.

En ingeniería, la mayor parte del trabajo se relaciona con el comportamiento por lotes o macroscópico y no con el molecular o microscópico. En muchos casos, es conveniente imaginar un fluido como una distribución continua de materia, o un *continuo*. Desde luego, en algunos casos no es válido utilizar dicho concepto. Consideremos, por ejemplo, el número de moléculas que hay en un pequeño volumen de gas en reposo. Si el volumen se toma suficientemente pequeño, el número de moléculas por unidad de volumen dependerá del tiempo para el volumen macroscópico aunque este último contenga un número constante de moléculas. El concepto de continuo sólo sería válido en el último caso. Así pues, se ve que la validez de este concepto depende del tipo de información que desee obtenerse y no de la naturaleza del fluido. Es válido tratar a los fluidos como continuos siempre que el menor volumen de fluido del cual nos ocupemos contenga un número suficiente de moléculas para que tenga sentido hacer promedios estadísticos. Se considera que las propiedades macroscópicas de un continuo varían continuamente de uno a otro punto del fluido. Procederemos ahora a definir estas propiedades en un punto.

1.2 PROPIEDADES EN UN PUNTO

Cuando un fluido se encuentra en movimiento variarán las cantidades que se asocian con el estado y con el movimiento de dicho fluido, de un punto a otro. A continuación daremos la definición de algunas variables de los fluidos en un punto.

Densidad en un Punto. La densidad de un fluido se define como la masa por unidad de volumen. Bajo condiciones de flujo, particularmente en los gases, la densidad puede variar considerablemente en todo el fluido. Se define la densidad, ρ, como:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to \delta V} \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

donde Δm es la masa contenida en un volumen ΔV, y δV es el volumen mínimo, para el cual tienen sentido los promedios estadísticos que circunda al punto. El límite se muestra en la figura 1.1.

El concepto de densidad en un punto matemático, esto es, en $\Delta V = 0$ obviamente es ficticio. Sin embargo, tomar $\rho = \lim_{\Delta V \to 0} (\Delta m / \Delta V)$ es muy útil ya que nos permite describir el flujo de un fluido en términos de funciones continuas. En general, la densidad puede variar de uno a otro punto del fluido así como con respecto al tiempo, como en un neumático perforado de automóvil.

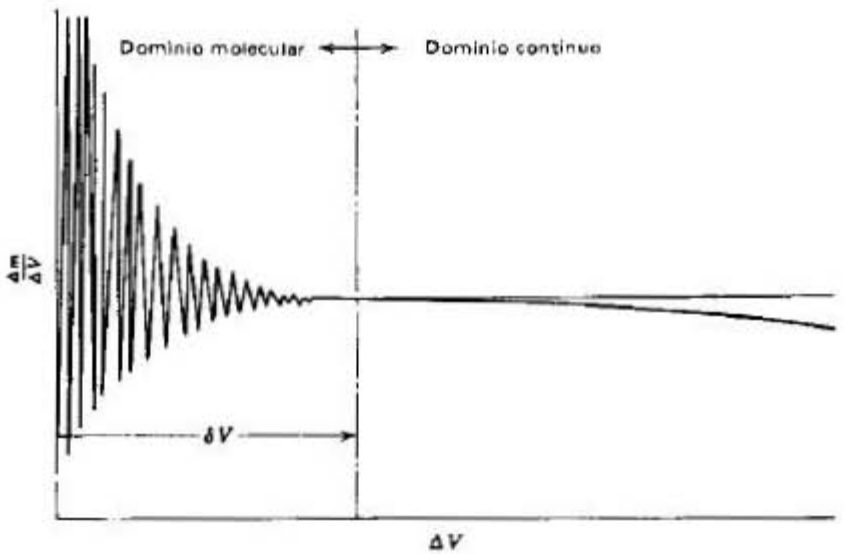


Figura 1.1 Densidad en un punto

Propiedades de los Fluidos y del Flujo. Algunos fluidos, especialmente los líquidos, poseen densidades que permanecen constantes dentro de un amplio rango de temperatura y presión. Los fluidos que tienen esta cualidad usualmente se tratan como fluidos incomprensibles; sin embargo los efectos de la compresibilidad son una propiedad de la situación más que del fluido. Por ejemplo, el flujo de aire a bajas velocidades se describe exactamente mediante las mismas ecuaciones que describen el flujo del agua. Desde un punto de vista estático, el aire es un fluido compresible y el agua es un fluido incompresible. En lugar de clasificarlos de acuerdo con el fluido, los efectos de la compresibilidad se consideran como una propiedad del flujo. A menudo se hace una distinción sutil entre las propiedades del fluido y las del flujo, y el estudiante debe estar consciente de la importancia de este concepto.

Esfuerzo en un Punto. Consideremos la fuerza $\Delta \mathbf{F}$, la cual actúa sobre un elemento ΔA del cuerpo que se observa en la figura 1.2. La fuerza $\Delta \mathbf{F}$ se descompone en sus componentes normal y paralela a la superficie del elemento.

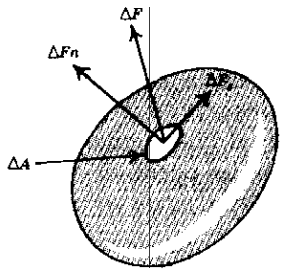


Figura 1.2 Fuerza ejercida sobre un elemento de fluido

La fuerza por unidad de área o esfuerzo en un punto, se define como el límite de $\Delta \mathbf{F}/\Delta A$ cuando $\Delta A \to \delta A$, donde δA es el área mínima para la cual tienen sentido los promedios estadísticos:

$$\lim_{\Delta A \to \delta A} \frac{\Delta F_n}{\Delta A} = \sigma_{ii} \qquad \lim_{\Delta A \to \delta A} \frac{\Delta F_s}{\Delta A} = \tau_{ij}$$

Aquí σ_{ii} se llama esfuerzo normal τ_{ij} esfuerzo cortante. En este texto se utilizará la notación de subíndice doble como en la mecánica de sólidos. El estudiante recordará que el esfuerzo normal es positivo en la tensión. El proceso límite para el esfuerzo normal aparece en la figura 1.3.

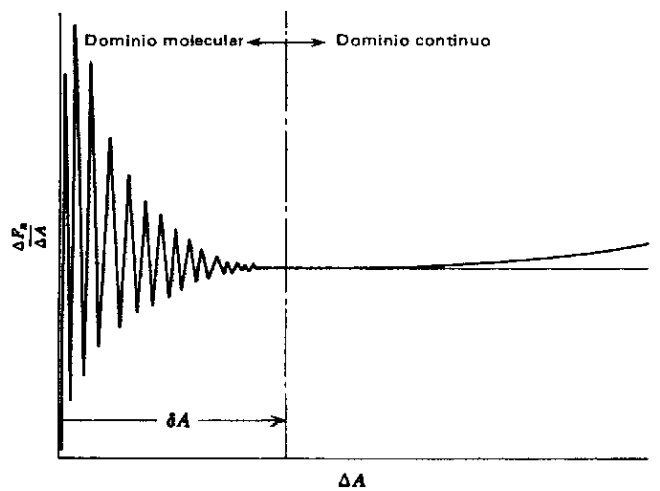


Figura 1.3 Esfuerzo normal en un punto

Las fuerzas que se ejercen sobre un fluido pueden clasificarse en dos grupos: fuerzas que actúan sobre el cuerpo y fuerzas superficiales. Las primeras

son las ejercidas sin contacto físico; por ejemplo, la gravedad y las fuerzas electrostáticas. Por el contrario, la presión y las fuerzas de fricción requieren del contacto físico para su transmisión. Ya que se requiere de una superficie para la acción de estas fuerzas, se llaman fuerzas superficiales. Por lo tanto, el esfuerzo es una fuerza superficial por unidad de área.*

Presión en un Punto en un Fluido Estático. Para un fluido estático, puede determinarse el esfuerzo normal en un punto a partir de la aplicación de las leyes de Newton a un elemento del fluido haciendo que este elemento tienda a cero. Debe recordarse que no puede existir esfuerzo cortante en un fluido estático. Por esto, las únicas fuerzas superficiales presentes serán las debidas a esfuerzos normales. Analícese el elemento de la figura 1.4. Mientras este elemento permanece en reposo, la gravedad y los esfuerzos normales actúan sobre él. El peso de un elemento de fluido es $\rho \mathbf{g}(\Delta x\, \Delta y\, \Delta z/2)$.

Para un cuerpo en reposo, $\sum \mathbf{F} = 0$. En la dirección de x,

$$\Delta F_x - \Delta F_s \sin\theta = 0$$

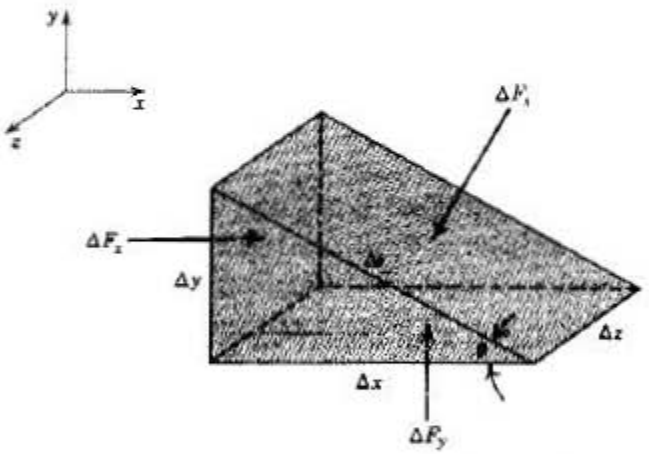


Figura 1.4 Elemento de un fluido estático

Ya que sen $\theta = \Delta y/\Delta s$, la ecuación anterior se convierte en:

$$\Delta F_x - \Delta F_s \frac{\Delta y}{\Delta s} = 0$$

Dividiendo toda la ecuación por $\Delta y\, \Delta z$ y tomando el límite cuando el volumen del elemento tiende a cero, se obtiene:

$$\lim_{\Delta V \to 0} \left[\frac{\Delta F_x}{\Delta y\, \Delta z} - \frac{\Delta F_s}{\Delta s\, \Delta z} \right] = 0$$

*Matemáticamente, el esfuerzo está clasificado como tensor de segundo orden, ya que requiere magnitud, dirección y orientación con respecto a un plano para quedar perfectamente determinado.

Recordando que el esfuerzo normal es positivo en la tensión, evaluando la ecuación anterior, se obtiene:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{ss} \tag{1-1}$$

En la dirección de y, al aplicar $\sum \mathbf{F} = 0$ queda:

$$\Delta F_y - \Delta F_s \cos\theta - \rho g \frac{\Delta x\, \Delta y\, \Delta z}{2} = 0$$

Como el $\cos\theta = \Delta x/\Delta s$, se tiene:

$$\Delta F_y - \Delta F_s \frac{\Delta x}{\Delta s} - \rho g \frac{\Delta x\, \Delta y\, \Delta z}{2} = 0$$

Dividiendo toda la ecuación por $\Delta x\, \Delta z$ y tomando el mismo límite que tomamos anteriormente, se obtiene:

$$\lim_{\Delta V \to 0} \left[\frac{\Delta F_y}{\Delta x\, \Delta z} - \frac{\Delta F_s}{\Delta s\, \Delta z} - \frac{\rho g\, \Delta y}{2} \right] = 0$$

lo cual se reduce a:

$$-\sigma_{yy} + \sigma_{ss} - \frac{\rho g}{2}(0) = 0$$

o

$$\sigma_{yy} = \sigma_{ss} \tag{1-2}$$

Se notará que el ángulo θ no aparece en la ecuación (1-1) ni en la (1-2), por esto el esfuerzo normal en un punto de un fluido estático es independiente de la dirección y, por lo tanto, es una cantidad escalar.

Como el elemento se encuentra en reposo, las únicas fuerzas superficiales que actúan son las debidas al esfuerzo normal. Si se fuera a medir la fuerza por unidad de área que estuviera actuando sobre un elemento sumergido, se observaría que, o actuaría hacia adentro, o colocaría al elemento en compresión. La cantidad que se mediría sería, desde luego, la presión, la cual debido al desarrollo anterior, debe ser el negativo del esfuerzo normal. Esta importante simplificación, la reducción del esfuerzo que es un tensor, a la presión que es un escalar, también puede observarse para el caso en que el esfuerzo constante es nulo en un fluido en movimiento. Cuando se encuentran presentes los esfuerzos cortantes, las componentes del esfuerzo normal en un punto pueden no ser iguales, sin embargo, la presión sigue siendo igual al esfuerzo normal promedio. Esto es:

$$P = -\tfrac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

con muy pocas excepciones, una de ellas, el flujo en las ondas de choque.

Ahora se han estudiado algunas de las propiedades que existen en un punto, investiguemos la forma en que varían las propiedades de un fluido de un punto a otro.

1.3 VARIACION DE LAS PROPIEDADES DE UN FLUIDO DE UN PUNTO A OTRO

En el enfoque del continuo a la transferencia de momento, se usarán campos de presión, temperatura, densidad, velocidad y esfuerzo. Ya en estudios previos se ha introducido el concepto de campo gravitacional. La gravedad es desde luego un vector, y por lo tanto el campo gravitacional es un campo vectorial. En este libro se escribirán los vectores en letras negritas. Todos los días se publican en los diarios de este país, mapas que describen las variaciones de presión. Ya que la presión es una cantidad escalar, dichos mapas representan un campo escalar. Los escalares se encontrarán en tipo normal en este libro.

En la figura 1.5, las líneas trazadas representan el lugar geométrico de los puntos con igual presión. Desde luego, la presión varía continuamente en toda la región y podemos observar sus niveles y deducir la forma en que varía la presión, examinando uno de estos mapas.

La descripción de la variación de la presión de un punto a otro es interesante especialmente en la transferencia de momento. Llamado x e y a las direcciones este y norte de la figura 1.5, respectivamente, podemos representar la presión en toda la región por medio de la función general $P(x, y)$.

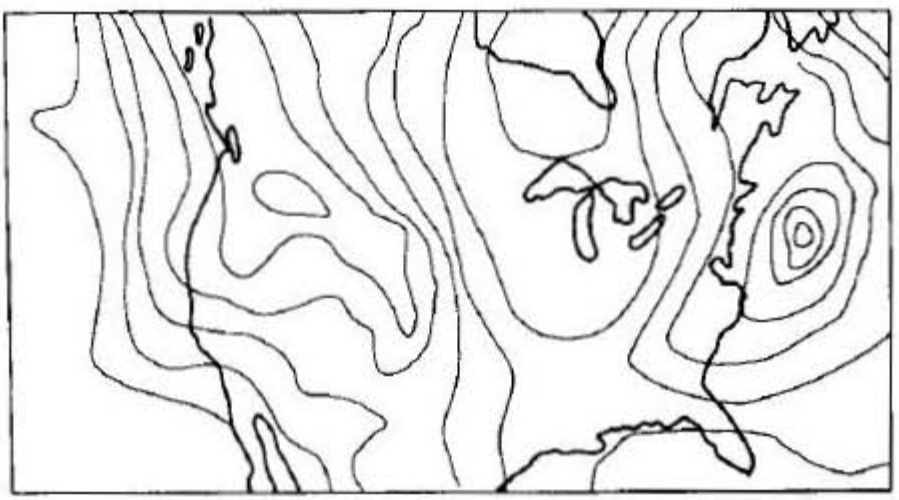


Figura 1.5 Mapa climatológico, ejemplo de un campo escalar

El cambio en P entre dos puntos cualesquiera dentro de la región (que se escribe dP), separados por las distancias dx y dy, está dado por la diferencial total:

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy \tag{1-3}$$

En la ecuación (1-3), las derivadas parciales representan la forma en la que cambia P a lo largo de los ejes x e y, respectivamente.

A lo largo de la trayectoria arbitraria s en el plano xy, la derivada total es:

$$\frac{dP}{ds} = \frac{\partial P}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{dy}{ds} \tag{1-4}$$

En la ecuación (1-4), el término dp/ds es la derivada direccional y su relación funcional describe la rapidez de cambio de P en la dirección s.

En la figura 1.6 se ha representado una pequeña porción del campo de presión. Puede observarse la trayectoria arbitraria S y fácilmente se ve que los términos: dx/ds y

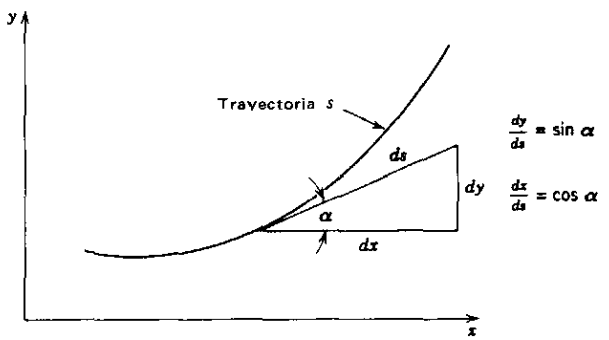


Figura 1.6 Trayectoria s en el plano xy

dy/ds son el coseno y el seno del ángulo de trayectoria, α, con respecto al eje x. La derivada direccional, por lo tanto, puede escribirse:

$$\frac{dP}{ds} = \frac{\partial P}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial P}{\partial y}\operatorname{sen}\alpha \tag{1-5}$$

Existe un número infinito de trayectorias que pueden escogerse en el plano xy. Sin embargo, hay dos trayectorias que son de especial interés: aquella para la cual dP/ds es igual a cero y aquella para la que dP/ds es un máximo.

Es muy fácil de encontrar la trayectoria para la cual la derivada direccinal es igual a cero. Haciendo dP/ds igual a cero, se tiene:

$$\left.\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\right|_{dP/ds=0} = \left.\operatorname{sen}\alpha\right|_{dP/ds=0} = -\frac{\partial P/\partial x}{\partial P/\partial y}$$

o, ya que $\tan\alpha = dy/dx$, tenemos

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{dP/ds=0} = -\frac{\partial P/\partial x}{\partial P/\partial y} \tag{1-6}$$

A lo largo de la trayectoria cuya pendiente está definida en la ecuación (1-6), tenemos $dP = 0$, y por lo tanto P es constante. Las trayectorias a lo largo de las cuales una cantidad escalar es constante se llaman *isolíneas*.

Para encontrar la dirección para la que dP/ds es un máximo, la derivada $(d/d\alpha)\,(dP/ds)$ debe ser igual a cero, o sea:

$$\frac{d}{d\alpha}\frac{dP}{ds} = -\operatorname{sen}\alpha\frac{\partial P}{\partial x} + \cos\alpha\frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

o

$$\left.\tan\alpha\right|_{dP/ds\ \text{es máx}} = \frac{\partial P/\partial y}{\partial P/\partial x} \tag{1-7}$$

Comparando las relaciones (1-6) y (1-7) se puede observar que las dos direcciones definidas por estas ecuaciones son perpendiculares. La magnitud de la derivada direccional, cuando es máxima, es:

$$\left.\frac{dP}{ds}\right|_{\text{máx}} = \frac{\partial P}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial P}{\partial y}\operatorname{sen}\alpha$$

donde $\cos\alpha$ y $\operatorname{sen}\alpha$ se evalúan a lo largo de la trayectoria representada por la ecuación (1-7). Ya que el coseno se relaciona con la tangente por medio de:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$$

se tiene:

$$\left.\cos\alpha\right|_{dP/ds\ \text{es máx}} = \frac{\partial P/\partial x}{\sqrt{(\partial P/\partial x)^2 + (\partial P/\partial y)^2}}$$

Calculando $\operatorname{sen}\alpha$ en forma semejante, se obtiene:

$$\left.\frac{dP}{ds}\right|_{\text{máx}} = \frac{(\partial P/\partial x)^2 + (\partial P/\partial y)^2}{\sqrt{(\partial P/\partial x)^2 + (\partial P/\partial y)^2}} = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2} \tag{1-8}$$

Las ecuaciones (1-7) y (1-8) sugieren que la máxima derivada direccional es un vector de la forma:

$$\frac{\partial P}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial P}{\partial y}\mathbf{e}_y$$

donde e_x y e_y son vectores unitarios en las direcciones x e y, respectivamente.

La derivada direccional a lo largo de la trayectoria de máximo valor se encuentra con frecuencia en el análisis de los procesos de transferencia y se le da el nombre de *gradiente*. Así, el gradiente de P, o sea, grad P, es:

$$\text{grad } P = \frac{\partial P}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial P}{\partial y}\mathbf{e}_y$$

donde $P = P(x, y)$. Este concepto se puede extender para incluir casos en los que $P = P(x, y, z)$. En este caso más general,

$$\text{grad } P = \frac{\partial P}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial P}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial P}{\partial z}\mathbf{e}_z \tag{1-9}$$

La ecuación (1-9) puede escribirse de manera más compacta por medio del operador (llamado nabla), en la forma siguiente:

$$\nabla P = \frac{\partial P}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial P}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial P}{\partial z}\mathbf{e}_z$$

donde:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{e}_z \tag{1-10}$$

La ecuación (1-10) es la relación que define al operador en coordenadas cartesianas. Este símbolo indica que se va a realizar una diferenciación en una forma prescrita. En otros sistemas de coordenadas, tales como el de coordenadas cilíndricas o el de esféricas, el gradiente adopta una forma diferente.* Sin embargo, el significado geométrico del gradiente permanece idéntico, es un vector cuyas dirección y magnitud son las de la máxima rapidez de cambio de la variable dependiente con respecto a la distancia.

1.4 UNIDADES

Además del sistema internacional estándar de unidades hay dos diferentes sistemas ingleses de unidades que se utilizan comúnmente en ingeniería. Estos sistemas tienen su origen en la segunda ley de Newton del movimiento:

*Las formas del operador gradiente en sistemas de coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas, aparecen en el Apéndice B.

La fuerza es igual a la rapidez de cambio del momento con respecto al tiempo. Al definir cada uno de los términos de esta ley se ha establecido una relación directa entre las cuatro cantidades físicas básicas usadas en mecánica, que son: la fuerza, la masa, la longitud y el tiempo. A causa de esta selección arbitraria de dimensiones fundamentales, se han originado algunas confusiones en el uso de los sistemas ingleses de unidades. La adopción del sistema de unidades SI como norma en todo el mundo servirá para superar estas dificultades.

La relación entre fuerza y masa se puede expresar por medio del siguiente enunciado de la segunda ley de Newton del movimiento:

$$\mathbf{F} = \frac{m\mathbf{a}}{g_c}$$

donde g_c es un factor de conversión que se incluyó para hacer la ecuación consistente en cuanto a dimensiones.

En el sistema SI, la masa, la longitud y el tiempo, se toman como unidades básicas. Las unidades básicas son: la masa en kilogramos (kg), la longitud en metros (m) y el tiempo en segundos (seg). La unidad correspondiente para la fuerza es el newton (N). Un newton es la fuerza que se necesita para acelerar una masa de un kilogramo con la rapidez de un metro por segundo por segundo ($1 m/seg^2$). El factor de conversión, g_c, es entonces, igual a un kilogramo metro por newton por segundo por segundo ($1 kg.\ m/N\ seg^2$).

En la práctica ingenieril, la fuerza, la longitud y el tiempo se escogen frecuentemente como unidades fundamentales. Usando este sistema, la fuerza se expresa en libras fuerza (lb_f), la longitud en pies (ft) y el tiempo en segundos. La unidad correspondiente para la masa será aquella que sea acelerada con la rapidez de 1 $ft/(seg)^2$ por 1 lb_f.

Esta unidad de masa cuyas dimensiones son $(lb_f)\ (seg)^2/(ft)$ se llama *slug*. Entonces el factor de conversión g_c es un factor de multiplicación para convertir slugs en $(lb_f)\ (seg)^2/(ft)$, y su valor es 1 $(slug)\ (ft)/(lb_f)(seg)^2$.

También se encuentra un tercer sistema en la práctica ingenieril, que incluye las cuatro unidades fundamentales. La unidad de fuerza es 1 lb_f, la de masa 1 lb_m, la longitud y el tiempo están dadas en unidades de pies y segundos, respectivamente. Cuando 1 lb_m al nivel del mar se deja caer bajo la influencia de la gravedad, su aceleración será de 32.174 $(ft)/(seg)^2$. La fuerza que la gravedad ejerce sobre 1 lb_m al nivel del mar se define como 1 lb_f. Por lo tanto, el factor de conversión g_c, para este sistema, es 32.174 $(lb_m)(ft)/(lb_f)(seg)^2$.*

En la Tabla 1.1 se proporciona un sumario de los valores de g_c para estos tres sistemas ingleses de unidades ingenieriles, junto con las unidades de longitud, tiempo, fuerza y masa.

*En cálculos subsecuentes comprendidos en este libro, g_c será redondeado al valor de 32.2 $lb_m\ ft/seg^2 lb_f$.

Ya que los tres sistemas son de uso común en la literatura técnica, el estudiante debe ser capaz de utilizar las fórmulas en cualquier situación particular. En *todos* los cálculos se requiere de una verificación cuidadosa de la consistencia en cuanto a las dimensiones. El factor de conversión g_c, relacionará correctamente las unidades que correspondan a un sistema. Los autores no tratarán de incorporar el factor de conversión en ninguna de las ecuaciones; en cambio, se deja al lector la responsabilidad de utilizar unidades que sean consistentes con todos los términos de la ecuación.

TABLA 1.1

Sistema	*Longitud*	*Tiempo*	*Fuerza*	*Masa*	g_c
1	Metro	Segundo	Newton	Kilogramo	$1\dfrac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{N}\cdot\text{s}^2}$
2	Pie	Segundo	lb_f	Slug	$\dfrac{1\ (\text{slug})(\text{ft})}{(\text{lb}_f)(\text{s})^2}$
3	Pie	Segundo	lb_f	lb_m	$\dfrac{32.174\ (\text{lb}_m)(\text{ft})}{(\text{lb}_f)(\text{s})^2}$

PROBLEMAS

1.1 El número de moléculas que atraviesa una unidad de área por unidad de tiempo en una dirección está dado por:

$$N = \tfrac{1}{4} n \bar{v}$$

donde n es el número de moléculas por unidad de volumen y $\overline{v}$ la velocidad molecular promedio. Como la velocidad molecular es aproximadamente igual a la velociad del sonido en un gas perfecto, calcule el número de moléculas que atraviesa un hoyo circular de 10^{-3} in. de diámetro. Supóngase que el gas se encuentra en condiciones estándar. En condiciones estándar hay 4×10^{20} moléculas por in^3.

1.2 Encuentre el gradiente de la presión en el punto (a, b), cuando el campo de presiones está dado por:

$$P = \rho_\infty v_\infty{}^2 \left(\operatorname{sen}\frac{x}{a}\operatorname{sen}\frac{y}{b} + 2\frac{x}{a}\right)$$

donde ρ_∞, v_∞, a y b son constantes.

1.3 Encuentre el gradiente de temperatura en el punto (a, b) en el tiempo $t = (4L^2/\alpha)\ln e$ cuando el campo de temperaturas está dado por

$$T = T_0 e^{-\alpha t/a^2} \operatorname{sen}\frac{x}{a} \cosh\frac{y}{b}$$

donde T_0, α, a y b son constantes.

1.4 ¿Son dimensionalmente homogéneos los campos descritos en los problemas 1.2 y 1.3?
¿Cuáles deben ser las unidades de ρ_0 para que la presión esté dada en libras por pie cuadrado cuando v_x esté dado en pies por segundo (problema 1.2)?

1.5 ¿Cuáles de las cantidades enumeradas a continuación son propiedades de flujo y cuáles son propiedades de fluido?

presión	temperatura	velocidad
densidad	esfuerzo	velocidad del sonido
calor específico	gradiente de presión	

1.6 Demuestre que los vectores unitarios $\mathbf{e}_r$ y $\mathbf{e}_\theta$ en un sistema de coordenadas cilíndricas están relacionados con los vectores unitarios $\mathbf{e}_x$ y $\mathbf{e}_y$ por medio de:

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_x \cos\theta + \mathbf{e}_y \operatorname{sen}\theta$$

y

$$\mathbf{e}_\theta = -\mathbf{e}_x \operatorname{sen}\theta + \mathbf{e}_y \cos\theta$$

1.7 Usando los resultados del problema 1.6, demuestre que $d\mathbf{e}_r/d\theta = \mathbf{e}_\theta$ y $d\mathbf{e}_\theta/d\theta = -\mathbf{e}_r$.

1.8 Usando las relaciones geométricas que aparecen a continuación y la regla de la cadena para la diferenciación, demuestre que:

$$\frac{\partial}{\partial x} = -\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial r}$$

y

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial r}$$

cuando $r^2 = x^2 + y^2$ y $\theta = y/x$.

1.9 Transforme el operador ∇ a coordenadas cilíndricas (r, θ, z) usando los resultados de los problemas 1.6 y 1.8.

1.10 Para un fluido cuya densidad es ρ y en el cual se encuentran uniformemente dispersadas algunas partículas sólidas cuya densidad es ρ_s, demues-

tre que si x es la fracción de masa de sólido en la mezcla, la densidad está dada por:

$$\rho_{\text{mezcla}} = \frac{\rho_s \rho}{\rho x + \rho_s (1 - x)}$$

1.11 Un campo escalar está dado por la función $\phi = 3x^2y + 4y^2$.
(a) Encuentre $\nabla\phi$ en el punto (3,5).
(b) Encuentre la componente de $\nabla\phi$ que forme un ángulo de $-60°$ con el eje x sobre el eje x.

1.12 Si el fluido del problema 1.10, cuya densidad es ρ, obedece la ley de los gases perfectos, obtenga la ecuación de estado de la mezcla, o sea $P = f(\rho_s, (RT/M), \rho_m, x)$. ¿Será válido este resultado si se encuentra presente un líquido en lugar de un sólido?

1.13 Usando la expresión para el gradiente en coordenadas polares, (Apéndice A), encuéntrese el gradiente de $\psi(r, \theta)$ cuando

$$\psi = Ar \operatorname{sen}\theta\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)$$

¿Dónde es máximo el gradiente? Los términos A y a son constantes.

2
ESTATICA DE FLUIDOS

Ya en el Capítulo 1 se vio la definición de una variable de fluido en un punto. En este capítulo se estudiará la variación de una variable particular, la presión, de un punto a otro, de un fluido en reposo.

Con frecuencia, en un fluido estacionario que se encuentre sobre la superficie terrestre, se hallará una situación estática. Aunque la Tierra tiene movimiento propio, es correcto, dentro de los límites normales de la exactitud, despreciar la aceleración absoluta del sistema de coordenadas que, en esta situación, permanece fijo con respecto a la Tierra. Un sistema de coordenadas como éste se denomina sistema *inercial de referencia*. Si por el contrario, el fluido es estacionario con respecto a un sistema de coordenadas que posea una aceleración se llama *no inercial*. Un ejemplo de este último sería el fluido contenido en un carro tanque de ferrocarril al viajar a lo largo de una parte curva de la vía.

La aplicación de la segunda ley de Newton del movimiento a una masa fluida fija, se reduce a la expresión que establece que la suma de las fuerzas externas es igual al producto de la masa y la aceleración. En el caso de un sistema inercial, desde luego se tendría la relación: $\sum \mathbf{F} = 0$; en tanto que la relación más general, $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ debe usarse para el caso no inercial.

2.1 VARIACION DE PRESION EN UN FLUIDO ESTATICO

A partir de la definición de fluido, se sabe que no se puede existir ningún esfuerzo cortante en un fluido en reposo. Esto significa que las únicas fuerzas que actúan sobre el fluido son las debidas a la gravedad y a la presión. Como la suma de las fuerzas debe ser igual a cero en todo el fluido, se puede satisfacer la ley de Newton aplicándola a un cuerpo arbitrario libre, de fluido

de tamaño diferencial. El cuerpo libre que se seleccionó aparece en la Figura 2-1 y es el elemento de fluido $\Delta x\ \Delta y\ \Delta z$ que tiene uno de sus vértices en el punto xyz. El sistema xyz es inercial.

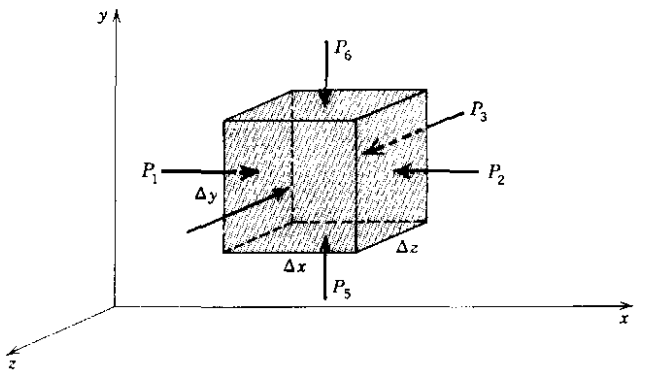


Figura 2.1 Fuerzas de presión sobre un elemento estático fluido

Las presiones que actúan sobre las diversas caras del elemento están numeradas del 1 al 6. Para encontrar la suma de las fuerzas que actúan sobre el elemento, se debe primero evaluar la presión sobre cada una de las caras.

Designaremos a la presión de acuerdo con la cara del elemento sobre la cual actúa. Por ejemplo, $P_1 = P|_x$ $P_2 = P|_{x+\Delta x}$, y así sucesivamente. Calculando las fuerzas que actúan sobre cada una de las caras, además de la fuerza debida a la gravedad que actúa sobre el elemento $\rho\mathbf{g}\,\Delta x\ \Delta y\ \Delta z$, se verá que la suma de las fuerzas es:

$$\rho\mathbf{g}(\Delta x\ \Delta y\ \Delta z) + (P|_x - P|_{x+\Delta x})\ \Delta y\ \Delta z\mathbf{e}_x + (P|_y - P|_{y+\Delta y})\ \Delta x\ \Delta z\mathbf{e}_y + (P|_z - P|_{z+\Delta z})\ \Delta x\ \Delta y\mathbf{e}_z = 0$$

Si se divide entre el volumen del elemento $\Delta x\ \Delta y\ \Delta z$, se observa que la ecuación anterior se convierte en:

$$\rho\mathbf{g} - \frac{P|_{x+\Delta x} - P|_x}{\Delta x}\mathbf{e}_x - \frac{P|_{y+\Delta y} - P|_y}{\Delta y}\mathbf{e}_y - \frac{P|_{z+\Delta z} - P|_z}{\Delta z}\mathbf{e}_z = 0$$

donde se ha invertido el orden de los términos que indican presión. Al tender a cero el tamaño del elemento, Δ_x, Δ_y y Δ_z también tienden a cero y el elemento tiende al punto (x, y, z). En el límite:

$$\rho\mathbf{g} = \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0} \left[\frac{P|_{x+\Delta x} - P|_x}{\Delta x}\mathbf{e}_x + \frac{P|_{y+\Delta y} - P|_y}{\Delta y}\mathbf{e}_y + \frac{P|_{z+\Delta z} - P|_z}{\Delta z}\mathbf{e}_z \right]$$

o

$$\rho \mathbf{g} = \frac{\partial P}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial P}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial P}{\partial z}\mathbf{e}_z \tag{2-1}$$

Al recordar la forma del gradiente, se puede escribir la ecuación (2-1) en la forma:

$$\rho \mathbf{g} = \nabla P \tag{2-2}$$

La ecuación (2-2) es la ecuación básica de la estática de fluidos y establece que la máxima rapidez de cambio de la presión ocurre en la dirección del vector gravitación. Además, ya que las isolíneas son perpendiculares al gradiente, las líneas de presión constante son perpendiculares al vector gravitación. La variación de presión de un punto a otro se puede obtener integrando la ecuación (2-2).

EJEMPLO 1

El manómetro, instrumento que se utiliza para medir la presión, puede analizarse a partir del estudio previo. El tipo de manómetro más sencillo es el de tubo U, que aparece en la figura 2-2.

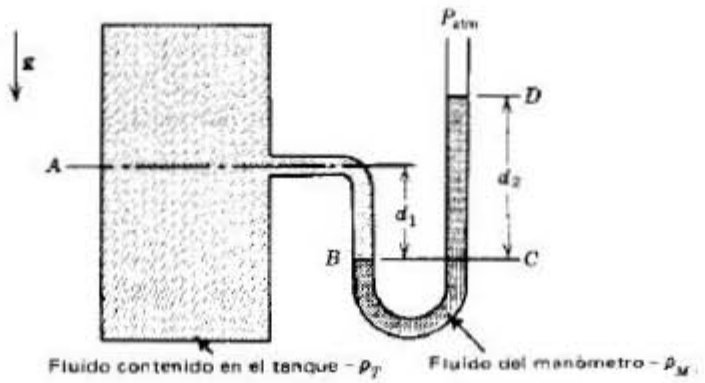


Figura 2.2 Un manómetro de tubo U.

Se va a medir la presión del tanque en el punto A. El fluido del tanque llega al manómetro hasta el punto B. Si escogemos el eje y en la dirección marcada en la figura, observamos que la ecuación (2-2) se convierte en:

$$\frac{dP}{dy}\mathbf{e}_y = -\rho g \mathbf{e}_y$$

Si se integra en el fluido del manómetro entre los puntos C y D, se obtendrá

$$P_{atm} - P_C = \quad \rho_m g d_2$$

y después integrando entre los puntos B y A que se encuentran en el tanque de fluido, resultará:

$$P_A - P_B = -\rho_T g d_1$$

Ya que el principio de Pascal establece que la presión en un mismo fluido en reposo es la misma en todos los puntos que tenga la misma elevación, podemos combinar la ecuación anterior para obtener:

$$P_A - P_{atm} = \rho_m g d_2 - \rho_T g d_1$$

El manómetro de tubo U mide la diferencia que existe entre las presiones absoluta y atmosférica. Esta diferencia se denomina *presión manométrica* y con frecuencia se utiliza en la medición de presiones.

EJEMPLO 2

En la estática de fluidos de los gases se necesita una relación entre la presión y la densidad para integrar la ecuación (2-2). El caso más sencillo es el del gas perfecto isotérmico, donde $P = \rho RT/M$. Aquí, R es la constante universal de los gases, M el peso molecular del gas y T la temperatura, que en este caso es constante. Escogiendo el eje y paralelo a g, se observará que la ecuación (2-2) se transforma en:

$$\frac{dP}{dy} = -\rho g = -\frac{PMg}{RT}$$

Si se separan las variables, se observará que la ecuación diferencial anterior queda:

$$\frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT} dy$$

Al integrar entre $y = 0$ (donde $P = P_{atm}$) e $y = y$ (donde la presión es P), se obtiene

$$\ln \frac{P}{P_{atm}} = -\frac{Mgy}{RT}$$

o

$$\frac{P}{P_{atm}} = \exp\left\{-\frac{Mgy}{RT}\right\}$$

En los ejemplos anteriores aparecieron en los resultados la presión atmosférica y un modelo de variación de la presión con la elevación. Ya que el desempeño de los aviones, cohetes y diversos tipos de maquinaria industrial varía con la presión, la temperatura y la densidad ambientales, se ha fijado una atmósfera estándar para poder evaluar correctamente dicho desempeño. Al nivel del mar las condiciones atmosféricas estándar son:

$$P = 29.92 \text{ in. Hg} = 2116.2 \text{ lb}_f/\text{ft}^2 = 14.696 \text{ lb}_f/\text{in.}^2 = 101\,325 \text{ N/m}^2$$

$$T = 519°\text{R} = 59°\text{F} = 288 \text{ K}$$

$$\rho = 0.07651 \text{ lb}_m/\text{ft}^3 = 0.002378 \text{ slug/ft}^3 = 1.226 \text{ kg/m}^3$$

En el Apéndice G* aparece una tabla de las propiedades atmosféricas estándar en función de la altitud.

2.2 ACELERACION RECTILINEA UNIFORME

En el caso en el que el sistema de coordenadas xyz que aparece en la figura 2.1 no sea inercial, la ecuación (2-2) no será válida. En el caso de la aceleración rectilínea uniforme; sin embargo, el fluido se encontrará en reposo con respecto al sistema acelerado de coordenadas. Si se tiene una aceleración constante se podrá aplicar el mismo análisis que en el caso del sistema inercial de coordenada, excepto porque $\Sigma \mathbf{F} = m\,\mathbf{a} = \rho \Delta x \Delta y \Delta z\,\mathbf{a}$, como lo estipula la segunda ley de Newton del movimiento. El resultado será:

$$\nabla P = \rho(\mathbf{g} - \mathbf{a}) . \tag{2-3}$$

La máxima rapidez de cambio de la presión se encuentra ahora en la dirección $\mathbf{g}-\mathbf{a}$ y las líneas de presión constante son perpendiculares a $\mathbf{g}-\mathbf{a}$.

La variación de la presión de un punto a otro se obtiene integrando la ecuación (2-3).

EJEMPLO 3

En la figura (2-3) aparece un tanque con combustible. Si se aplica al tanque una aceleración constante hacia la derecha ¿Cuál será la presión en el punto B? De la ecuación (2-3) se deduce que el gradiente de la presión está en la dirección $\mathbf{g}-\mathbf{a}$ por lo tanto la superficie del fluido será perpendicular a esta dirección.

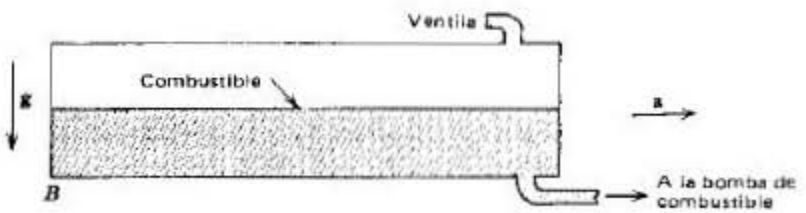


Figura 2.3 Tanque de combustible en reposo

*Estas condiciones estándar de desempeño al nivel del mar no deben confundirse con las condiciones estándar de la ley de los gases, de: $P = 29.92$ in. Hg $= 14.696$ lb/in$^2 = 101\,325$ Pa; $T = 492°$ R $= 32°$ F $= 273°$k.

Escogiendo el eje y de tal manera que quede paralelo a g−a se observa que la ecuación (2-3) se puede integrar entre el punto B y la superficie. El gradiente de la presión se convierte en dP/dy e y, seleccionando el eje y paralelo a g−a como puede verse en la figura 2.4. Así:

$$\frac{dP}{dy}\mathbf{e}_y = -\rho|\mathbf{g}-\mathbf{a}|\mathbf{e}_y = -\rho\sqrt{g^2+a^2}\,\mathbf{e}_y$$

La integración entre los puntos $y = 0$ e $y = d$, da:

$$P_{atm} - P_B = \rho\sqrt{g^2+a^2}(-d)$$

o

$$P_B - P_{atm} = \rho\sqrt{g^2+a^2}(d)$$

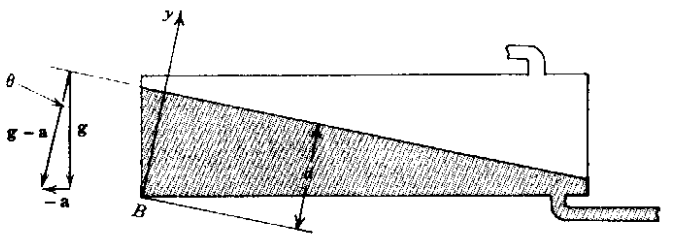


Figura 2.4 Tanque de combustible uniformemente acelerado

La profundidad del fluido d, en el punto B, se determina a partir de la geometría del tanque y del ángulo θ.

2.3 FUERZAS SOBRE LAS SUPERFICIES SUMERGIDAS

La determinación de las fuerzas que actúan sobre las superficies sumergidas se realiza frecuentemente en estática de fluidos. Ya que estas fuerzas se deben a la presión, se usarán las relaciones que describen la variación de la presión de un punto a otro y que se han desarrollado en secciones anteriores. La superficie plana mostrada en la figura 2.5 está inclinada formando un ángulo α con la superficie del fluido. El área del plano inclinado es A y la densidad del fluido, p.

La magnitud de la fuerza sobre el elemento dA es $P_G dA$, donde P_G es la presión manométrica ; $P_G = -\rho g y = \rho g \eta$ sen α , dando como resultado:

$$dF = \rho g \eta \sin\alpha \, dA$$

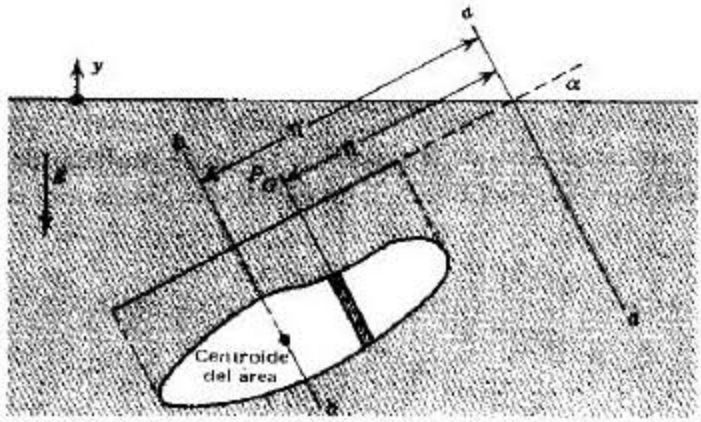


Figura 2.5 Superficie plana sumergida

Si se integra sobre la superficie de la placa, se obtiene

$$F = \rho g \operatorname{sen}\alpha \int_A \eta \, dA$$

La definición de centroide de área es:

$$\bar{\eta} \equiv \frac{1}{A} \int_A \eta \, dA$$

y por lo tanto:

$$F = \rho g \operatorname{sen}\alpha \, \bar{\eta} A \tag{2-4}$$

Por esto, la fuerza debida a la presión es igual a la presión evaluada en el centroide del área sumergida, multiplicada por el área sumergida. El punto en el que actúa esta fuerza (centro de presión) no es el centroide del área. Para encontrar el centro de presión, deberá encontrarse el punto en el que debe estar concentrada la fuerza total ejercida sobre la placa para producir el mismo momento que la presión distribuida, o sea:

$$F\eta_{c.p.} = \int_A \eta P_G \, dA$$

Substituyendo la presión, queda:

$$F\eta_{c.p.} = \int_A \rho g \sin\alpha \, \eta^2 \, dA$$

y como $F = \rho g \operatorname{sen} \alpha \bar{\eta} A$, se tiene:

$$\eta_{c.p.} = \frac{1}{A\bar{\eta}} \int_A \eta^2 \, dA = \frac{I_{aa}}{A\bar{\eta}} \tag{2-5}$$

El momento del área cerca de la superficie se puede trasladar de un eje *aa* localizado en la superficie del fluido, a un eje *bb* que pase por el centroide, por medio de:

$$I_{aa} = I_{bb} + \bar{\eta}^2 A$$

y así:

$$\eta_{c.p.} - \bar{\eta} = \frac{I_{bb}}{A\bar{\eta}} \tag{2-6}$$

El centro de presión se encuentra bajo el centroide a una distancia

EJEMPLO 4

Se va a colocar una ventana circular de observación a 1.5 ft. bajo la superficie de un tanque tal como aparecen en la figura 2.6. Encuentre la magnitud y la localización de la fuerza que actúa sobre la ventana.

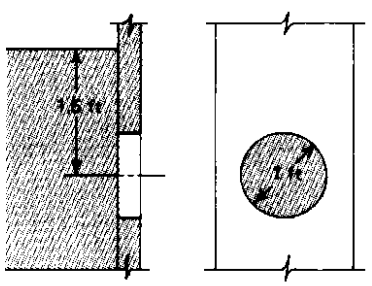


Figura 2.6 Ventana sumergida

SOLUCION

La fuerza que actúa sobre la ventana es:

$$F = \rho g \operatorname{sen} \alpha \, A\bar{\eta}$$

donde:

$$\alpha = \pi/2 \quad \text{y} \quad \bar{\eta} = 1.5 \text{ ft};$$

la fuerza es:

$$F = \rho g A \bar{\eta} = \frac{(62.4 \text{ lb}_m/\text{ft}^3)(32.2 \text{ ft/s}^2)(\pi/4 \text{ ft}^2)(1.5 \text{ ft})}{32.2 \text{ lb}_m\text{ft/s}^2 \text{ lb}_f}$$

$$= 73.5 \text{ lb}_f (327 \text{ N})$$

EJEMPLO 5

Se ha ido almacenando el agua de lluvia detrás del muro de concentración que aparece en la figura 2.7. Si la tierra saturada con agua (gravedad específica 2.2) actúa como fluido, determine la fuerza y el centro de presión en una porción de un metro de la pared.

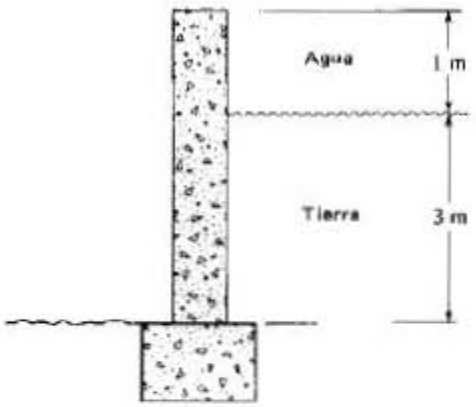


Figura 2.7 Muro de contención

SOLUCION

La fuerza ejercida sobre la pared se obtiene integrando la presión. Tomando el origen en la parte superior de la pared, la fuerza de la presión es:

$$F = \int (P - P_{atm})(1)\, dy$$

de manera que:

$$F = \int_0^{-4} y\rho g(1)\, dy = \rho_{H_2O} g\left[\int_0^{-1} y\, dy + 2.2\int_{-1}^{-4} y\, dy\right]$$

$$F = (1000\ \text{kg/m}^3)(9.807\ \text{m/s}^2)(1\ \text{m})(17\ \text{m}^2) = 166\,700\ \text{N}\ (37\,480\ \text{lb}_f)$$

El centro de presión de la pared se obtiene tomando los momentos cercanos a la parte superior de la pared.

$$Fy_{c.p.} = \int_0^{-4} y^2\rho g(1)\, dy = \rho_{H_2O} g\left[\int_0^{-1} y^2\, dy + 2.2\int_{-1}^{-4} y^2\, dy\right]$$

$$y_{c.p.} = \left(\frac{1}{166\,700\ \text{N}}\right)(1000\ \text{kg/m}^3)(9.807\ \text{m/s}^2)(1\ \text{m})(-47.27\ \text{m}^3) = -2.78\ \text{m}\ (-9.12\ \text{ft})$$

Se puede encontrar la fuerza que actúa sobre una superficie curva sumergida a partir del conocimiento que se tiene acerca de la fuerza sobre una superficie plana y de las leyes de la estática. Estudiemos la superficie curva *BC*, de la figura 2.8.

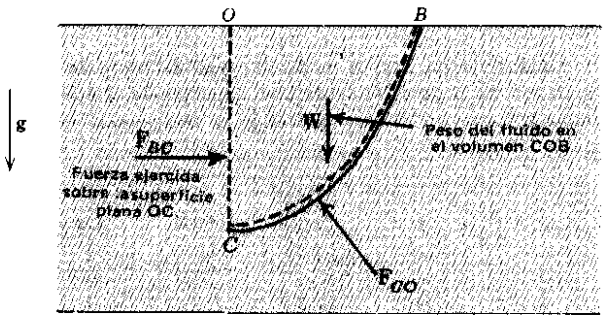


Figura 2.8 Superficie curva sumergida

La fuerza que ejerce la placa curva sobre el cuerpo *BCO* se puede calcular, teniendo en cuenta el equilibrio del cuerpo ficticio *BCO*. Ya que $\sum \mathbf{F} = 0$, se tiene:

$$\mathbf{F}_{CB} = -\mathbf{W} - \mathbf{F}_{CO} \tag{2-7}$$

La fuerza del líquido sobre la placa curva es el negativo de la expresión anterior, o sea: $\mathbf{W} + \mathbf{F}_{CO}$. Por lo tanto, la fuerza ejercida sobre una superficie curva sumergida puede obtenerse a partir del peso sobre el volumen *BCO* y la fuerza ejercida sobre una superficie plana sumergida.

2.4 FLOTACION

El cuerpo de la figura 2.9 se sumerge en un fluido cuya densidad es ρ. La fuerza resultante, **F** mantiene al cuerpo en equilibrio.

Existen fuerzas debidas a la gravedad y a la presión que están actuando sobre el elemento de volumen $h\ dA$. La componente en y de la fuerza debida a la presión sobre la parte superior del elemento es $-P_2\ dS_2 \cos\alpha\, \mathbf{e}_y$, donde α es el ángulo formado entre el plano del elemento dS_2 y el plano xz. El producto $\mathbf{dS}_2 \cos\alpha$ es, entonces, la proyección de dS_2 sobre el plano xz, o simplemente, dA. La fuerza neta causada por la presión sobre el elemento, es: $(P_1 - P_2)\ dA\ \mathbf{e}_y$, y la fuerza resultante ejercida sobre el elemento es:

$$d\mathbf{F} = (P_1 - P_2)\ dA\ \mathbf{e}_y - \rho_B g h\ dA\ \mathbf{e}_y$$

donde ρ_B es la densidad del cuerpo. La diferencia de presión $P_1 - P_2$ se puede expresar como $\rho g h$, entonces:

$$d\mathbf{F} = (\rho - \rho_B) g h\ dA\ \mathbf{e}_y \tag{2-8}$$

La integración sobre el volumen del cuerpo, suponiendo que las densidades son constantes, da como resultado:

$$\mathbf{F} = (\rho - \rho_B) g V \mathbf{e}_y \tag{2-8}$$

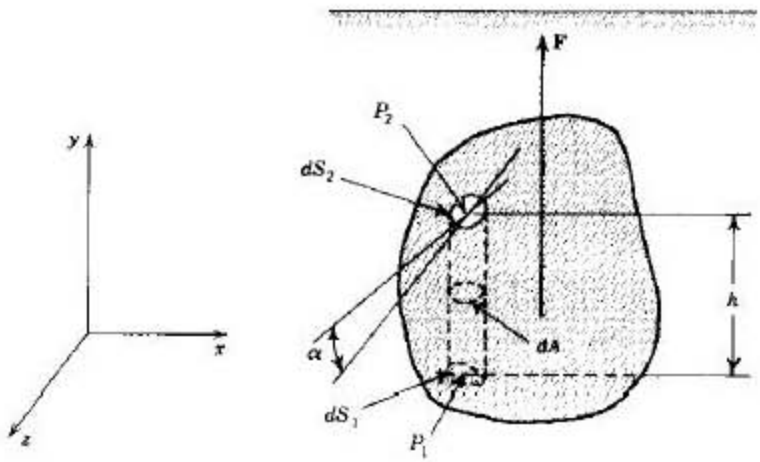


Figura 2.9 Fuerzas que actúan en un volumen sumergido

donde V es el volumen del cuerpo. La fuerza resultante, F, está formada por dos partes: el peso $-\rho_B g V \mathbf{e}_y$ y la fuerza boyante $\rho g V \mathbf{e}_y$. El cuerpo sufre la acción de una fuerza hacia arriba igual al peso del fluido desplazado. Este es el conocido principio de Arquímedes. Cuando $\rho > \rho_B$, la fuerza resultante hará que el cuerpo flote en la superficie. En el caso de un cuerpo que está flotando, la fuerza boyante es $\rho g V_s \mathbf{e}_y$, donde V_s es el volumen sumergido.

EJEMPLO 6

Un cubo de 1 ft por lado se encuentra sumergido de tal manera que su cara superior está a 10 ft bajo la superficie libre del agua. Determínese la magnitud y dirección de la fuerza necesaria para mantener el cubo en esta posición, si dicho cubo está hecho de:

(a) corcho ($\rho = 10\ \text{lb}_m/\text{ft}^3$)
(b) acero ($\rho = 490\ \text{lb}_m/\text{ft}^3$)

Las fuerzas debidas a la presión se cancelan en todas las superficies laterales del cubo, pero las que actúan en las caras superior e inferior no se cancelan porque éstas se encuentran a diferentes profundidades.

Sumando las fuerzas que actúan en dirección vertical, se obtiene:

$$\sum F_y = -W + P(1)|_{\text{sup. inferior}} - P(1)|_{\text{sup. superior}} + F_y = 0$$

donde F_y es la fuerza adicional requerida para mantener en posición al cubo.

Expresando cada una de las presiones en la forma $P_{atm} + \rho_m g h$, y W como $\rho_s g V$, se obtiene, para el equilibrio de nuestras fuerzas,

$$-\rho_c g V + \rho_w g\,(11\text{ ft})(1\text{ ft}^2) - \rho_w g\,(10\text{ ft})(1\text{ ft}^2) + F_y = 0$$

Se ve que el primer término es una fuerza boyante igual al peso del agua desplazada.

Finalmente, resolviendo la ecuación para F_y, se obtiene:

$$F_y = -\rho_w g[(11)(1) - 10(1)] + \rho_c g V = -\rho_w g V + \rho_c g V$$

(a) $\rho_c = 10\ \text{lb}_m/\text{ft}^3$

$$F_y = -\frac{(62.4\ \text{lb}_m/\text{ft}^3)(32.2\ \text{ft/s}^2)(1\ \text{ft}^3)}{32.2\ \text{lb}_m\text{ft/s}^2\ \text{lb}_f} + \frac{(10\ \text{lb}_m\text{ft}^3)(32.2\ \text{ft/s}^2)(1\ \text{ft}^3)}{32.2\ \text{lb}_m\ \text{ft/s}^2\ \text{lb}_f}$$

$$= -52.4\ \text{lb}_f\ \text{(hacia abajo)}\ (-233\ \text{N})$$

(b) $\rho_c = 490\ \text{lb}_m/\text{ft}^3$

$$F_y = -\frac{(62.4\ \text{lb}_m/\text{ft}^3)(32.2\ \text{ft/s}^2)(1\ \text{ft}^3)}{32.2\ \text{lb}_m\ \text{ft/s}^2\ \text{lb}_f} + \frac{(490\ \text{lb}_m/\text{ft}^3)(32.2\ \text{ft/s}^2)(1\ \text{ft}^3)}{32.2\ \text{lb}_m\ \text{ft/s}^2\ \text{lb}_f}$$

$$= +427.6\ \text{lb}_f\ \text{(hacia arriba)}\ (1902\ \text{N})$$

En el caso (a), la fuerza boyante fue mayor que el peso del cubo, de manera que, para mantenerlo sumergido a 10 ft bajo la superficie, se requirió una fuerza hacia abajo mayor de 52 lb. En el segundo caso, el peso fue superior a la fuerza boyante y se necesitó una fuerza que actuara hacia arriba.

2.5 CONCLUSION

En esta capítulo hemos examinado el funcionamiento de la estática de fluidos. La aplicación de las leyes de Newton del movimiento llevó a la descripción de la variación de presión en un fluido, de un punto a otro, a partir de la cual se obtuvieron relaciones de fuerza. Se han estudiado aplicaciones específicas, incluyendo los manómetros, las fuerzas en un plano, las superficies curvas sumergidas y la flotación de los objetos susceptibles de flotar.

Los análisis estáticos que se han realizado se verán después como casos especiales de relaciones más generales que rigen el comportamiento de los fluidos. Nuestra próxima tarea será examinar el comportamiento de los fluidos en movimiento y describir el efecto de dicho movimiento.

Se necesitarán otras leyes fundamentales además de las de Newton para este análisis.

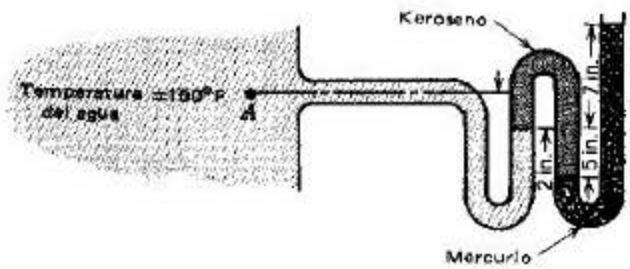
PROBLEMAS

2.1 ¿Cuál sería la altura de la atmósfera si fuera incompresible? Utilice condiciones estándar para determinar la densidad del aire.

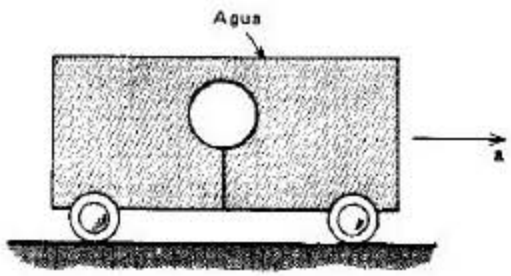
2.2 El módulo global, β, de una substancia, está dado por $\beta = dP/(d\rho/\rho)$. Calcule β correspondiente a un gas perfecto.

2.3 En el agua, el módulo β, definido en el problema 2.2 es casi constante y tiene un valor de 300,000 psi. Determine el porcentaje de cambio de volumen en el agua debido a una presión de 2000 psi.

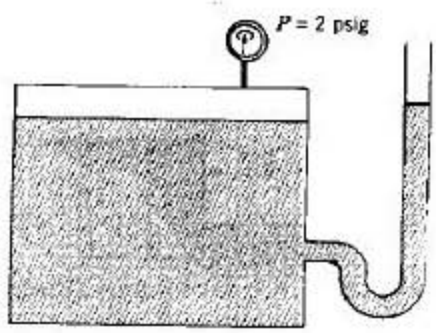
2.4 Encuentre la presión en el punto A



2.5 El carro que aparece en la figura está uniformemente acelerado hacia la derecha. ¿Hacia dónde se moverá el globo con relación al carro?



2.6 El tanque está uniformemente acelerado hacia arriba. ¿Subirá o bajará el nivel del manómetro?

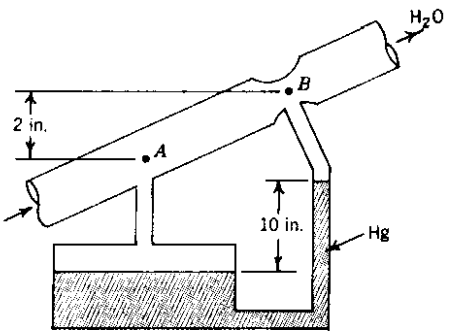


2.7 Se van a instalar en un acuario ventanas de vidrio para poder observar los peces. Cada ventana será de 0.6 m de diámetro y estará centrada a 2m por debajo del nivel del agua. Encuentre la fuerza que actúa sobre la ventana y diga en qué lugar actúa.

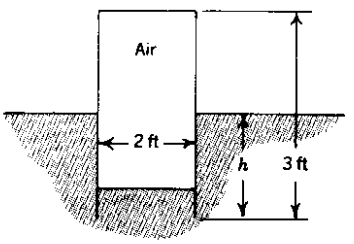
2.8 Cierto día la presión barométrica al nivel del mar es de 30.1 in de Hg, y la temperatura es de 70° F. El manómetro de un avión en vuelo indica

que hay una presión de 10.6 psia y la lectura del termómetro es 46° F. Calcule, lo más exactamente posible, la altitud del avión sobre el nivel del mar.

2.9 Se utiliza un manómetro diferencial para medir el cambio de presión ocasionado por una reducción de flujo en el sistema de tubos que aparece en la figura. Determine la diferencia de presión entre los puntos *A* y *B* en libras por pulgada cuadrada. ¿Cuál sección tiene la presión más alta?

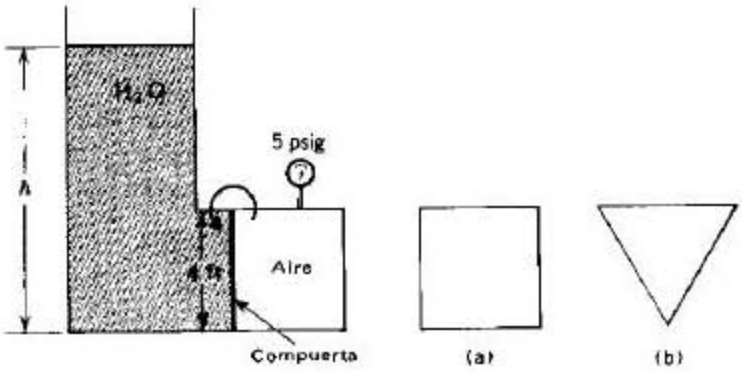


2.10 El extremo abierto de un tanque cilíndrico de 2 ft de diámetro y 3 ft de altura está sumergido en agua, como puede verse en la figura. Si el tanque pesa 250 lb, ¿a qué profundidad, *h*, se sumergirá el tanque? La presión barométrica local es de 14.7 psia. Se despreciará el grosor de la pared del tanque. ¿Qué fuerza adicional se requiere para que la parte superior del tanque quede al mismo nivel que la superficie del agua?

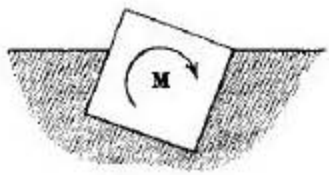


2.11 En el problema anterior, 2.10, encuentre la profundidad a la cual la fuerza neta sobre el tanque es nula.

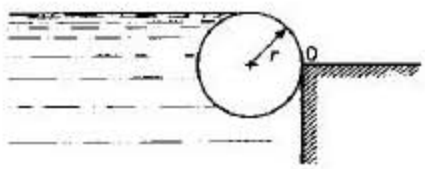
2.12 Encuentre el valor mínimo de *h* para el cual la compuerta que se ve en la figura girará en dirección contraria a las manecillas del reloj, si la sección transversal de la compuerta es (a) rectangular, de 4 ft × 4 ft; (b) triangular, de 4 ft de base × 4 ft de altura. Desprecie la fricción.



2.13 Un trozo cúbico de madera cuyo perímetro tiene una longitud L, flota en agua. La gravedad específica de la madera es de 0.90. ¿Qué momento M se requiere para sostener al cubo en la posición que se ve en la figura? La arista derecha del cubo está al nivel del agua.

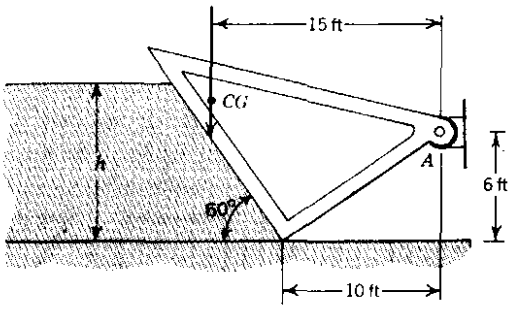


2.14 Se va a usar un tronco circular como barrera, en la forma que muestra la figura. Si el punto de contacto es O, determine la densidad que debe tener el tronco.

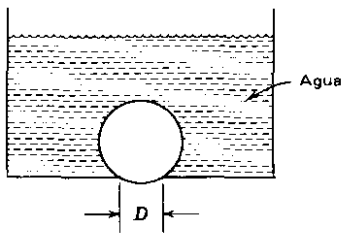


2.15 Un cubo rectangular de concreto de 4 ft × 4 ft × 6 in tiene su lado de 6 in semi enterrado en el fondo de un lago de 23 pies de profundidad. ¿Cuál es la fuerza que se necesita para liberar al cubo del fondo? ¿Qué fuerza se requiere para mantener el bloque en esta posición? (El concreto pesa 150 lb/ft^3)

2.16 La compuerta del vertedor de una presa contiene agua con una profundidad h. La compuerta pesa 500 lb/ft y tiene una bisagra en A. ¿A qué profundidad del agua subirá la compuerta permitiendo la salidad del agua?



2.17 Se desea utilizar una pelota de playa de 0.75 m de diámetro para tapar el desagüe de una piscina. Obtenga una expresión que relacione el diámetro, D, del desagüe y la altura mínima, h, del agua para la cual la pelota permanezca en su lugar.



2.18 Si la densidad del agua de mar se logra calcular aproximadamente por medio de la ecuación de estado $\rho = \rho_0 \exp[(p - p_{atm})/\beta)]$, donde β es la compresibilidad, determínese la presión y la densidad en un punto localizado a 30,000 ft bajo la superficie del mar. Suponga que $\beta = 300{,}000$ psi.

2.19 El cambio en la densidad debido a la temperatura hace que las velocidades de despegue y aterrizaje de los vehículos aéreos y más pesados que el aire aumenten en proporción al cuadrado de la temperatura ¿Qué efecto tienen los cambios de densidad inducidos por la temperatura sobre la potencia de despegue de los vehículos rígidos más ligeros que el aire?

2.20 Encuéntrese una expresión que corresponda a la fuerza boyante que actúa sobre un objeto sumergido en un fluido que tiene una densidad $\rho = \rho(y)$.

2.21 La materia es atraída hacia el centro de la tierra con una fuerza proporcional a su distancia radial del centro. Usando el valor conocido de g en la superficie, donde el radio es de 6,330 km, calcule la presión en el centro de la tierra, suponiendo que el material se comporta como un líquido y que la gravedad media específica es 5.67 (para comodidad se puede considerar un tubo de diámetro constante en lugar de un segmento esférico). Obténgase primero una fórmula en símbolos antes de substituir valores numéricos.

2.22 Un muro de contención a prueba de agua, de 22 ft de altura, sirve de dique para un trabajo de construcción. Los 12 ft superiores que se encuentran detrás del muro consisten en agua de mar, cuya densidad es de 2 slugs/ft^3 pero los 10 ft inferiores están formados por una mezcla de lodo y agua, que puede ser considerada como un fluido cuya densidad es de 4 slugs/ft^3. Calcúlese la carga horizontal total por unidad de ancho y la localización del centro de presión medido desde el fondo.

3
DESCRIPCION DE UN FLUIDO EN MOVIMIENTO

El desarrollo de una descripción analítica de un fluido en movimiento se basa en la expresión de las leyes físicas relacionadas con el flujo de fluidos, en una forma matemática apropiada. Por lo tanto, se expondrán las leyes físicas necesarias y se presentarán los métodos utilizados para describir un fluido en movimiento.

3.1 LEYES FISICAS FUNDAMENTALES

Hay tres leyes físicas fundamentales que, a excepción de los fenómenos relativistas y nucleares, se aplican a todos y cada uno de los flujos, independientemente de la naturaleza del fluido que se esté considerando. Estas leyes se encuentran en la lista que se proporciona a continuación, con las denominaciones de sus formulaciones matemáticas.

Ley	*Ecuación*
1. Ley de conservación de la masa	ecuación de continuidad
2. Segunda ley de Newton del movimiento	teorema del momento
3. Primera ley de la termodinámica	ecuación de la energía

Los tres capítulos siguientes están dedicados exclusivamente al desarrollo de una forma de estas leyes que resulte apropiada para su uso.*

Además de las leyes arriba citadas, se emplean ciertas relaciones auxiliares o secundarias en la descripción de un fluido. Estas relaciones dependen de la

*La segunda ley de la termodinámica también es fundamental para el análisis del movimiento de los fluidos, pero su consideración analítica está más allá del alcance de la presente obra.

naturaleza del fluido bajo estudio. Desafortunadamente, a la mayoría de estas relaciones auxiliares también se les ha llamado "leyes". Ya en nuestros estudios anteriores nos hemos topado con las leyes de Hooke, con la ley de los gases ideales y con algunas otras, y aunque son precisas, sólo son válidas dentro de un límite restringido; su validez depende totalmente de la naturaleza del material del que se esté tratando. Así, en tanto que a algunas de las relaciones auxiliares que se utilizarán se les llamará leyes, el estudiante deberá distinguir la diferencia de alcance entre las leyes físicas fundamentales y las relaciones auxiliares.

3.2 CAMPOS DE FLUJO DE FLUIDOS: REPRESENTACIONES LAGRANGIANA Y EULERIANA

El término *campo* se refiere a una cantidad definida como función, tanto de la posición, como del tiempo, en una región dada. Existen dos formas diferentes de representar campos en la mecánica de fluidos: la representación de *Lagrange* y la de *Euler*. La diferencia entre ambos enfoques está en la forma de identificar la posición en el campo.

En el enfoque Lagrangiano se describen las variables físicas para un elemento particular de dicho fluido al moverse a lo largo del flujo. Esta es la notación con la que estamos familiarizados en dinámica de partículas y de cuerpos rígidos. En la representación Lagrangiana, las coordenadas (x, y, z) son variables dependientes. El elemento de fluido se identifica por medio de su posición en el campo en un tiempo arbitrario, usualmente $t = 0$. El campo de velocidad en este caso, se escribe en forma funcional, de la siguiente manera:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(a, b, c, t) \tag{3-1}$$

donde las coordenadas (a, b, c) se refieren a la posición *inicial* del elemento de fluido. Las otras variables de flujo de fluido, siendo función de las mismas coordenadas, se pueden representar de modo semejante. La notación Lagrangiana se utiliza rara vez en mecánica de fluidos ya que el tiempo de información deseado es usualmente el valor de una variable particular del fluido en un punto fijo de éste y no el valor de una variable experimentado por un elemento de fluido a lo largo de su trayectoria. Por ejemplo: La determinación de la fuerza ejercida sobre un campo estacionario en un campo de flujo, requiere del conocimiento de la presión y el esfuerzo cortante en todos los puntos del cuerpo. La representación Euleriana proporciona este tipo de información.

El enfoque Euleriano nos da el valor de la variable de un fluido en un punto y en un tiempo determinados. El campo de velocidad, en forma funcional, se escribe de la siguiente manera:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t) \tag{3-2}$$

donde x, y, z, t, son *todas ellas* variables independientes. En un punto particular (x_1, y_1, z_1) y en un tiempo t_1, la ecuación (3-2) nos proporciona la velocidad del fluido en ese lugar en el tiempo t_1. En este texto se utilizará exclusivamente la notación Euleriana.

3.3 FLUJOS PERMANENTES Y NO PERMANENTES

Al adoptar la notación Euleriana se percata uno de que, en general, el flujo del fluido será una función de las cuatro variables independientes (x, y, z, t).

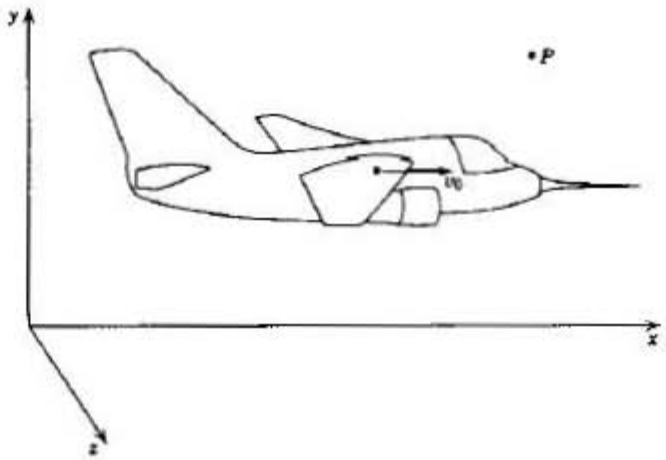


Figura 3.1 Flujo variable con respecto a un sistema fijo de coordenadas.

Si el flujo en todos los puntos del fluido es independiente del tiempo, se le llama *flujo permanente*. Si el flujo en un punto varía con el tiempo se le llama *flujo no permanete*. En algunos casos es posible reducir un flujo no permanente a flujo permanente cambiando el marco de referencia. Tómese como ejemplo un aeroplano que vuela con una velocidad constante v_0, como puede verse en la figura 3.1. Cuando se le observa desde el sistema fijo de coordenadas x, y, z, el patrón de flujo es no permanente. El flujo en el punto P, que se ilustra, por ejemplo, variará al aproximársele un vehículo.

Ahora consideremos la misma situación cuando se le observa desde el sistema de coordenadas x', y', z', el cual se mueve con una velocidad constante v_0, como se muestra en la figura 3.2.

Ahora las condiciones de flujo son independientes del tiempo en todos los puntos del campo de flujo y así, el flujo es permanente cuando se le observa desde el sistema de coordenadas en movimiento. Siempre que un cuerpo se mueve a través de un fluido con una velocidad constante, el campo de flujo, puede transformarse de flujo no permanente en flujo permanente, seleccionando un sistema de coordenadas que se encuentre fijo con respecto al cuerpo en movimiento.

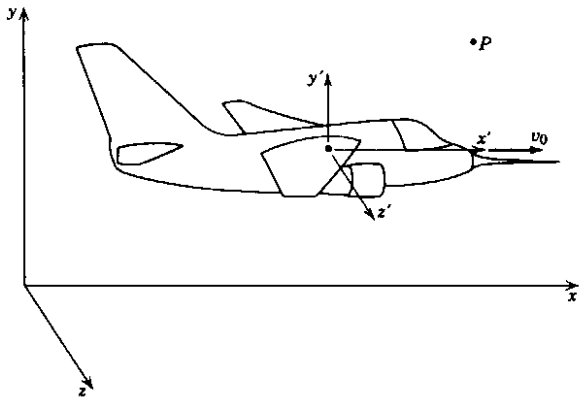


Figura 3.2 Flujo constante con respecto a un sistema de coordenadas en movimiento.

En las pruebas de modelos que se realizan en el túnel del viento, se utiliza este concepto. Los datos obtenidos en relación con un modelo estático en un fluido en movimiento serán los mismos que los de un modelo móvil en un fluido estático. Las simplificaciones físicas, así como las analíticas que esta transformación logra, son considerables. Se utilizará esta transformación cuando sea posible.

3.4 LINEAS DE CORRIENTE

Un concepto muy útil para describir el movimiento de un fluido es el de *línea de corriente*. Esta se define como la tangente al vector velocidad en cada uno de los puntos del campo de flujo. La figura 3.3 muestra el patrón de líneas de corriente para un flujo ideal que pasa por un objeto cuya figura se asemeja a la de un balón de futbol. En un flujo permanente, ya que todos los vectores velocidad no varían con el tiempo, la trayectoria de una partícula del fluido sigue una línea de corriente, por lo tanto, una línea de corriente es

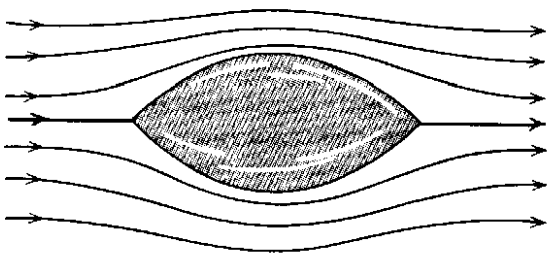


Figura 3.3 Ejemplo de líneas de flujo.

la trayectoria de un elemento de fluido en la situación descrita. En un flujo no permanente, los patrones que siguen las líneas de corriente cambian de un instante a otro. Así, la trayectoria de un elemento de fluido será diferente de la de una línea de corriente en cualquier momento dado. La trayectoria real de un elemento de fluido al moverse a lo largo del flujo se denomina *línea de trayectoria*.

Obviamente, las líneas de trayectoria y las líneas de corriente coinciden únicamente en los flujos permanentes.

Las líneas de corriente son útiles para relacionar las componentes de la velocidad del fluido con la geometría del campo de flujo. En un flujo bidimensional, la relación es:

$$\frac{v_y}{v_x} = \frac{dy}{dx} \tag{3-3}$$

ya que la línea de corriente es tangente al vector velocidad y sus componentes en x y en y son v_x y v_y. En tres dimensiones resulta esta relación:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} \tag{3-4}$$

La utilidad de las relaciones anteriores es la obtención de una relación analítica entre las componentes de la velocidad y las del patrón de líneas de corriente.

3.5 SISTEMAS Y VOLUMENES DE CONTROL

Las tres leyes físicas básicas enunciadas en la sección 3.1 se definen en términos de un *sistema*. Un sistema se define como una porción de materia cuya identidad permanece fija. Las leyes básicas establecen la interacción de un sistema con sus alrededores. La selección del sistema para la aplicación de estas leyes es muy flexible y, en algunos casos, representa un problema complejo. Cualquier análisis que se realice utilizando una ley fundamental debe estar de acuerdo con la designación de un sistema específico y la dificultad para encontrar la solución varía enormemente con relación al sistema escogido.

Como ejemplo, analícese la segunda ley de Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Los términos que ésta incluye son los siguientes:

$\mathbf{F}$ = fuerza resultante ejercida sobre el sistema por los alrededores.
m = masa del sistema.
$\mathbf{a}$ = aceleración del centro de masa del sistema.

En el sistema, que consta de un pistón y un cilindro, de la figura 3.4, un sistema conveniente para ser analizado, fácilmente identificable en virtud

de su aislamiento, es la masa de materia encerrada por el pistón dentro del cilindro.

En el caso de la tobera de la figura 3.5, el fluido que se encuentra dentro de ésta cambia cada instante. De este modo, en diferentes momentos, distintos fluidos ocupan la tobera.

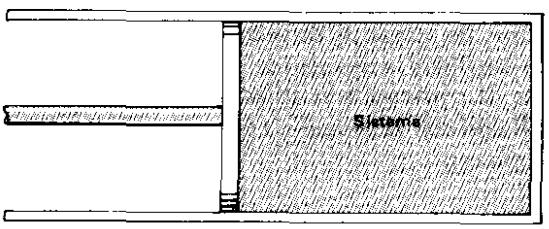


Figura 3.4 Un sistema fácilmente identificable.

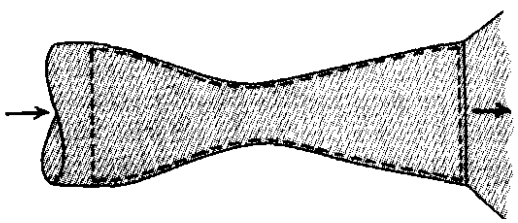


Figura 3.5 Volumen de control para el análisis de flujo a través de la tobera.

Un método más conveniente para analizar la tobera sería el de considerar la región limitada por la línea punteada. Dicha región se denomina *volumen de control.* Un volumen de control es una región del espacio a través de la cual circula un fluido.* La movilidad extrema de los fluidos convierte en un trabajo tedioso a la identificación de un sistema particular. El análisis del movimiento de un fluido se simplifica grandemente si se desarrollan las leyes físicas aplicables a un volumen de control (en el cual cambie el sistema en cada momento). El método del volumen de control salva los obstáculos para identificar el sistema. En los capítulos subsecuentes las leyes físicas fundamentales se convertirán del método del sistema al del volumen de control. El volumen de control que se seleccione puede ser tanto finito como infinitesimal. De hecho, se obtendrán las ecuaciones diferenciales de flujo de un fluido aplicando las leyes fundamentales, utilizando volúmenes de control infinitesimales.

* Un volumen de control puede permanecer fijo o moverse uniformemente (inercial), o puede estar acelerado (no inercial). Aquí se concederá la mayor importancia a los volúmenes inerciales controlados.

4
OBSERVACION DE LA MASA: ENFOQUE DE VOLUMEN DE CONTROL

La aplicación inicial de las leyes fundamentales de la mecánica de fluidos incluye la ley de la conservación de la masa. En este capítulo se obtendrá una relación integral que exprese la ley de la conservación de la masa para un volumen general de control. La relación integral obtenida se aplicará a algunas situaciones que encontraremos a menudo en el flujo de fluidos.

4.1 RELACION INTEGRAL

La ley de la conservación de la masa establece que la masa no puede ser ni creada ni destruida. Con respecto a un volumen de control, se puede enunciar la ley de la conservación de la masa en la forma siguiente:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Rapidez de flujo}\\ \text{de salida de ma-}\\ \text{sa, del volumen}\\ \text{de control}\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{l}\text{Rapidez de flujo}\\ \text{de masa al volu-}\\ \text{men de control}\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{l}\text{Rapidez de acumu-}\\ \text{lación de la masa}\\ \text{dentro del volu-}\\ \text{men de control}\end{array}\right\} = 0$$

Véase ahora el volumen general de control localizado en un campo de flujo de un fluido, que aparece en la figura 4.1.

Para el pequeño elemento de área dA que se encuentra en la superficie de control, la rapidez de flujo de salida de la masa $= (\rho v)(dA \cos \theta)$, donde $dA \cos \theta$ es la proyección del área dA en un plano normal al vector velocidad, **v**, y θ es el ángulo formado por el vector velocidad, **v** y el vector unitario normal a dA y dirigido hacia afuera, **n**.

Recordando el álgebra vectorial, reconoceremos el producto:

$$\rho v\, dA \cos \theta = \rho\, dA |\mathbf{v}|\, |\mathbf{n}| \cos \theta$$

como el producto "escalar" o "punto":

$$\rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, dA$$

que es la forma que se utilizará para designar la rapidez de flujo de salida a través de dA. El producto ρv es el flujo de masa, que a menudo se conoce como velocidad de masa, G. Físicamente, este producto representa la cantidad de masa que fluye a través de una sección transversal unitaria del área, por unidad de tiempo.

Si se integra ahora esta cantidad sobre toda la superficie de control, se tendrá:

$$\iint_{\text{c.s.}} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, dA$$

que es el flujo neto de masa, hacia afuera, a través de la superficie de control, o sea el flujo neto de salida de la masa del volumen de control.

Nótese que si la masa está entrando al volumen de control, esto es, fluyendo hacia adentro a través de la superficie de control, es negativo el producto $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = |\mathbf{v}|\,|\mathbf{n}| \cos\theta$ ya que $\theta > 90°$, y el $\cos\theta$ es, por lo tanto, negativo. Así, si la integral es:

positiva, hay un flujo neto de salida de masa;
negativa, hay un flujo neto de entrada de masa;
cero, la masa que se encuentra dentro del volumen de control es constante.

La rapidez de acumulación de masa dentro del volumen de control, se puede expresar como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\text{c.v.}} \rho\, dV$$

y la expresión integral que corresponde al equilibrio de la masa en un volumen general de control, se convierte en:

$$\iint_{\text{c.s.}} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, dA + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\text{c.v.}} \rho\, dV = 0 \qquad (4\text{-}1)$$

4.2 FORMAS ESPECIFICAS DE LA EXPRESION INTEGRAL

La ecuación (4-1) representa el equilibrio de la masa en su forma más general. Ahora se estudiarán algunas situaciones frecuentemente encontradas y en las que se puede aplicar la ecuación (4-1).

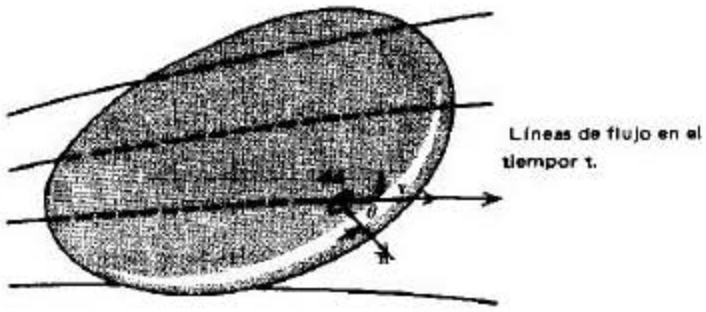


Figura 4.1 Flujo de un fluido a través de un volumen de control.

Si el flujo es permanente en relación con las coordenadas fijadas al volumen de control, el término de acumulación $\partial/\partial t \iiint_{c.v.} \rho\, dV$, será igual a cero. Esto se puede ver fácilmente cuando se recuerda que, debido a la definición de flujo permanente, las propiedades de un campo de flujo no varían en el tiempo, de ahí que la derivada parcial con respecto al tiempo sea igual a cero. Por esto, para esta situación, la forma conveniente de la expresión de continuidad es:

$$\iint_{c.s.} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, dA = 0 \tag{4-2}$$

Otro caso importante es el de un flujo incompresible donde el volumen de control está lleno de fluido. En un flujo incompresible, la densidad, ρ es constante, por lo que el término de acumulación que incluye a la derivada parcial con respecto al tiempo, es, de nuevo, igual a cero. Además, el término de la densidad que aparece en la integral de superficie, se puede cancelar. La expresión correspondiente a la conservación de la masa para un flujo incompresible de esta naturaleza, se convierte entonces, en:

$$\iint_{c.s.} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, dA = 0 \tag{4-3}$$

Los siguientes ejemplos servirán para explicar la aplicación de la ecuación (4-1) a algunos casos que se repiten con frecuencia, en la transferencia de momento.

EJEMPLO 1

Como primer ejemplo, considérese la situación ordinaria de un volumen de control para el cual los flujos de salida y entrada son permanentes y unidimensionales. Específicamente, considérese el volumen de control indicado por medio de líneas punteadas en la figura 4.2.

Se puede usar la ecuación (4-2). Como la masa atraviesa la superficie de control solamente en las posiciones (1) y (2), la expresión es:

$$\iint_{c.s.} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, dA = \iint_{A_1} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, dA + \iint_{A_2} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, dA = 0$$

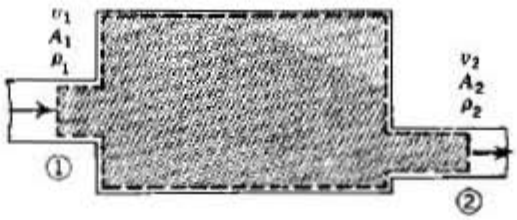


Figura 4.2 Flujo permanente unidimensional hacia adentro y hacia afuera de un volumen de control.

El valor absoluto del producto escalar, $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})$ es igual a la magnitud de la velocidad en cada una de las integrales ya que los vectores velocidad, así como los vectores normales dirigidos hacia afuera, son colineales, tanto en (1) como en (2). En (2) ambos vectores tienen el mismo sentido, por lo que este producto es positivo, como debe ser para un flujo hacia afuera de masa. En (1), donde la masa fluye hacia el volumen de control, ambos vectores tienen sentidos opuestos, por lo que el signo es negativo. Ahora se puede expresar la ecuación de continuidad en forma escalar:

$$\iint_{c.s.} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, dA = -\iint_{A_1} \rho v\, dA + \iint_{A_2} \rho v\, dA = 0$$

La integración produce el resultado:

$$\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2 \tag{4-4}$$

que nos es familiar

Al obtener la ecuación (4-4) puede verse que no se especificó la situación del flujo dentro del volumen de control. De hecho, en esto consiste la belleza del enfoque de volumen de control, en que se puede analizar el flujo que está dentro del volumen de control a partir de la información (medidas) obtenida en la superficie del volumen de control. El volumen de control de forma de ceja, que aparece en la figura 4.2, se define con propósitos analíticos; el sistema real que se encuentra contenido en esta caja podría ser tan sencillo como un tubo o tan complejo como un sistema de propulsión o una torre de destilación.

Para resolver el ejemplo 1, se supuso que existía una velocidad constante en las secciones (1) y (2). Esta situación se puede enfocar físicamente, pero el caso en que la velocidad varía en la sección transversal del área es un caso más general.

EJEMPLO 2

Estúdiese ahora el caso de un flujo incompresible para el cual el área de flujo es circular y el perfil de la velocidad es parabólico (ver la figura 4.3) y varía de acuerdo con la expresión:

$$v = v_{máx}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

donde $v_{máx}$ es la velocidad máxima que existe en el centro del conducto circular (esto es, en $r = 0$) y R es la distancia radial hacia la superficie interior del área circular bajo consideración.

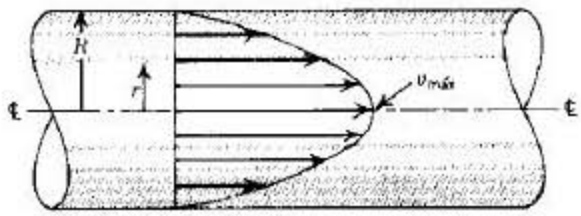


Figura 4.3 Perfil parabólico de velocidad en un conducto de flujo circular.

La expresión anterior para el perfil de velocidad se puede obtener en forma experimental. También se obtendrá teóricamente en el Capítulo 8 para el caso de un flujo laminar en un conducto circular. Esta expresión representa la velocidad a una distancia radial r, medida desde el centro de la sección de flujo. Ya que la velocidad media es de particular interés en los problemas de ingeniería, ahora se estudiará la forma de obtener la velocidad media a partir de esta expresión.

En la posición en la que existe este perfil de velocidad, la rapidez de flujo de la masa es:

$$(\rho v)_{avg} A = \iint_A \rho v \, dA$$

Para este caso del flujo incompresible la densidad es constante. Despejando la velocidad promedio tenemos:

$$\begin{aligned} v_{avg} &= \frac{1}{A} \iint_A v \, dA \\ &= \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R v_{máx} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] r \, dr \, d\theta \\ &= \frac{v_{máx}}{2} \end{aligned}$$

En los ejemplos anteriores no nos interesaba la composición de las corrientes de fluido. La ecuación (4-1) es válida para corrientes de fluido que tengan más de un constituyente así como para los constituyentes individuales separados. Esta aplicación típica es común a los procesos químicos en especial. El último ejemplo hará uso de la ley de conservación de la masa tanto para la masa total como para una substancia particular, en este caso, sal.

EJEMPLO 3

Examinemos ahora la situación que aparece en la figura 4.4. Un tanque contiene inicialmente 1,000 kg de una solución salina que contiene 10% de sal por unidad de masa. Una corriente incidente de solución salina que contiene 20% de sal por unidad de masa, fluye hacia el tanque con una rapidez de 20 kg/min. La mezcla que se encuentra dentro del tanque se mantiene uniforme agitándola. Se extrae la solución salina del tanque por medio de un tubo de salida con una rapidez de 10 kg/min. Encuéntrese la cantidad de sal que contiene el tanque en el tiempo t así como el tiempo transcurrido cuando la cantidad de sal que hay en el tanque es de 200 kg.

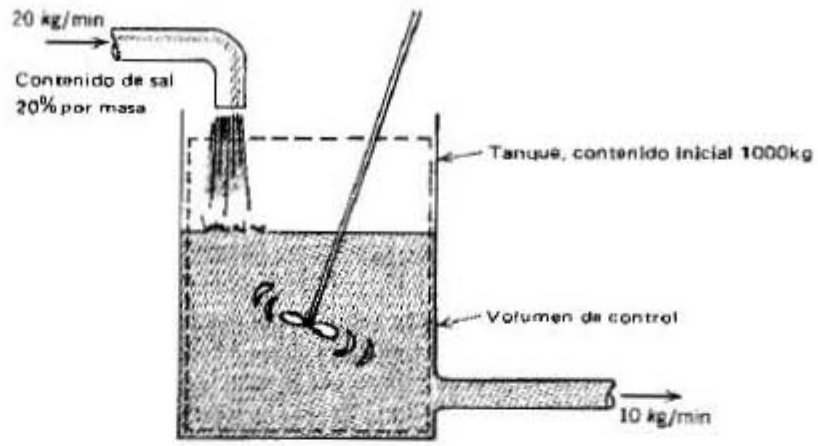


Figura 4.4 Proceso de mezclado.

Primero se aplicará la ecuación (4-1) para expresar la cantidad total de solución salina contenida en el tanque, como función del tiempo. Para el volumen de control en cuestión:

$$\iint_{c.s.} \rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dA = 10-20 = -10\text{kg/min}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{c.v.} \rho\,dV = \frac{d}{dt}\int_{1000}^{M} dM = \frac{d}{dt}(M-1000)$$

donde M es la masa total de solución salina que se encuentra en el tanque en cualquier momento. Escribiendo la ecuación completa se tendrá:

$$\iint_{c.s.} \rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dA + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{c.v.} \rho\,dV = -10+\frac{d}{dt}(M-1000) = 0$$

Separando variables y despejando a M, se obtiene:

$$M = 1000+10t \qquad \text{(kg)}$$

Ahora, sea S la cantidad de sal que hay en el tanque en cualquier momento. La concentración de sal por peso se puede expresar en la siguiente forma:

$$\frac{S}{M} = \frac{S}{1000+10t} \quad \frac{\text{kg sal}}{\text{kg solución}}$$

Usando esta definición, podemos ahora aplicar la ecuación (4-1) a la sal, obteniendo:

$$\iint_{c.s.} \rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dA = \frac{10S}{1000+10t} - (0.2)(20) \qquad \frac{\text{kg sal}}{\text{min}}$$

y

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{c.v.} \rho\,dV = \frac{d}{dt}\int_{S_0}^{S} dS = \frac{dS}{dt} \qquad \frac{\text{kg sal}}{\text{min}}$$

La expresión total es, ahora,

$$\iint_{c.s.} \rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dA+\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{c.v.}\rho\,dV=-\frac{S}{100+t}-4+\frac{dS}{dt}=0$$

Esta ecuación puede escribirse en la forma:

$$\frac{dS}{dt}+\frac{S}{100+t}=4$$

la cual se puede ver que es una ecuación diferencial lineal de primer orden. Su solución general es:

$$S=\frac{2t(200+t)}{100+t}+\frac{C}{100+t}$$

La constante de integración se puede calcular usando la condición inicial de que $S = 100$ para $t = 0$, y obtendremos $C = 10{,}000$. En esta forma, la primera parte de la respuesta, que expresa la cantidad de sal que se encuentra presente, en función del tiempo es:

$$S=\frac{10\,000+400t+2t^2}{100+t}$$

El tiempo transcurrido necesario para que S sea igual a 200 kg puede evaluarse, obteniéndose $t = 36.6$ min.

4.3 CONCLUSION

En este capítulo se ha estudiado la primera de las leyes fundamentales del flujo de fluidos: la de la conservación de la masa. Se encontró que, la expresión integral obtenida para este caso es muy general tanto en su forma como en su utilización.

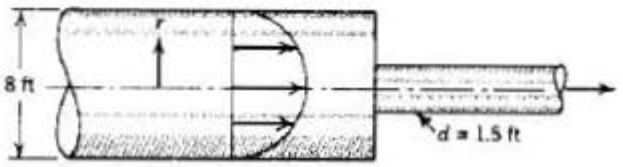
En los capítulos siguientes, se obtendrán y usarán expresiones integrales semejantes para la conservación de la energía y del momento para su volumen general de control. El estudiante deberá ahora desarrollar el hábito de empezar *siempre* con la expresión integral conveniente y calcular cada término para el problema particular que esté resolviendo. Tendrá la fuerte tentación de escribir simplemente una ecuación sin tomar en consideración cada uno de los términos en detalle. Deben vencerse estas tentaciones. Este enfoque puede parecer innecesariamente tedioso al principio, pero siempre asegurará un análisis completo del problema y evitará cualesquiera errores que podrían resultar de consideraciones tomadas con premura.

PROBLEMAS

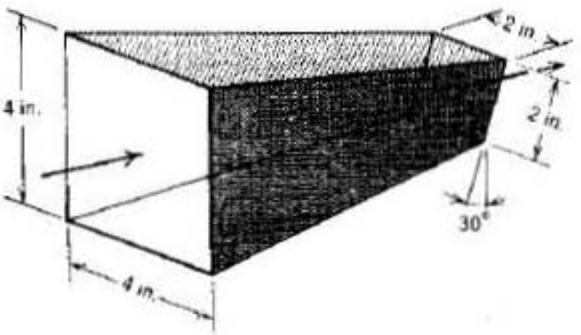
4.1 El vector velocidad en un flujo bidimensional está dado por la expresión $v = 10e_x + 2xe_y$ m/s donde x está dada en metros. Determínese la componente de la velocidad que forma un ángulo de 30° con el eje x en el punto (2,2).

4.2 Usando el vector velocidad del problema anterior, determínense: (a) la ecuación de la línea de corriente que pasa por el punto (2,1); (b) el volumen de flujo que atraviesa la superficie plana que conecta los puntos (1,0) y (2,2).

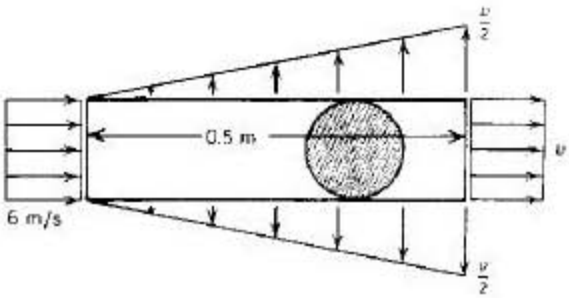
4.3 Está fluyendo agua a través de un conducto circular, con un perfil de velocidad dado por la ecuación $v = 6(1 - r^2/16)$ fps. ¿Cuál es la velocidad promedio del agua en el tubo de 1.5 ft?



4.4 Entra agua en un canal cuadrado de 4 in con una velocidad de 10 fps, como puede apreciarse en la figura. El canal converge hasta convertirse en una configuración cuadrada, como se ve en el extremo de descargas. La sección de salida está cortada a 30° de la vertical, como aparece en la figura, pero la velocidad media del agua que sale permanece horizontal. Encuéntrese la velocidad media de salida del agua así como la rapidez total de flujo.



4.5 Está entrando agua por un extremo de un tubo perforado de 0.2 m de diámetro, con una velocidad de 6 m/seg. La descarga a través de la pared del tubo se calcula por medio de un perfil lineal. Si el flujo es permanente, encuéntre la velocidad de descarga.



4.6 Se midieron las velocidades de un conducto circular de 20 in de diámetro y son:

Distancia a partir del centro (en in)	*Velocidad (en fps)*	*Distancia a partir del centro (en in)*	*Velocidad (en fps)*
0	7.5	7.75	5.47
3.16	7.10	8.37	5.10
4.45	6.75	8.94	4.50
5.48	6.42	9.49	3.82
6.33	6.15	10.00	2.40
7.07	5.81	...	...

Encuéntrense (a) la velocidad media; (b) la rapidez de flujo en pies cúbicos por segundo.

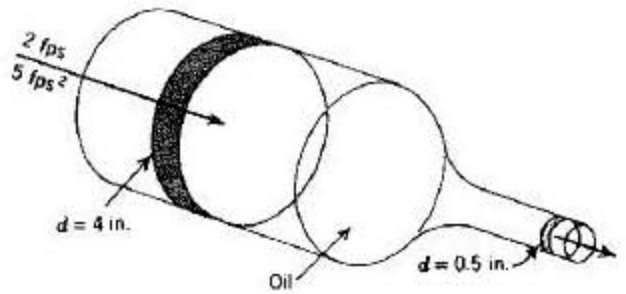
4.7 Está fluyendo agua salada que contiene 1.92 lb/gal de sal, hacia el interior de un tanque de 100 galones, que había sido llenado inicialmente con agua fresca, y la sal fluye con una rapidez constante de 2 gal/min. La densidad de la solución que está entrando es de 71.8 lb/ft. La solución, que se mantiene constante, agitándola, fluye hacia el exterior con una rapidez constante de 19.2 lb/min.

(a) ¿Cuántas libras de sal habrá en el tanque al término de una hora y 40 minutos?

(b) ¿Cuál es el límite superior del número de libras de sal contenida en el tanque si el proceso continúa en forma indefinida?

(c) ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que la cantidad de sal contenida en el tanque aumente a 100 lb a 150 lb?

4.8 En la combinación de pistón y cilindro que aparece en la figura siguiente, el pistón grande tiene una velocidad de 2 fps y una aceleración de 5 fps^2. Determine la velocidad y la aceleración del pistón más pequeño.



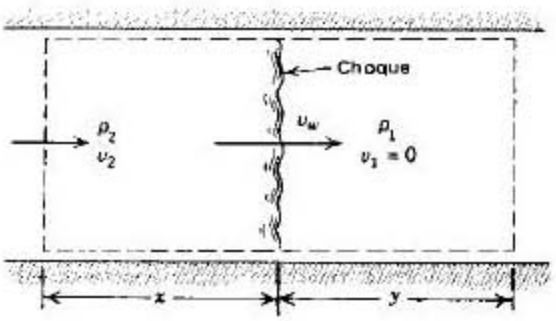
4.9 Demuestre que en un flujo permanente unidimensional, la ecuación siguiente es válida:

$$\frac{dA}{A}+\frac{dv}{v}+\frac{d\rho}{\rho}=0$$

4.10 Usando el símbolo M para la masa en el volumen de control, demuéstrese que la ecuación (4-1) puede escribirse así:

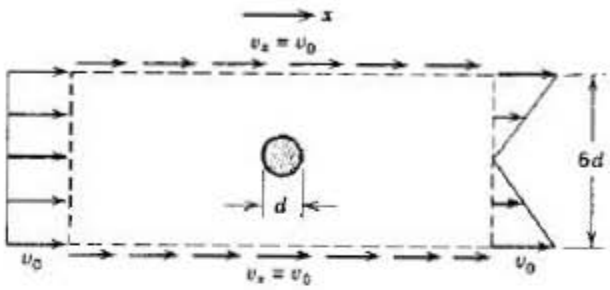
$$\frac{\partial M}{\partial t}+\iint_{cs} d\dot{m}=0$$

4.11 Una onda de choque se mueve hacia abajo en un tubo como aparece en la figura. Las propiedades del fluido cambian de un lado a otro de una onda de choque, pero no son funciones del tiempo. La velocidad del choque es v_w. Escriba la ecuación de continuidad y obtenga la relación existente entre ρ_2, ρ_1, v_2 y v_w. La masa existente en el volumen de control en cualquier momento es $M=\rho_2 Ax+\rho_1 Ay$.



4.12 El perfil de velocidad en un tubo circular $v=v_{máx}(1-r/R)1/7$ donde R es el radio del tubo. Encuéntrese la velocidad media en el tubo.

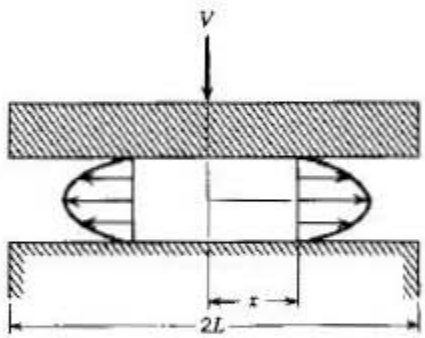
4.13 En la siguiente figura pueden verse los perfiles de la velocidad en la dirección x, correspondiente a un volumen de control que se encuentra alrededor de un cilindro. Si el flujo es incomprensible, ¿cuál deberá ser la rapidez de flujo a través de la superficie horizontal del volumen de control?



4.14 Dos placas paralelas muy largas, de longitud $2L$, se encuentran separadas por una distancia b. La placa superior se mueve hacia abajo con una velocidad constante, V. Hay un fluido en el espacio entre placas. El fluido que está entre las placas se fuerza a salir. Determine la rapidez de flujo de la masa y la velocidad máxima:

(a) Si la velocidad de salida es uniforme.

(b) Si la velocidad de salida es parabólica.



5
SEGUNDA LEY DE NEWTON DEL MOVIMIENTO: ENFOQUE DE VOLUMEN DE CONTROL

La segunda de las leyes físicas fundamentales en la que están basados los análisis del flujo de fluidos es la segunda ley de Newton del Movimiento.

Basándonos en la segunda ley de Newton, encontramos relaciones integrales tanto para el momento lineal como para el momento angular y tomaremos en cuenta las aplicaciones de estas expresiones a situaciones físicas.

5.1 RELACION INTEGRAL PARA EL MOMENTO LINEAL

La segunda ley de Newton del movimiento se puede enunciar de la siguiente manera:

La rapidez de cambio de momento de un sistema es igual a la fuerza neta que actúa sobre el sistema y ocurre en la dirección de la fuerza neta.

Desde el principio se da uno cuenta de que este enunciado se divide en dos partes muy importantes: primera, que esta ley pertenece a un sistema específico y segunda, que consta de dirección y magnitud, de manera que es una expresión vectorial. Para poder usar esta ley será necesario darle una forma nueva para poder aplicarla a un volumen de control que contenga diferentes partículas de fluido (esto es, un sistema diferente) al ser examinado en distintas ocasiones.

En la figura 5.1, observemos el volumen de control situado en un campo de flujo de un fluido. El sistema bajo estudio es el material que ocupa el volumen de control en el tiempo t, y su posición aparece, tanto en el tiempo t como en el tiempo $t + \Delta t$.

Con relación a la figura puede observarse que:

La región I está ocupada por el sistema solamente con el tiempo t.
La región II está ocupada por el sistema en el tiempo $t+\Delta t$
La región III es común al sistema en t y en $t+\Delta t$.

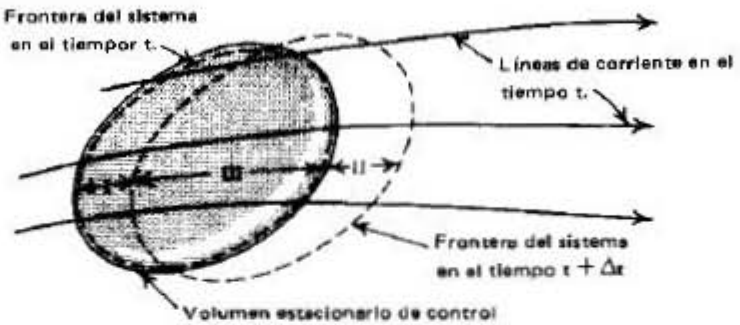


Figura 5.1 Relación entre un sistema y un volumen de control en el campo de flujo de un fluido.

Para tal situación la ley de Newton se escribiría en la forma:

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \frac{d}{dt}\mathbf{P} \tag{5-1}$$

donde los símbolos F, m y v tienen su significado usual y P representa el momento lineal total del sistema.

En el tiempo $t+\Delta t$, el momento lineal del sistema que ahora ocupa las regiones II y III se puede expresar en la forma:

$$\mathbf{P}|_{t+\Delta t} = \mathbf{P}_{\mathrm{II}}|_{t+\Delta t} + \mathbf{P}_{\mathrm{III}}|_{t+\Delta t}$$

y para el tiempo t, se tiene:

$$\mathbf{P}|_t = \mathbf{P}_{\mathrm{I}}|_t + \mathbf{P}_{\mathrm{III}}|_t$$

Restando la segunda de estas expresiones de la primera y dividiendo entre el intervalo de tiempo, Δt, se obtiene

$$\frac{\mathbf{P}|_{t+\Delta t} - \mathbf{P}|_t}{\Delta t} = \frac{\mathbf{P}_{\mathrm{II}}|_{t+\Delta t} + \mathbf{P}_{\mathrm{III}}|_{t+\Delta t} - \mathbf{P}_{\mathrm{I}}|_t - \mathbf{P}_{\mathrm{III}}|_t}{\Delta t}$$

Se puede rearreglar el lado derecho de esta expresión y tomar el límite de la ecuación resultante para obtener:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{P}|_{t+\Delta t} - \mathbf{P}|_t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{P}_{\mathrm{III}}|_{t+\Delta t} - \mathbf{P}_{\mathrm{III}}|_t}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{P}_{\mathrm{II}}|_{t+\Delta t} - \mathbf{P}_{\mathrm{I}}|_t}{\Delta t} \tag{5-2}$$

Tomando en cuenta cada uno de los procesos limitativos en forma separada, tendremos, para el lado izquierdo:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{P}|_{t+\Delta t} - \mathbf{P}|_t}{\Delta t} = \frac{d}{dt}\mathbf{P}$$

que es la forma especificada en el enunciado de la segunda ley de Newton, ecuación (5-1).
El primer límite para el lado derecho de la ecuación se puede calcular así:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{P}_{III}|_{t+\Delta t} - \mathbf{P}_{III}|_t}{\Delta t} = \frac{d}{dt}\mathbf{P}_{III}$$

Se puede observar que esta es la rapidez de cambio de momento lineal del volumen de control ya que cuando $\Delta t \to 0$, la región III se convierte en el volumen de control.

El siguiente proceso limitativo,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{P}_{II}|_{t+\Delta t} - \mathbf{P}_{I}|_t}{\Delta t}$$

expresa la rapidez neta de flujo de salida de momento a través de la superficie de control durante el intervalo Δt. Cuando Δt tiende a cero, las regiones II y I coinciden con la superficie del volumen de control.

Considerando el significado físico de cada límite en la ecuación (5-2) y la segunda ley de Newton, ecuación (5-1), se puede escribir con palabras la siguiente ecuación, para la conservación del momento lineal con respecto a un volumen de control:

Suma de las fuerzas que actúan sobre el volumen de control	=	Rapidez del momento que sale del volumen de control	−	Rapidez del momento que entra al volumen de control	+	Rapidez de acumulación de momento dentro del volumen de control

rapidez neta del flujo de salida de momento del volumen de control (5-3)

Ahora se aplicará la ecuación (5-3) a un volumen general de control situado en un campo de flujo de fluido, como puede verse en la figura 5.2 y se calcularán los diversos términos.

La fuerza total que actúa sobre el volumen de control consiste tanto en fuerzas superficiales debidas a interacciones entre el fluido del volumen de control y sus alrededores, por medio del contacto directo, como de fuerzas del

cuerpo que resultan de la localización del volumen de control en un campo de fuerzas. El campo gravitacional y su fuerza resultante son los ejemplos más comunes de este último tipo. Se designará la fuerza total que actúa sobre el volumen de control, $\sum \mathbf{F}$.

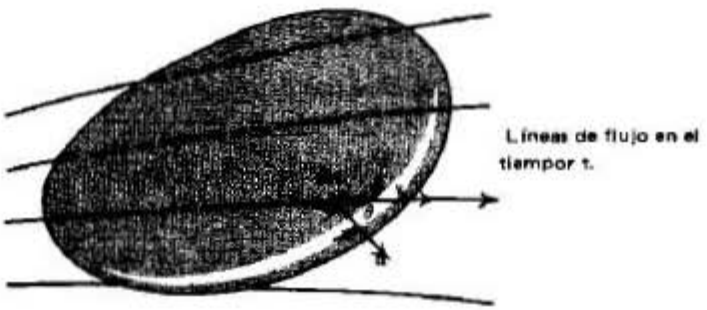


Figura 5.2 Flujo de un fluido a través de un volumen de control.

Si se toma en cuenta la pequeña área de dA que se encuentra sobre la superficie de control, se podrá escribir:

$$\text{Rapidez de flujo de salida de momento} = \mathbf{v}(\rho v)(dA \cos \theta)$$

Obsérvese que el producto $(\rho v)(dA \cos \theta)$ es la rapidez de flujo de salida de masa del volumen de control, a través de dA, como se estudió en el capítulo 4. Recuérdese, además, que $dA \cos \theta$ es el área, dA, proyectada en dirección normal al vector velocidad, v, donde θ es el ángulo formado entre v y el vector normal dirigido hacia afuera, n. Ahora se puede multiplicar la rapidez de flujo de salida de masa por v, lo que dará como resultado la rapidez de flujo de salida de momento a través de dA. Este producto puede escribirse en la forma siguiente recordando los principios del álgebra vectorial:

$$\mathbf{v}(\rho v)(dA \cos \theta) = \mathbf{v}(\rho \, dA)[|\mathbf{v}| \, |\mathbf{n}| \cos \theta]$$

El término que se encuentra dentro del paréntesis rectangular es el producto escalar o punto, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ y el flujo de salida de momento se transforma en:

$$\rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, dA$$

Si se integra esta cantidad sobre toda la superficie de control, se tendrá:

$$\iint_{c.s.} \mathbf{v}\rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, dA$$

que es el *flujo neto de salida de momento* del volumen de control.

En su forma integral el término flujo de momento mencionado arriba incluye la rapidez de momento que entra al volumen de control así como el que sale. Si está entrando masa al volumen, el signo del producto $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$, es negativo, y el flujo asociado de momento está entrando al sistema. Inversamente, el signo positivo del producto $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$, está asociado a un flujo de salida de momento desde el volumen de control. Por lo tanto los dos primeros términos que se encuentran del lado derecho de la ecuación (5-3) se pueden escribir:

$$\left\{\begin{matrix}\text{rapidez del momento}\\ \text{que sale del volumen}\\ \text{de control}\end{matrix}\right\} \qquad \left\{\begin{matrix}\text{rapidez de momento}\\ \text{que sale del volumen}\\ \text{de control}\end{matrix}\right\} = \iint_{\text{c.s.}} \mathbf{v}\rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dA$$

La rapidez de acumulación de momento lineal dentro del volumen del control puede expresarse así:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\text{c.v.}} \mathbf{v}\rho\,dV$$

y el equilibrio total de momento lineal para un volumen de control se transforma en:

$$\sum \mathbf{F} = \iint_{\text{c.s.}} \mathbf{v}\rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dA + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\text{c.v.}} \rho\mathbf{v}\,dV \tag{5-4}$$

Esta importantísima relación se conoce en mecánica de fluidos como el *teorema del momento*. Nótese la gran semejanza entre (5-4) y (4-1) en la forma de los términos integrales. Obsérvese, sin embargo, que la ecuación (5-4) es una expresión vectorial totalmente diferente a la forma escalar del equilibrio total de la masa estudiado en el capítulo 4. En coordenadas rectangulares la ecuación vectorial (5-4) se puede escribir por medio de las tres ecuaciones escalares:

$$\sum F_x = \iint_{\text{c.s.}} v_x\rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dA + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\text{c.v.}} \rho v_x\,dV \tag{5-5a}$$

$$\sum F_y = \iint_{\text{c.s.}} v_y\rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dA + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\text{c.v.}} \rho v_y\,dV \tag{5-5b}$$

$$\sum F_z = \iint_{\text{c.s.}} v_z\rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dA + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\text{c.v.}} \rho v_z\,dV \tag{5-5c}$$

Al aplicar una o todas las ecuaciones anteriores debe recordarse que cada término tiene un signo con respecto a las direcciones x, y, z, definidas como positivas. La determinación del signo de la integral de superficie debe tenerse en consideración con especial cuidado, ya que, tanto la componente de la velocidad (v_x) y el producto escalar ($\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$) tienen signo. La combinación del signo

adecuado asociado a cada uno de estos términos dará el sentido correcto a la itegral. También debe recordarse que ya que las ecuaciones (5-5) fueron escritas para el fluido que está dentro del volumen de control, *las fuerzas que van a emplearse en estas ecuaciones son las que actúan sobre el fluido.*

Un estudio detallado de los problemas que se presentan a continuación a manera de ejemplos, facilitará la compresión y permitirá al alumno mayor desenvoltura en la utilización del balance total de momento.

5.2 APLICACIONES DE LA EXPRESION INTEGRAL PARA EL MOMENTO LINEAL

Para aplicar la ecuación (5-4) es necesario definir primero el volumen de control, lo cual nos permitirá encontrar la solución más simple y directa al problema que tengamos delante. No existen reglas generales que complementen esta definición, sólo la experiencia en el manejo de este tipo de problemas permitirá al alumno hacer una rápida elección.

EJEMPLO 1

Estudiemos primero el problema consistente en encontrar la fuerza ejercida sobre un codo de tubo cuyo diámetro se reduce en un extremo; dicha fuerza es la resultante de un flujo estacionario de fluido dentro del tubo. En la figura 5.3 puede verse un diagrama del codo del tubo con las cantidades importantes para su análisis.

El primer paso a seguir será la definición del volumen de control. Una opción, de las distintas posibles, es la de todo el fluido contenido en el tubo en un tiempo dado. En la figura 5.4 puede apreciarse el volumen de control escogido en esta forma, mostrando las fuerzas externas compuestas sobre él. Estas incluyen: las fuerzas debidas a la presión en las secciones (1) y (2), la fuerza del cuerpo debidas al peso del fluido en el volumen de control y las fuerzas ocasionadas por la presión y el esfuerzo cortante, P_w y τ_w, ejercidas sobre el fluido por la pared del tubo. A la fuerza resultante que actúa sobre el fluido (que se debe a P_w y τ_w) realizada por el tubo, le llamaremos B y sus componentes en x e y serán B_x y B_y, respectivamente.

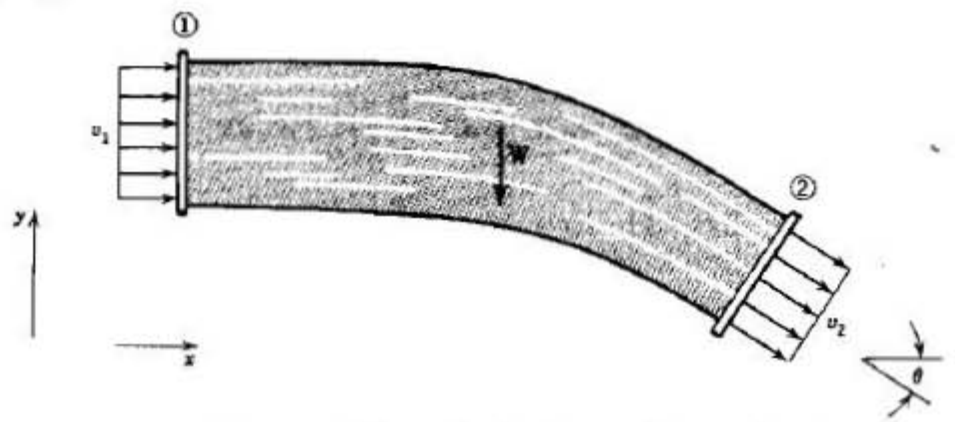


Figura 5.3 Flujo a través de un codo de tubo cuyo diámetro disminuye.

Tomando en cuenta las ecuaciones componentes direccionales en x e y, que son las (5-5a) y (5-5b) del equilibrio total del momento, las fuerzas externas que actúan sobre el fluido de control son:

$$\sum F_x = P_1A_1 - P_2A_2\cos\theta + B_x$$

y

$$\sum F_y = P_2A_2\,\text{sen}\,\theta - W + B_y$$

A cada una de las componentes de la fuerza desconocida, B, se le supone positiva. Los sentidos reales de estas componentes, cuando se obtenga la solución, indicarán si esta suposición es o no correcta.

Al calcular la integral de superficie en las direcciones x e y, se obtendrá:

$$\iint_{c.s.} v_x\rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dA = (v_2\cos\theta)(\rho_2v_2A_2) + (v_1)(-\rho_1v_1A_1)$$

$$\iint_{c.s.} v_y\rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dA = (-v_2\,\text{sen}\,\theta)(\rho_2v_2A_2)$$

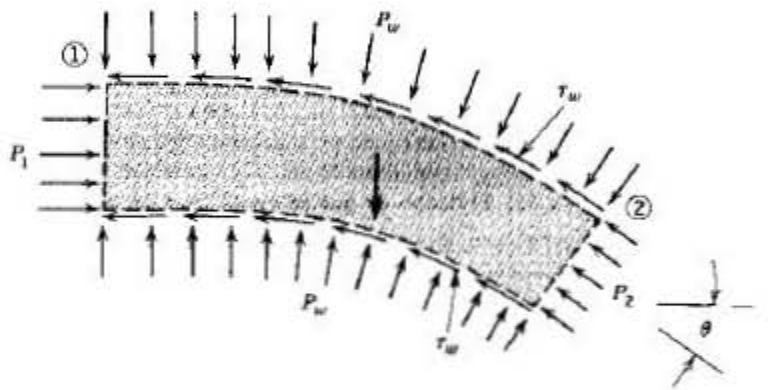


Figura 5.4 Volumen de control definido por la superficie de un tubo.

El término acumulativo vale cero en ambas ecuaciones, ya que, para el problema que se está estudiando el flujo es permanente.

Las expresiones completas para el momento en las direcciones x e y, son:

$$B_x + P_1A_1 - P_2A_2\cos\theta = (v_2\cos\theta)(\rho_2v_2A_2) + v_1(-\rho_1v_1A_1)$$

y

$$B_y + P_2A_2\,\text{sen}\,\theta - W = (-v_2\,\text{sen}\,\theta)(\rho_2v_2A_2)$$

Despejando las componentes desconocidas de la fuerza, B_x y B_y, se obtiene:

$$B_x = v_2^2\rho_2A_2\cos\theta - v_1^2\rho_1A_1 - P_1A_1 + P_2A_2\cos\theta$$

y

$$B_y = -v_2{}^2\rho_2 A_2 \operatorname{sen}\theta - P_2 A_2 \operatorname{sen}\theta + W$$

Hay que recordar que se iba a calcular la fuerza ejercida sobre un tubo y no sobre el fluido. La fuerza que se busca es la reacción a B y sus componentes son iguales en magnitud opuestas en sentido a B_x y B_y. Las componentes de la fuerza de reacción R, ejercida sobre el tubo, son:

$$R_x = -v_2{}^2\rho_2 A_2 \cos\theta + v_1{}^2\rho_1 A_1 + P_1 A_1 - P_2 A_2 \cos\theta$$

y

$$R_y = v_2{}^2\rho_2 A_2 \operatorname{sen}\theta + P_2 A_2 \operatorname{sen}\theta - W$$

Si el flujo es permanente, se logrará que la forma se simplifique un poco. Aplicando la ecuación (4-3), se obtiene:

$$\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2 = \dot{m}$$

donde $\dot{m}$ es la rapidez de flujo de la masa.

La solución final correspondiente a las componentes de R, puede escribirse:

$$R_x = \dot{m}(v_1 - v_2\cos\theta) + P_1 A_1 - P_2 A_2 \cos\theta$$
$$R_y = mv_2 \operatorname{sen}\theta + P_2 A_2 \operatorname{sen}\theta - W$$

El volumen de control que aparece en la figura 5.4, para el cual se obtuvo la solución anterior representa solamente una de las opciones posibles. Otra de ellas puede verse en la figura 5.5. Este volumen de control está acotado sencillamente por los planos que cortan al tubo en las secciones (1) y (2). El hecho de que se pueda usar un volumen de control tal

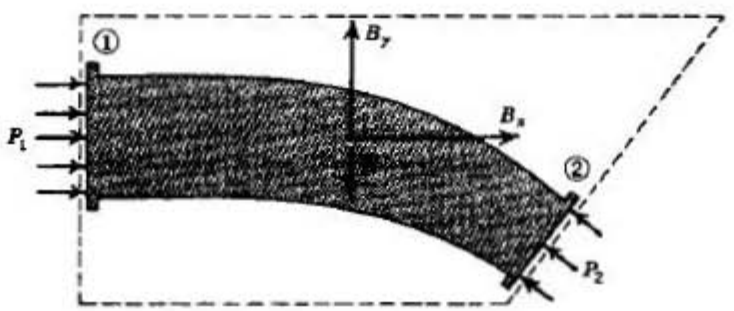


Figura 5.5 Volumen de control incluyendo el fluido y el tubo.

como este, demuestra la versatilidad de este enfoque, esto es, que los resultados de procesos complicadísimos que tienen lugar internamente se pueden analizar simplemente tomando en consideración sólo aquéllas cantidades de transferencia que ocurren a través de la superficie de control.

En este volumen de control, las ecuaciones direccionales, x e y, de momento, son:

$$B_x + P_1 A_1 - P_2 A_2 \cos\theta = (v_2\cos\theta)(\rho_2 v_2 A_2) + v_1(-v_1\rho_1 A_1)$$

y

$$B_y + P_2 A_2 \operatorname{sen}\theta - W = (-v_2 \operatorname{sen}\theta)(\rho_2 v_2 A_2)$$

donde la fuerza, cuyas componentes son B_x y B_y es la ejercida sobre el volumen de control por la sección del tubo cortado por las secciones (1) y (2). Las presiones en (1) y (2), en las ecuaciones anteriores son presiones manométricas, ya que todas las presiones atmosféricas que actúan en las superficies, se cancelan.

Note que las ecuaciones resultantes para este volumen de control son idénticas a las obtenidas para el definido previamente. Así pues, se puede obtener una solución correcta para cada uno de los volúmenes de control seleccionados, siempre y cuando se les analice total y cuidadosamente.

EJEMPLO 2

Como segundo ejemplo de la aplicación de la expresión de volumen de control para momento lineal (teorema del momento) consideremos la cisterna de la locomotora de vapor que puede verse en la figura 5.6, la cual obtiene agua de un canal por medio de un conducto. Obténgase la fuerza que el agua ejerce sobre el tren.

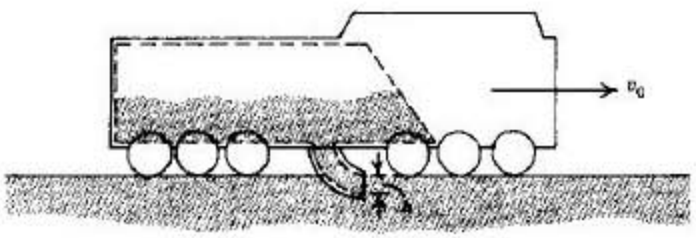


Figura 5.6 Esquema del carro cisterna de una locomotora sacando agua de un canal.

La opción lógica para escoger el volumen de control en este caso es la combinación tanque del agua-conducto. La frontera de nuestro volumen de control será el *interior* del tanque y del conducto. Ya que el tren se mueve con una velocidad uniforme hay dos opciones posibles para escoger sistemas de coordenadas. Se puede seleccionar un sistema de coordenadas que se encuentre fijo en el espacio o uno que se esté moviendo* con la velocidad del tren, v_0. Primero analicemos el sistema usando un sistema móvil de coordenadas.

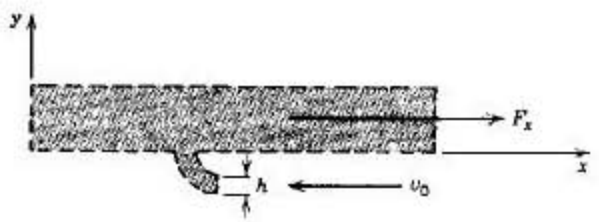


Figura 5.7 Sistema de coordenadas y volumen de control móviles.

*Recuerde que un sistema de traslación uniforme de coordenadas es un sistema de coordenadas inercial, por lo cual, tanto la segunda ley de Newton como el teorema del momento se pueden utilizar directamente.

En la Figura 5.7 puede observarse el volumen móvil de control con su sistema de coordenadas xy que se mueve con una velocidad v_0. Todas las velocidades de determinan con respecto a las ejes x e y.

La expresión conveniente es la ecuación (5-5a),

$$\sum F_x = \iint_{c.s.} v_x \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, dA + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{c.v.} v_x \rho\, dV$$

En la figura 5.7, $\sum F_x$ se representa por medio de F_x y en sentido positivo. Ya que se van a despreciar las fuerzas ocasionadas por la presión y esfuerzo cortante, F_x es la fuerza total ejercida por el tren y el conducto sobre el fluido. El término para el flujo de momento es:

$$\iint_{c.s.} v_x \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, dA = \rho(-v_0)(-1)(v_0)(h) \quad \text{(por unidad de longitud)}$$

y la rapidez de cambio de momento dentro del volumen de control es cero ya que el fluido que se encuentra dentro del volumen de control tiene una velocidad igual a cero en la dirección de x. Por lo tanto:

$$F_x = \rho v_0^2 h$$

Esta es la fuerza ejercida por el tren sobre el fluido. La fuerza ejercida por el fluido sobre el tren es la opuesta, o sea:

Ahora analicemos el mismo problema con un sistema estacionario de coordenadas (ver figura 5.8). Usando de nuevo la relación volumen de control para el momento lineal,

$$\sum F_x = \iint_{c.s.} v_x \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, dA + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{c.v.} v_x \rho\, dV$$

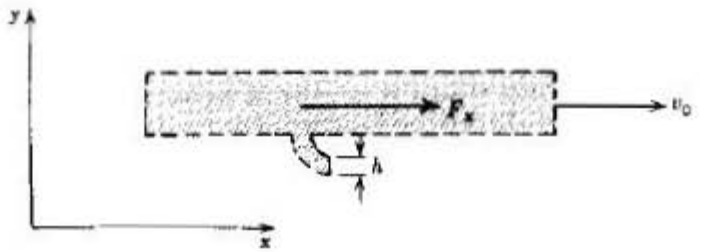


Figura 5.8 Sistema estacionario de coordenadas y volumen móvil de control.

se obtiene:

$$F_x = 0 + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{c.v.} v_x \rho\, dV$$

donde el flujo de momento es igual a cero ya que el fluido que entra tiene una velocidad igual a cero. Desde luego ningún fluido está abandonando el volumen de control. Los términos $\partial/\partial t \iiint_{c.v.} v_x \rho\, dV$, así como la velocidad $v_x = v_0 = \text{constante}$, pueden escribirse: $v_0 \partial/\partial t \iiint_{c.v.} \rho\, dV$ o $v_0(\partial m/\partial t)$, donde m es la masa de fluido que entra al volumen de control en la proporción $\partial m/\partial t = \rho v_0 h$ de modo que $F_x = \rho v_0^2 h$ como ocurrió anteriormente.

El estudiante debe darse cuenta de que en caso de un sistema estacionario de coordenadas y de un volumen móvil de control, debe tenerse cuidado en la interpretación del flujo de momento

$$\iint_{c.s.} \mathbf{v}\rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, dA$$

Al reagrupar los términos, se obtiene:

$$\iint_{c.s.} \mathbf{v}\rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, dA = \iint_{c.s.} \mathbf{v}\, d\dot{m}$$

Por lo cual es obvio que, en tanto que la velocidad v, es relativa a las coordenadas fijas, v . n es la velocidad relativa a la frontera del volumen de control.

EJEMPLO 3

El uso del teorema del momento en la predicción de los cambios locales en el fluido y en las propiedades del flujo, puede explicarse, en este punto, estudiando una onda de choque, que es una región de cambios rápidos de flujo y de propiedades del fluido. Para efectuar cálculos en ingeniería puede considerarse que estos cambios ocurren de manera discontinua, como lo muestra la figura 5.9.

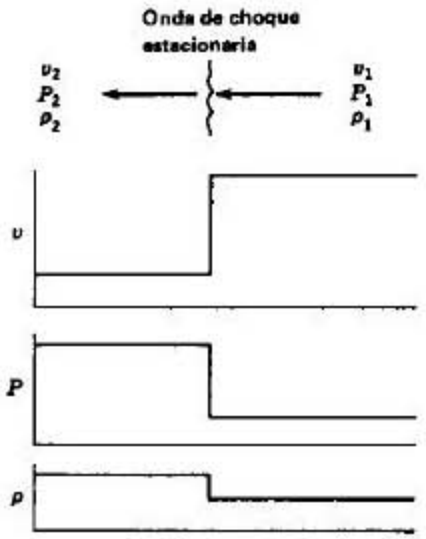


Figura 5.9 Cambios en las propiedades del fluido y del flujo al cruzar una onda estacionaria de choque. El flujo ocurre de derecha a izquierda.

Las ondas de choque tienen lugar solamente en los fluidos compresibles. Aunque por lo general los líquidos son considerados incompresibles, existe la suficiente compresibilidad como para producir ondas de choque, lo cual se hace obvio al observar el fenómeno de "golpe del ariete" en los tubos. El cambio de presión a través de una onda móvil de choque se puede determinar a partir del siguiente análisis. La onda de choque de la figura 5.10 se está moviendo hacia la derecha con una velocidad v_w en un fluido estacionario.

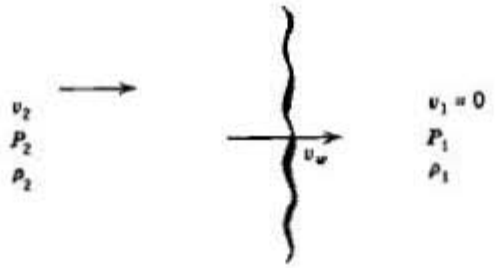


Figura 5.10 Onda móvil de choque.

Después de pasar por un punto dado, la velocidad cambia, de 0 a v_2. La onda de choque que aparece en la figura se puede analizar tomando en cuenta o un volumen estacionario de control (ver problemas 4.11 y 5.13) o un volumen móvil de control que se esté moviendo con la velocidad de la onda, v_w. Utilizaremos este último. Para un observador que se mueve con una velocidad v_w, la onda de choque aparentemente es estacionaria, el fluido en la región 1 parece estar fluyendo de derecha a izquierda con una velocidad v_w y el fluido de la región 2 también parece moverse de derecha a izquierda con una velocidad $v_w - v_1$. Los valores, tanto de la presión como de la densidad en las regiones 1 y 2, permanecen inalterables, así que la onda móvil de choque se ve como aparece en la figura 5.11.

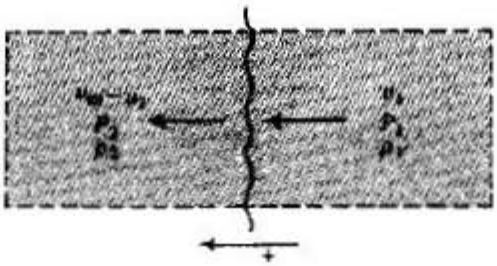


Figura 5.11 Onda móvil de choque vista por un observador que viaja con la onda.

Utilizando el principio de conservación de la masa para un volumen de control, se obtiene:

$$\iiint_{v.c.} \frac{\partial \rho}{\partial t}^{0} dV + \iint_{c.s.} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, dA = 0$$

que se transforma, después de la substitución y de la cancelación de las áreas en:

$$\rho_2(v_w - v_2) - \rho_1 v_w = 0$$

Si se escoge la dirección positiva como puede verse en la figura y hacemos uso del teorema del momento:

$$\Sigma \mathbf{F} = \iint_{c.s.} \mathbf{v}\rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, dA + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{v.c.} \mathbf{v}\rho^{0}\, dV$$

Al sustituir, queda:

$$(P_1 - P_2)A = \rho_2(v_w - v_2)^2 A - \rho_1 v_w^2 A$$

Las áreas pueden cancelarse y se puede usar la relación para la conservación de la masa, $\rho_2(v_w - v_2) = \rho_1 v_w$, dando como resultado:

$$P_2 - P_1 = \rho_1 v_w v_2$$

El cambio de presión al atravesar la onda de choque es igual al cambio de momento al atravesarla, lo cual puede expresarse, sencillamente como: $\rho_1 v_w v_2$. Si la velocidad de la onda se acerca a la velocidad del sonido, en el fluido del que se está tratando, puede hacerse un cálculo muy útil acerca del cambio en la velocidad.

5.3 RELACION INTEGRAL PARA EL MOMENTO DE MOMENTO

La relación integral correspondiente al momento de momento de un volumen de control es una extensión de las consideraciones que se acaban de hacer para el momento lineal.

Si se empieza con la ecuación (5-1), que es una expresión matemática de la segunda ley de Newton del movimiento, aplicada a un sistema de partículas (figura 5.12),

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \frac{d}{dt}\mathbf{P} \tag{5-1}$$

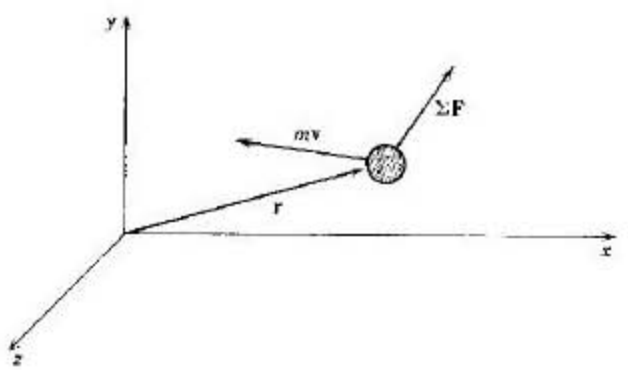


Figura 5.12 Un sistema y su vector r, de desplazamiento.

se asocia el producto vectorial o "cruz" de un vector de posición, $\mathbf{r}$, a cada término, obteniendo:

$$\mathbf{r} \times \sum \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}\mathbf{P} \tag{5-6}$$

La cantidad que aparece del lado izquierdo de la ecuación (5-6), $\mathbf{r}\times\sum\mathbf{F}$, es el momento resultante, $\sum\mathbf{M}$, con respecto al origen, como puede verse en la figura 5.12, debido a todas las fuerzas aplicadas sobre el sistema. Evidentemente, se puede escribir:

$$\mathbf{r}\times\sum\mathbf{F}=\sum\mathbf{r}\times\mathbf{F}=\sum\mathbf{M}$$

donde $\sum\mathbf{M}$ vuelve a ser el momento total de todas las fuerzas que actúan sobre el sistema, con respecto al origen.

El lado derecho de la ecuación (5-6) es el momento de la rapidez de cambio del momento lineal con respecto al tiempo. Puede escribirse así:

$$\mathbf{r}\times\frac{d}{dt}m\mathbf{v}=\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times m\mathbf{v})=\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{P})=\frac{d}{dt}\mathbf{H}$$

Por lo tanto, este término también es la rapidez de cambio del momento de momento del sistema con respecto al tiempo. El símbolo H se usará para designar el momento de momento. Ahora la expresión completa se ha convertido en:

$$\sum\mathbf{M}=\frac{d}{dt}\mathbf{H} \tag{5-7}$$

Tal como ocurrió con su expresión análoga para el momento lineal, la ecuación (5-7) corresponde a un sistema específico. Por medio del mismo proceso de límites que se utilizó para el momento lineal se puede rearreglar esta expresión hasta convertirla en una forma que pueda aplicarse a un volumen de control para lograr una ecuación en palabras:

Suma de los momentos que actúan sobre el volumen de control	=	Rapidez del momento de momento que sale del volumen de control	−	Rapidez del momento de momento que entra al volumen de control	+	Rapidez de acumulación de momento de momento dentro del volumen de control

rapidez neta de flujo de salida de momento de momento de un volumen de control (5-8)

La ecuación (5-8) puede aplicarse a un volumen general de control para obtener la siguiente ecuación:

$$\sum\mathbf{M}=\int\int_{c.s.}(\mathbf{r}\times\mathbf{v})\rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dA+\frac{\partial}{\partial t}\int\int\int_{c.v.}(\mathbf{r}\times\mathbf{v})\rho\,dV \tag{5-9}$$

El término que está del lado izquierdo de la ecuación (5-9) es el momento total de todas las fuerzas que actúan sobre el volumen de control. Los términos

que aparecen del lado derecho representan la rapidez neta del flujo de salida a través de la superficie de control y la rapidez de acumulación de momento de momento dentro del volumen de control, respectivamente.

Esta ecuación vectorial se puede expresar por medio de tres ecuaciones escalares para las direcciones ortogonales de las coordenadas inerciales, x, y, y z, en la siguiente forma:

$$\sum M_x = \iint_{c.s.} (\mathbf{r}\times\mathbf{v})_x \rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\, dA + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{c.v.} (\mathbf{r}\times\mathbf{v})_x \rho\, dV \qquad (5\text{-}10a)$$

$$\sum M_y = \iint_{c.s.} (\mathbf{r}\times\mathbf{v})_y \rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\, dA + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{c.v.} (\mathbf{r}\times\mathbf{v})_y \rho\, dV \qquad (5\text{-}10b)$$

y

$$\sum M_z = \iint_{c.s.} (\mathbf{r}\times\mathbf{v})_z \rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\, dA + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{c.v.} (\mathbf{r}\times\mathbf{v})_z \rho\, dV \qquad (5\text{-}10c)$$

Las direcciones asociadas a M_x y $(\mathbf{r}\times\mathbf{v})$, son las estudiadas en mecánica, donde se usa la regla de la mano derecha para determinar la orientación de las cantidades que tienen sentido rotacional.

5.4 APLICACIONES A LAS BOMBAS Y TURBINAS

La expresión correspondiente al momento de momento es particularmente aplicable a dos tipos de aparatos, generalmente clasificados como bombas y turbinas. En esta sección se estudiarán solamente las que tienen movimiento rotativo. Si se obtiene energía de un fluido que esté actuando sobre un aparato rotativo, se la llama turbina, en tanto que una bomba es el aparato que proporciona energía a un fluido. La parte de la turbina que gira se llama roldana y la de una bomba, propulsor.

EJEMPLO 4

Primeramente se dirigirá la atención a un tipo de turbina conocido como rueda de Pelton. Este aparato se encuentra representado en la figura 5.13. En dicha turbina hay un

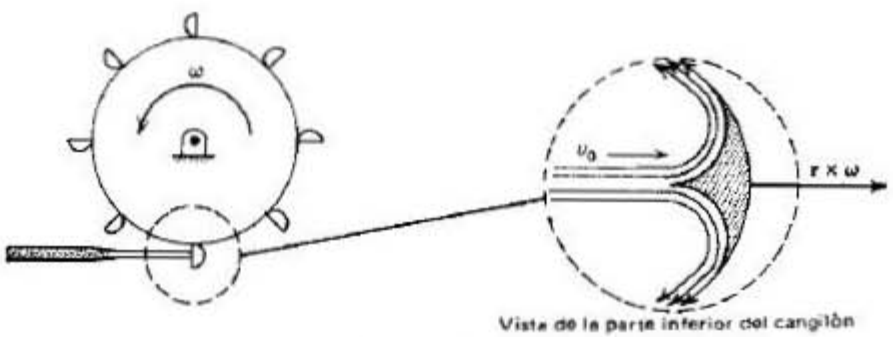


Figura 5.13 Rueda de Pelton.

chorro de fluido, usualmente agua, que sale de una boquilla y cae en un sistema de cubetas que están en la periferia de la roldana. Las cubetas están diseñadas de tal manera que el agua se desvíe en tal forma que ejerza una fuerza sobre la roldana, ocasionando una rotación. Se puede determinar la torca que resulta de dicha situación usando la relación correspondiente al momento de momento.

Inicialmente, se tiene que definir el volumen de control. Las líneas punteadas de la figura 5.14 muestran el volumen de control escogido. Este incluye toda la roldana e intersecta al chorro de agua, cuya velocidad es v_0, como puede verse. La superficie de control también intersecta al eje en ambos lados de la roldana.

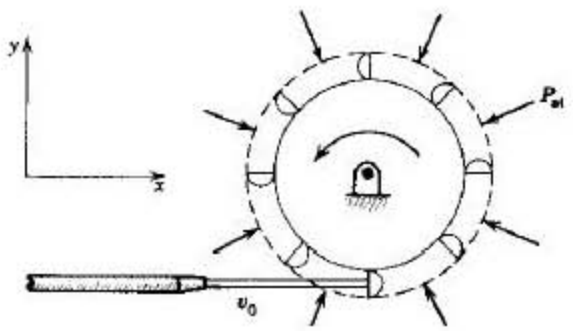


Figura 5.14 Volumen de la rueda de Pelton.

La forma escalar conveniente de la expresión general que corresponde al momento de momento es la ecuación (5-10c), que se ha escrito para la dirección x. Toda la rotación se efectúa en el plano xy, y, de acuerdo con la regla de la mano derecha, la representación vectorial de una cantidad que tiene momento angular o tendencia a producir movimiento angular, tiene sentido normal al plano xy, o sea, la dirección z. Recuerde que el sentido angular positivo es el que está en la misma dirección del pulgar de la mano derecha cuando los dedos de ésta apuntan a la dirección del movimiento angular que ocurre en sentido inverso al movimiento de las manecillas del reloj.

$$\sum M_z = \iint_{c.s.} (\mathbf{r}\times\mathbf{v})_z \rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\, dA + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{c.v.} \rho(\mathbf{r}\times\mathbf{v})_z\, dV$$

Si se calcula separadamente cada término, se tendrá, para el momento externo, la relación

$$\sum M_z = M_{\text{flecha}}$$

donde M_{flecha}, que es el momento aplicado al eje, es el único momento que actúa sobre el volumen de control.

La integral de superficie:

$$\iint_{c.s.} (\mathbf{r}\times\mathbf{v})_z \rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\, dA$$

es la rapidez neta de flujo de salida de momento de momento. La corriente de fluido que abandona el volumen de control y aparece en la figura 5.15, sale con una velocidad:

$$\{r\omega - (v_0 - r\omega)\cos\theta\}\mathbf{e}_\theta$$

Aquí se ha supuesto que las componentes de la velocidad en z, son iguales y opuestas. La velocidad de salida es la suma vectorial de la velocidad de la cubeta turbina, rw, y la del fluido que sale, con respecto a la cubeta y que abandona la boquilla con un ángulo, θ con respecto a la dirección de movimiento de la cubeta, $(v_0 - r\omega)\cos\theta$. Estos vectores velocidad pueden observarse en la figura. Ahora, la expresión final para la integral de superficie, es:

$$\iint_{c.s.} (\mathbf{r}\times\mathbf{v})_z \rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\, dA = r[r\omega - (v_0 - r\omega)\cos\theta]\rho Q - rv_0\rho Q$$

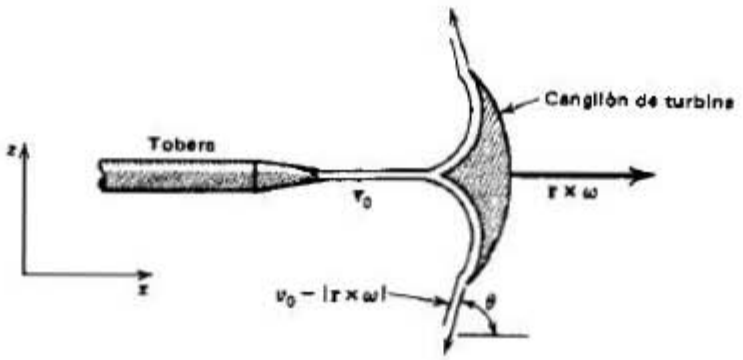


Figura 5.15 Vectores velocidad correspondientes al cangilón de una turbina.

El último término $rv_0\rho Q$ es el momento de momento de la corriente entrante de fluido, cuya velocidad es v_0, cuya densidad es ρ y cuya rapidez volumétrica de fluido es Q.

Ya que el problema que se está estudiando es un problema en el que la velocidad angular, w, de la rueda es constante, el término que expresa la derivada del momento de momento del volumen de control con respecto al tiempo, $\partial/\partial t \iiint_{c.v.} (\mathbf{r}\times\mathbf{v})_z \rho\, dV = 0$. Al reemplazar los términos de la expresión completa por sus equivalentes, se obtiene:

$$\begin{aligned}\sum M_z = M_{shaft} &= \iint_{c.s.} (\mathbf{r}\times\mathbf{v})_z \rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\, dA + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{c.v.} \rho(\mathbf{r}\times\mathbf{v})_z\, dV \\ &= r[r\omega - (v_0 - r\omega)\cos\theta]\rho Q - rv_0\rho Q \\ &= -r(v_0 - r\omega)(1+\cos\theta)\rho Q\end{aligned}$$

La torca aplicada al eje es de igual magnitud pero de sentido opuesto, por lo que el resultado final será:

$$\text{Torca} = -M_{shaft} = r(v_0 - r\omega)(1+\cos\theta)\rho Q$$

EJEMPLO 5

La turbina de flujo radial dibujada en la figura 5.16 puede analizarse con la ayuda de la expresión que corresponde al momento de momento. En este aparato, el fluido (que usualmente es agua) entra a las veletas guía, quienes le proporcionan una velocidad tangencial y por lo tanto, un momento angular, antes de que entre a la roldana giratoria que reduce el momento angular del fluido, en tanto que dota a la roldana de una torca.

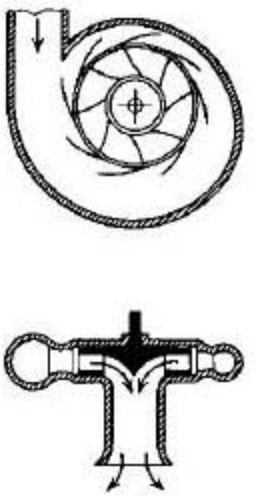


Figura 5.16 Turbina de flujo radial.

El volumen de control que se va a utilizar se puede ver en la figura 5.17. La frontera exterior del volumen de control está en el radio r_1 y la frontera interior en r_2. El ancho del rodete es h.

Las ecuación (5-9) se usará para determinar el par. En un flujo permanente esta ecuación se transforma en:

$$\sum \mathbf{M} = \iint_{\text{c.s.}} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, dA$$

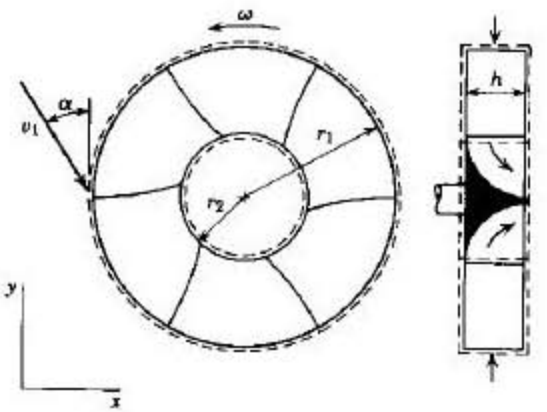


Figura 5.17 Volumen de control para una turbina de rodete de flujo radial.

Calculando separadamente cada término, se obtendrá, para el momento externo del rodete sobre el fluido,

$$\sum \mathbf{M} = M_{\text{fluido}} \mathbf{e}_z = -T \mathbf{e}_z$$

donde T es el par de la flecha. La integral de superficie requiere de la evaluación del producto vectorial ($\mathbf{r} \times \mathbf{v}$) en la frontera exterior r_1 y en la frontera interior, r_2. Si se expresa la velocidad del agua en coordenadas polares, $\mathbf{v} = v_r\mathbf{e}_r + v_\theta\mathbf{e}_\theta$, de tal manera que $(\mathbf{r} \times \mathbf{v} = r\mathbf{e}_r \times (v_r\mathbf{e}_r + v_\theta\ \mathbf{e}_\theta) = r\,v_\theta\mathbf{e}_z$. la integral de superficie, suponiendo una distribución uniforme de velocidades, está dada por:

$$\iint_{c.s.} (\mathbf{r}\times\mathbf{v})\rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dA = \{r_1 v_{\theta_1}\rho(-v_{r_1})2\pi r_1 h + r_2 v_{\theta_2}\rho v_{r_2} 2\pi r_2 h\}\mathbf{e}_z$$

El resultado general es:

$$-T\mathbf{e}_z = (-\rho v_{r_1} v_{\theta_1} 2\pi r_1{}^2 h + \rho v_{r_2} v_{\theta_2} 2\pi r_2{}^2 h)\mathbf{e}_z$$

Se puede usar la ley de la conservación de la masa:

$$\rho v_{r_1} 2\pi r_1 h = \dot{m} = \rho v_{r_2} 2\pi r_2 h$$

de manera que el par estará dado por:

$$T = \dot{m}(r_1 v_{\theta_1} - r_2 v_{\theta_2})$$

Las componentes de la velocidad $v_{\theta 1}$ y $v_{\theta 2}$, se han expresado en el sistema de coordenadas xyz, que es estacionario; puede observarse en las figuras 5.16 y 5.17, que la velocidad en r_1 se puede determinar por medio de la rapidez de flujo y del ángulo que forma el aspa guía, α. Sin embargo, la velocidad en r_2 requiere del conocimiento de las condiciones de flujo en la roldana.

La velocidad en r_2 se puede determinar por medio del siguiente análisis. En la figura 5.18, aparecen dibujadas las condiciones de flujo a la salida del rodete. La velocidad del agua, v_2, es la suma vectorial de la velocidad vectorial con respecto al rodete, v'_2, y la velocidad del rodete, $r_2\,\omega$.

La velocidad v_{θ_2} que es la velocidad tangencial del agua que abandona el rodete, está dada por

$$v_{\theta_2} = r_2\omega - v_2' \operatorname{sen}\beta$$

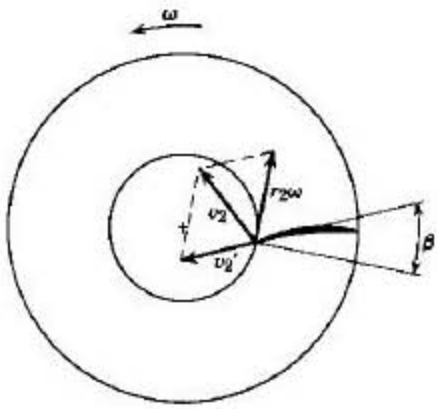


Figura 5.18 Velocidad a la salida del rodete (sólo se muestra un aspa).

donde β es el ángulo del aspa que puede verse en la figura. Se supone que el fluido fluye en la misma dirección que el aspa. La componente radial del flujo puede determinarse a partir del principio de conservación de la masa.

$$v_{r_2} = v_2' \cos\beta = \frac{\dot{m}}{2\pi\rho r_2 h}$$

Por lo que

$$T = \dot{m}\left(r_1 v_{\theta_1} - r_2\left[r_2\omega - \frac{\dot{m}\tan\beta}{2\pi\rho r_2 h}\right]\right)$$

En la práctica, los alabes deflectores son ajustables para que la velocidad relativa a la entrada al rodete sea tangente a las aspas.

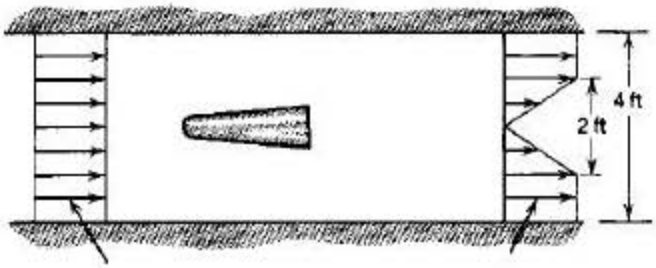
5.5 CONCLUSION

En este capítulo la relación básica que se ha utilizado ha sido la segunda ley de Newton del movimiento. Esta ley, de la forma escrita para un sistema, se reescribió para hacerla aplicable a un volumen de control. El resultado del estudio de un volumen general de control nos condujo a las ecuaciones integrales para el momento lineal, ecuación (5-4), y para el momento de momento, ecuación (5-9). A menudo, a la ecuación (5-4) se le llama teorema del momento de la mecánica de fluidos y es una de las expresiones más útiles y más ampliamente utilizadas en este campo.

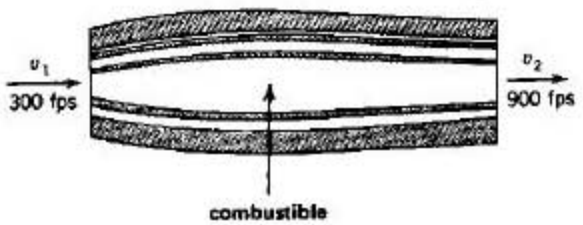
De nuevo se le advierte al estudiante que debe comenzar siempre con la expresión integral completa cuando esté resolviendo un problema. Solamente el análisis término por término de la expresión, le permitirá llegar a la solución correcta, en tanto que a causa de consideraciones apresuradas, ciertos términos podrían calcularse incorrectamente, o pasarse por alto completamente. Como comentario final, se dirá que hay que notar que la expresión para el teorema del momento, en la forma dada, puede aplicarse solamente a un volumen de control inercial.

PROBLEMAS

5.1 Un objeto bidimensional se coloca en un túnel de agua de 4 ft. de ancho como aparece en la figura. La velocidad en contra de la corriente, v_1, es uniforme a lo largo de la sección transversal. Encuéntrese el valor de v_2 para el perfil de la velocidad del mismo sentido de la corriente.



5.2 En la figura puede verse un motor estacionario de jet. Está entrando aire que tiene una densidad de 0.0805 lb_m/ft^3. Las áreas transversales seccionales de entrada y salida son de 10.8 ft^2. La masa de combustible consumida representa el 1% de la masa de aire que entra a la sección de prueba. Calcule el impulso que desarrolla dicho motor para las condiciones especificadas.



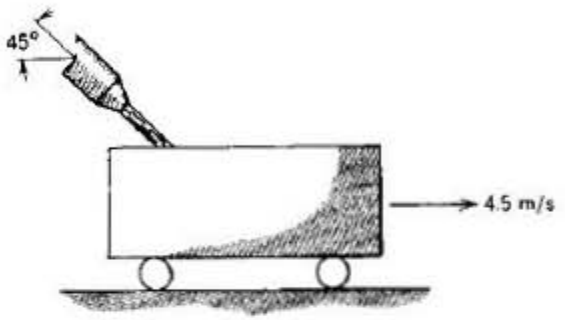
5.3 Si en el sistema dado para el problema 5.1, la fuerza total de arrastre ejercida sobre el objeto es de 500 N/n de longitud normal a la dirección de flujo y si se desprecian las fuerzas que actúan sobre las paredes, encuentre la diferencia de presión entre las secciones de entrada y salida.

5.4 (a) Determine la magnitud de las componentes en x e y de la fuerza ejercida por un chorro de agua de 2 ft^3/seg que cae a 25 fps, sobre el aspa fija indicada en la figura.

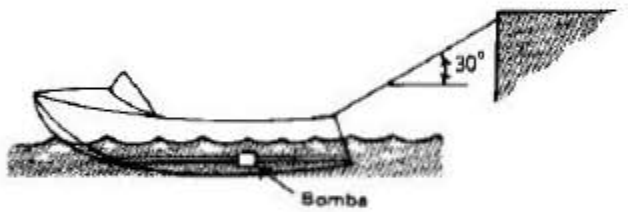
(b) Si el aspa se mueve hacia la izquierda, a 15 fps, encuentre la magnitud y la velocidad del chorro de agua al abandonar el aspa.

5.5 Un carro cisterna abierto, como el de la figura, viaja con una velocidad uniforme de 4.5 m/seg. En el instante que se aprecia en la figura, el carro

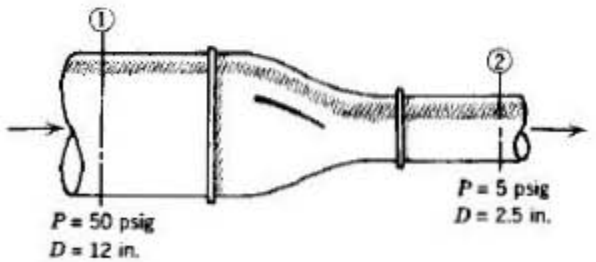
pasa bajo un chorro de agua que sale de un tubo de 0.1 m de diámetro con una velocidad de 10 m/seg. ¿Cuál es la fuerza ejercida por el chorro de agua sobre el tanque?



5.6 La bomba de la siguiente figura bombea 3 ft^3/seg. de agua a través del acueducto sumergido, que tiene un área de 0.25 ft en la proa del bote y 0.15 ft en la popa. Determínese la tensión de la cuerda de amarre, suponiendo que las presiones de entrada y salida son iguales.



5.7 Está fluyendo aceite (g. especificada = 0.8) en forma continua a través de la sección circular de tamaño variable, a 2.9 ft^3/seg. Si los perfiles de velocidad de entrada y salida son uniformes, calcúlese la fuerza que deberá aplicarse al reductor para mantenerlo en su sitio.



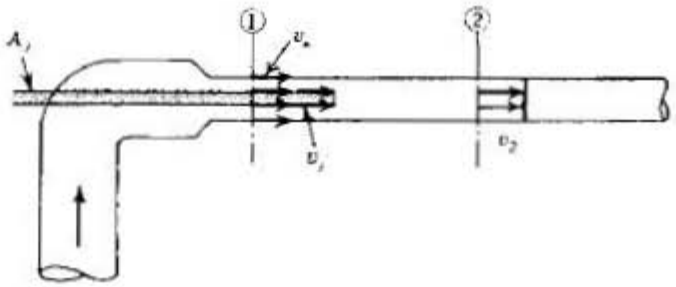
5.8 En el extremo de un tubo de agua de 3 in de diámetro, está colocada una tobera que deja salir un chorro cuyo diámetro es de 1½ in. al aire libre. La presión existente en el interior del tubo es de 60 lb/in, y la rapidez de la descarga es de 400 gal/min. ¿Cuáles son la magnitud y la direc-

ción de la fuerza necesarias para que la tobera se mantenga adherida al tubo?

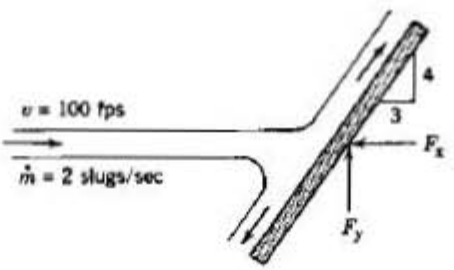
5.9 Una bomba de agua tiene un área $A_j = 0.05$ ft y la velocidad de su chorro es $v_c = 90$ fps en un tubo de área constante cuya área total $A = 0.6$ ft^2. En la sección 2 se mezcla completamente el agua. Suponiendo que el flujo es unidimensional y despreciando el esfuerzo cortante de la pared,

a) calcule la velocidad media del flujo mezclado en la sección 2.

b) encuentre la elevación de presión $(P_2 - P_1)$, suponiendo que la presión del chorro y la corriente secundaria son las mismas que en la sección 1.



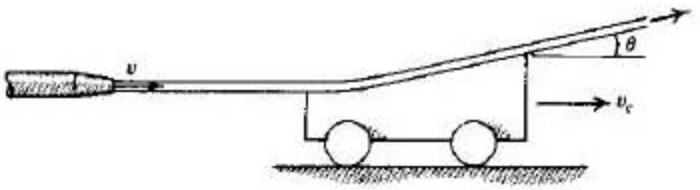
5.10 Si la placa de la figura está inclinada con el ángulo indicado, ¿Cuáles son las fuerzas F_x y F_y necesarias para mantener su posición? El flujo tiene lugar sin fricción.



5.11 Una placa se mueve perpendicularmente hacia un chorro que sale con una rapidez de 5 fps. El chorro deja salir agua con una rapidez de 2 ft^3/seg y una velocidad de 30 fps. Encuentre la fuerza que ejerce el fluido sobre la placa y compárelo con lo quo ocurriría si la placa fuera estacionaria. Suponga que el flujo se realiza sin fricción.

5.12 La figura siguiente muestra una veleta con un ángulo de giro θ que se mueve con una velocidad constante v_c. La veleta recibe un chorro que sale de una boquilla fija con una velocidad v.

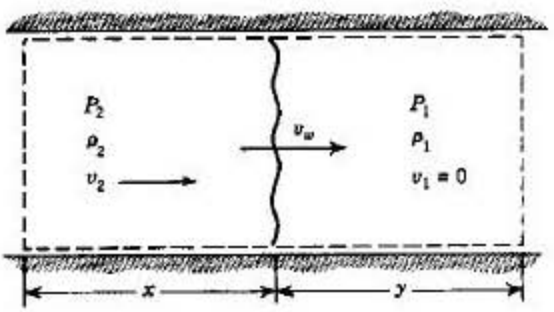
(a) Suponga que la veleta está montada sobre rieles como se ve en el dibujo. Demuestre que la potencia transmitida al carro, es máxima cuando $v_c/v = 1/3$.



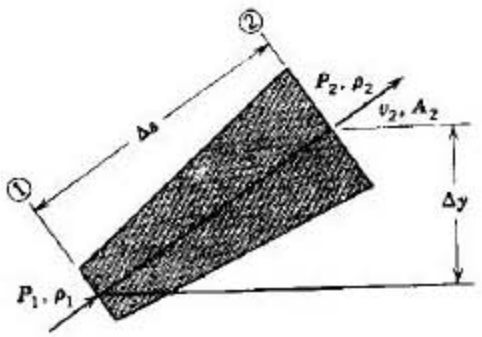
(b) Suponiendo que hay un gran número de veletas similares unidas a una rueda giratoria cuya velocidad periférica, v_c, demuéstrese que la potencia transmitida es máxima cuando $v_c/v = \frac{1}{2}$.

5.13 La onda de choque que puede verse en la figura siguiente, se mueve a la derecha con una velocidad de v_w fps. Las propiedades en las partes delantera y trasera de la onda de choque no son funciones del tiempo. Usando el volumen de control de la figura, demuestre que la diferencia de presión al cruzar la onda de choque es: 5

$$P_2 - P_1 = \rho_1 v_w v_2$$

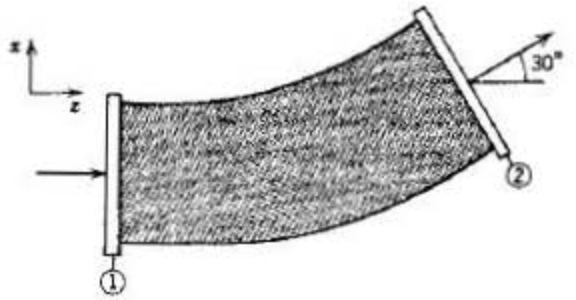


5.14 Examine el volumen diferencial de control que se puede ver en la figura siguiente. Aplicando el principio de conservación de la masa y el teorema del momento, demuestre que: $dP + \rho v dv + g dy = 0$ 5

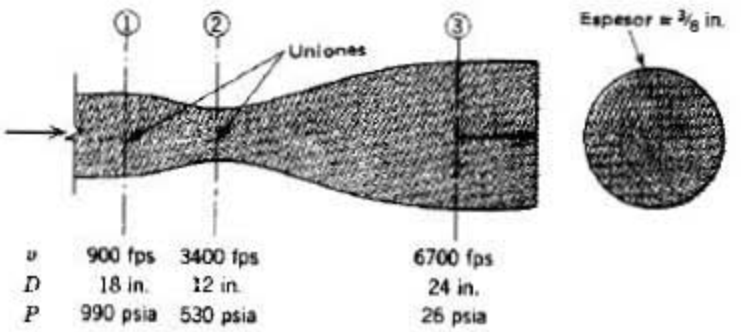


5.15 Está fluyendo agua constantemente a través del tubo horizontal doblado 30°, que aparece a continuación. En la sección 1, el diámetro es de 0.3 m, la velocidad es de 12m/seg y la presión de 138 k Pa. En la sección 2, el 5

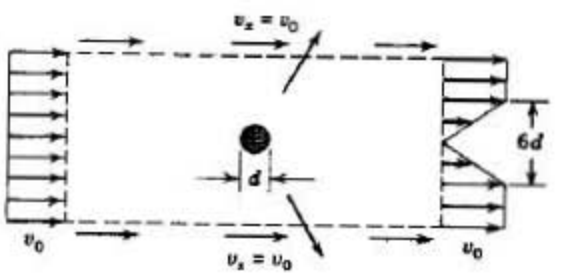
diámetro es de 0.38 m y la presión de 145 kPa. Determine las fuerzas F_x y F_z necesarias para mantener estacionario el codo de tubo.



5.16 La tobera del cohete que aparece a continuación, consiste en tres secciones soldadas. Determine el esfuerzo axial en las uniones 1 y 2 cuando el cohete funciona al nivel del mar. La rapidez de flujo de la masa es de 770 lb_m/seg.



5.17 La presión ejercida sobre el volumen de control de la figura siguiente es constante. Las componentes de la velocidad en la dirección x son las que se pueden apreciar en la figura. Determine la fuerza ejercida por el fluido sobre el cilindro. Suponga que el flujo es incompresible.



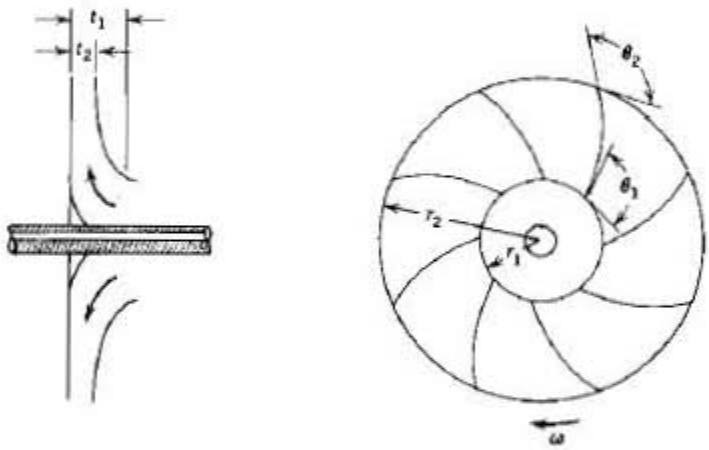
5.18 Si la velocidad de la onda de choque del problema 5.13 se aproxima a la velocidad del sonido, determine el cambio de presión que ocasiona un cambio de velocidad de 10 fps en:

a) aire en condiciones estándar.

b) agua.

5.19 Está fluyendo agua a través de un tubo con una velocidad de 1 m/seg. Repentinamente se cierra una válvula que está en el extremo del tubo. Determine el aumento de presión en el tubo.

5.20 Está fluyendo agua de mar $\rho = 64\ \text{lb}_\text{m}/\text{ft}^3$, a través del propulsor de una bomba centrífuga con una rapidez de 800 gal/min. Determine el par ejercido por el fluido sobre el propulsor y la potencia que se necesita para accionar la bomba. Suponga que la velocidad absoluta del agua que entra al impulsor es radial. Las dimensiones son las siguientes:

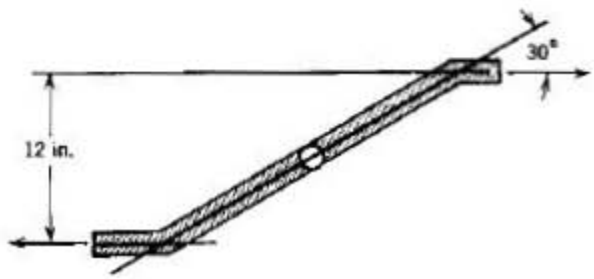


$\omega = 1180$ rpm	$t_2 = 0.5$ in.
$r_1 = 2$ in.	$\theta_2 = 135°$
$r_2 = 8$ in.	$t_1 = 0.7$ in.

5.21 Con los datos del problema 5.20, determine:

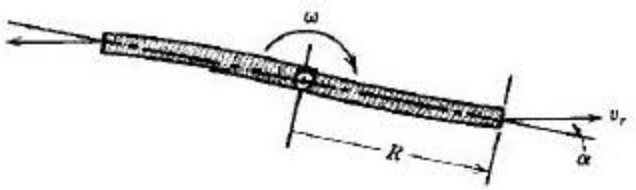
a) un ángulo θ_1 tal que el flujo de entrada sea paralelo a las aspas;

b) la carga axial sobre la flecha, si su diámetro es de 1 in y la presión a la entrada de la bomba es atmosférica.

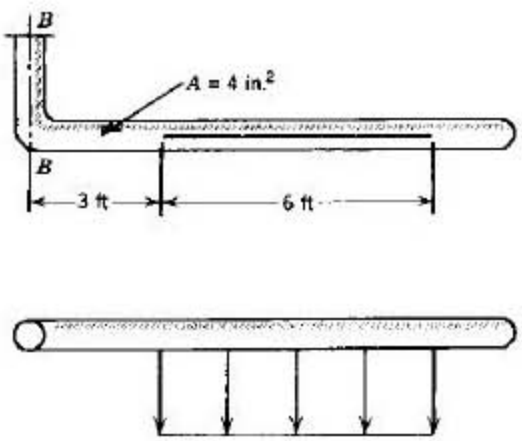


5.22 Un irrigador de agua consta de dos chorros de 3/8 in de diámetro en los extremos de una varilla hueca, como lo muestra la figura. Si el agua sale con una velocidad de 20 fps, ¿Qué par se necesitaría para mantener al irrigador en su lugar?

5.23 Un irrigador para césped está formado por dos secciones de tubo curvo que giran alrededor de un eje vertical como se ve en la figura. El irrigador gira con una velocidad angular ω, y el área efectiva de descarga es A, por lo que el agua, que fluye con una rapidez $Q = 2v_rA$, donde v_r es la velocidad del agua con respecto al tubo giratorio. Un par de fricción constante M_f, se opone al movimiento del irrigador. Encuentre una expresión para la velocidad del irrigador en términos de las variables importantes.

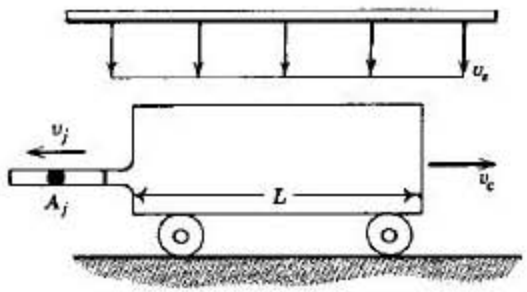


5.24 El tubo que aparece a continuación tiene una abertura de 1/4 in de grueso, configurada de manera tal que deja salir del tubo una capa de agua de grosor uniforme de 1/4 in, radialmente. La velocidad se mantiene constante a lo largo del tubo, como puede verse, y por la parte superior entra agua con una rapidez de 2 ft/seg. Encuentre el momento sobre el tubo alrededor del eje BB ocasionado por el flujo de agua en la parte interior del sistema del tubo.



5.25 Un tanque abierto de L ft de largo viaja hacia la derecha con una velocidad de v_c fps. Un chorro, cuya área es A_j arroja un fluido, cuya densidad es ρ con una velocidad de v_j fps con relación al carro tanque, el cual, al

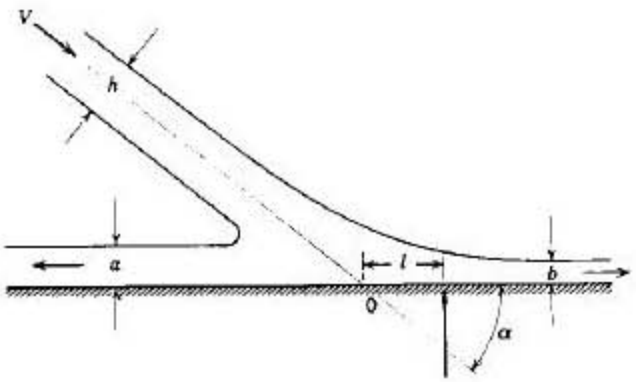
mismo tiempo, recoge fluido de un irrigador que está colocado en la parte superior y arroja fluido hacia abajo con una velocidad v_e. Suponiendo que el flujo del irrigador es uniforme sobre el área del carro, A_c, determine la fuerza neta que ejerce el fluido sobre el carro tanque.



5.26 Un chorro de fluido incompresible, constante, carente de fricción bidimensional cuya anchura es h, cuya velocidad es V y cuyo ancho unitario choca sobre una placa plana que se encuentra formando un ángulo α con su eje. Deben despreciarse las fuerzas gravitacionales.

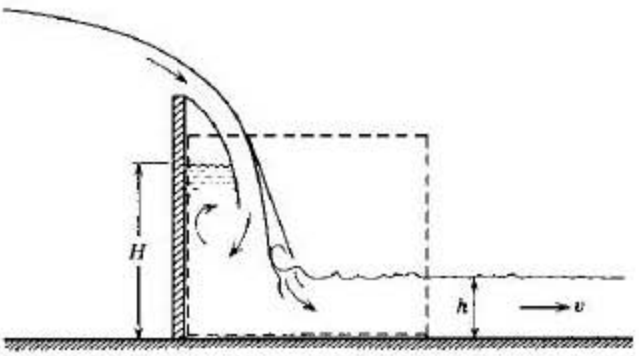
(a) Determine la fuerza total sobre la placa y las anchuras a, b, de las dos ramificaciones.

(b) Determine la distancia ℓ al centro de presión (c.p.) a lo largo de la placa desde el punto cero (el centro de presión es el punto en el cual puede equilibrarse la placa sin necesidad de un momento adicional).



5.27 Una presa vierte agua en un canal de ancho constante, como el de la figura. Se observa que una región de agua tranquila se encuentra detrás del chorro a una altura H. Tanto la velocidad como la altura del flujo en el canal están dadas por V y h, respectivamente y la densidad del agua es ρ. Usando el teorema del momento así como la superficie de control que se indica, determine H. Desprecie el momento horizontal del flujo que

está entrando al volumen de control desde la parte superior y suponga que la fricción también es despreciable. La presión del aire, existente en la cavidad que hay bajo la cresta del agua que está cayendo, se debe tomar como atmosférica.



6
CONSERVACION DE LA ENERGIA: ENFOQUE DE VOLUMEN DE CONTROL

La Tercera ley fundamental que se va a aplicar en el análisis del flujo de fluidos es la primera ley de la termodinámica y se darán ejemplos de la aplicación de la expresión integral.

6.1 RELACION INTEGRAL PARA LA CONSERVACION DE LA ENERGIA

La primera ley de la termodinámica establece lo siguiente:

Si se lleva un sistema a través de un ciclo, el calor total que el sistema adquiere de la región circundante es proporcional al trabajo realizado por el sistema sobre la región circundante.

Nótese que esta ley fue escrita para un grupo específico de partículas, aquellas que comprenden al sistema que se ha definido. Por lo tanto, el procedimiento será semejante al que se utilizó en el capítulo 5, que es rearreglar este enunciado hasta darle un forma que pueda aplicarse a un volumen de control que contenga diferentes partículas de fluidos en diferentes instantes. El enunciado de la primera ley de la termodinámica incluye solamente cantidades escalares, por lo tanto, en forma diferente a aquella en la que se estudiaron las ecuaciones de momento en el capítulo 5, las ecuaciones que resulten de la primera ley de la termodinámica serán de forma escalar.

El enunciado de la primera ley, que se dio anteriormente puede escribirse, en forma de ecuación, de la siguiente manera:

$$\oint \delta Q = \frac{1}{J} \oint \delta W \qquad (6\text{-}1)$$

donde el símbolo $\oint$ se refiere a un "integral cíclica" o sea, la integral de la cantidad calculada en un ciclo completo. Los símbolos δQ y δW representan la transferencia diferencial de calor y el trabajo realizado, respectivamente. El operador, δ, se utiliza ya que, tanto la transferencia de calor como el trabajo, son funciones de la trayectoria y la evaluación de las integrales de este tipo requieren del conocimiento de la trayectoria. El operador, d, que nos es más familiar, se usa con una función de "punto". Las propiedades termodinámicas son, por definición, funciones de punto, y se pueden calcular sin necesidad de conocer la trayectoria a lo largo de la cual ocurre el cambio entre los estados inicial y final. La cantidad J es el llamado "equivalente mecánico del calor", el cual es numéricamente igual a 778.17 ft lb/Btu en unidades usadas en la ingeniería. En el sistema **SI**, J = 1 newton–metro/Joule. Este factor no se escribirá de aquí en adelante y se le recuerda al estudiante que todas las ecuaciones deben ser dimensionalmente homogéneas. El estudiante será responsable de tal homogeneidad.

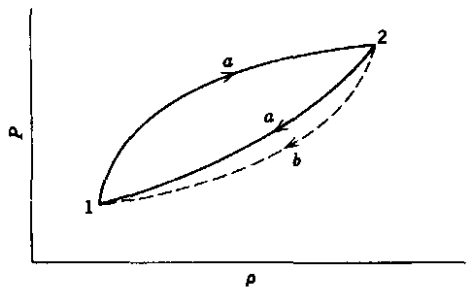


Figura 6.1 Ciclos termodinámicos reversible e irreversible

Ahora se examinará un ciclo termodinámico como el que aparece en la figura 6.1. El ciclo *a* se realiza entre los puntos 1 y 2 a lo largo de las trayectorias indicadas. Si se utiliza la ecuación (6-1) se puede escribir, con relación al ciclo a:

$$\int_{1a}^{2} \delta Q + \int_{2a}^{1} \delta Q = \int_{1a}^{2} \delta W + \int_{2a}^{1} \delta W \qquad (6\text{-}2a)$$

Se postula un nuevo ciclo entre los puntos 1 y 2 en la forma siguiente: la trayectoria entre los puntos 1 y 2 es idéntica a la previa; sin embargo, se completa el ciclo por medio de la trayectoria *b* entre el punto 2 y el 1; esta

Para un estudio más completo de propiedades,funciones de punto y funciones de la trayectoria, se proporciona al estudiante la siguiente referencia: G. N. Hatsopoulos y J. H. Keenan, *Principles of General Thermodynamics. Wiley, New York, 1965, pág. 14.*

trayectoria b es cualquiera que sea diferente de a entre ambos puntos. La ecuación (6–1) nos permite, de nuevo, escribir:

$$\int_{1a}^{2} \delta Q + \int_{2b}^{1} \delta Q = \int_{1a}^{2} \delta W + \int_{2b}^{1} \delta W \tag{6-2b}$$

Restando la ecuación (6–2b) de la ecuación (6–2a), se obtiene:

$$\int_{2a}^{1} \delta Q - \int_{2b}^{1} \delta Q = \int_{2a}^{1} \delta W - \int_{2b}^{1} \delta W$$

la cual puede escribirse:

$$\int_{2a}^{1} (\delta Q - \delta W) = \int_{2b}^{1} (\delta Q - \delta W) \tag{6-3}$$

Ya que cada lado de la ecuación (6–3) representa el integrando calculado entre los mismos dos puntos pero a lo largo de trayectorias diferentes, se deduce que la cantidad $\delta Q - \delta W$, es igual a una función de punto o a una propiedad. A esta propiedad se le designa dE, que es la energía total del sistema. Se puede escribir una ecuación alterna para la primera ley de la termodinámica, así:

$$\delta Q - \delta W = dE \tag{6–4}$$

Los signos δQ y δW fueron especificados en la definición original de la primera ley; δQ es positiva cuando el sistema gana calor; δW es positiva cuando el sistema realiza trabajo.

En un sistema en el cual se está llevando a cabo un proceso que está ocurriendo en el intervalo de tiempo dt, la ecuación (6–4) se puede escribir:

$$\frac{\delta Q}{dt} - \frac{\delta W}{dt} = \frac{dE}{dt} \tag{6–5}$$

Examínese ahora, como se hizo en el capítulo 5, un volumen general de control, fijo en un espacio inercial ubicado en el campo de flujo de un fluido, como puede verse en la figura 6.2. El sistema bajo estudio, marcado por medio de líneas punteadas, ocupa el volumen de control en el tiempo t y su posición también aparece después de haber transcurrido un tiempo Δt.

En esta figura, el sistema ocupa la región I en el instante t, la región II en $t + \Delta t$ y la región III es común al sistema tanto en t como en $t + \Delta t$.

En el tiempo $t + \Delta t$ a energía total del sistema se puede expresar de la siguiente manera:

$$E|_{t+\Delta t} = E_{II}|_{t+\Delta t} + E_{III}|_{t+\Delta t}$$

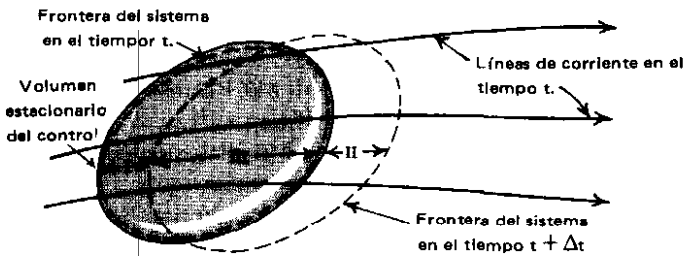


Figura 6.2 Relación entre un sistema y un volumen de control en un campo de flujo de fluidos.

y en instante t:

$$E|_t = E_{\mathrm{I}}|_t + E_{\mathrm{III}}|_t$$

Si se resta la segunda ecuación de la primera y dividiendo entre el intervalo de tiempo transcurrido, Δt, se tendrá:

$$\frac{E|_{t+\Delta t} - E|_t}{\Delta t} = \frac{E_{\mathrm{III}}|_{t+\Delta t} + E_{\mathrm{II}}|_{t+\Delta t} - E_{\mathrm{III}}|_t - E_{\mathrm{I}}|_t}{\Delta t}$$

Si se ordenan los términos y tomando el límite cuando $\Delta t \to 0$, se obtiene:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{E|_{t+\Delta t} - E|_t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{E_{\mathrm{III}}|_{t+\Delta t} - E_{\mathrm{III}}|_t}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{E_{\mathrm{II}}|_{t+\Delta t} - E_{\mathrm{I}}|_t}{\Delta t} \qquad (6\text{–}6)$$

al calcular el límite del lado izquierdo, resultará:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{E|_{t+\Delta t} - E|_t}{\Delta t} = \frac{dE}{dt}$$

lo cual corresponde al lado derecho de la expresión que se escribió para la primera ley, o sea la ecuación (6–5).

Del lado derecho de la ecuación (6–6), el límite se trasforme en:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{E_{\mathrm{III}}|_{t+\Delta t} - E_{\mathrm{III}}|_t}{\Delta t} = \frac{dE_{\mathrm{III}}}{dt}$$

que es la rapidez de cambio de la energía total del sistema, ya que el volumen que el sistema ocupa cuando $\Delta t \to 0$ es precisamente el volumen de control que ese está estudiando.

El segundo límite del lado derecho de la ecuación (6-6), está dado por:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{E_{\mathrm{II}}|_{t+\Delta t} - E_{\mathrm{I}}|_t}{\Delta t}$$

y representa la rapidez neta de la energía que sale a través de la superficie de control en el intervalo de tiempo Δt.

Ya que se les ha dado un sentido físico a cada uno de los términos, debemos ahora ordenar de nuevo la primera ley de la termodinámica de manera que se obtenga una forma que se pueda aplicar a un volumen de control. Se le expresará en los términos siguientes:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Rapidez en el aumento de calor del volumen de control a expensas de la región circundante}\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{l}\text{rapidez de trabajo realizado por el volumen de control sobre su región circundante}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\text{rapidez de energía que abandona el volumen de control debido al flujo de fluido}\end{array}\right\}$$

$$- \left\{\begin{array}{l}\text{rapidez de energía que entra al volumen de control debido al flujo de fluido}\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{l}\text{rapidez de acumulación de energía dentro del volumen de control}\end{array}\right\} \quad (6\text{-}7)$$

Ahora aplicaremos la ecuación (6-7) al volumen general de control de la figura 6.3.

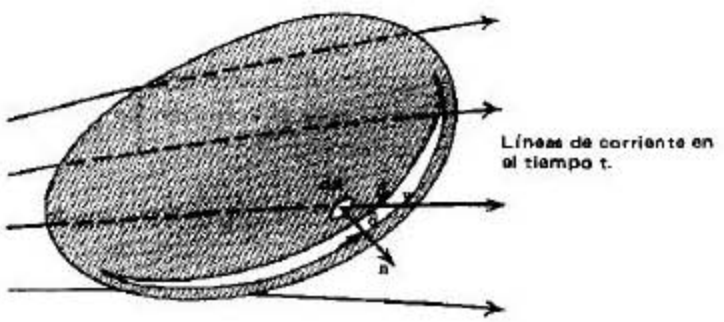


Figura 6.3 Flujo de un fluido a través de un volumen de control.

La rapidez del aumento de calor del volumen de control así como el trabajo realizado por éste, se les expresará así: $\delta Q/dt$ y $\delta W/dt$.

Examine ahora la pequeña área dA que se encuentra sobre la superficie de control. La rapidez de la energía que sale del volumen de control a través de dA, se puede escribir:

$$\text{rapidez de flujo de salida de energía} = e(\rho v)(dA \cos \theta)$$

El producto (ρv) $(dA \cos \theta)$ es la rapidez de flujo de salida de masa del volumen de control a través de dA, como se vio en los capítulos previos. La cantidad e es la energía específica, o sea, la energía por unidad de masa. La

energía específica incluye: la energía potencial, gy, que es la función de la posición del continuo de fluido, en el campo gravitacional, la energía cinética del fluido, $v^2/2$, ocasionada por su velocidad y la energía interna, u, de fluido, debida a su estado térmico.

La cantidad $dA \cos\theta$ representa el área dA proyectada en forma normal al vector velocidad, v. Teta (θ) es el ángulo formado entre v y el vector perpendicular dirigido hacia afuera, n. Ahora se puede escribir:

$$e(\rho v)(dA \cos\theta) = e\rho\, dA[|\mathbf{v}|\,|\mathbf{n}|]\cos\theta = e\rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\, dA$$

que, como se puede ver, es semejante, en cuanto a su forma, a las expresiones que anteriormente obtuvimos para la masa y el momento. La integral de esta cantidad calculada sobre la superficie de control,

$$\iint_{\text{c.s.}} e\rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\, dA$$

representa el flujo neto de salida de la energía del volumen de control. El signo del producto escalar, v.n. está de acuerdo con el flujo de salida de masa así como el flujo de entrada de la misma através de la superficie de control, como se vio anteriormente. Por lo tanto, los dos primeros términos que aparecen en el lado derecho de la ecuación (6-7), se pueden calcular en la siguiente forma:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{rapidez de la energía que}\\ \text{se sale del volumen de}\\ \text{control}\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{l}\text{rapidez de la energía}\\ \text{que entra al volumen}\\ \text{de control}\end{array}\right\} = \iint_{\text{c.s.}} e\rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\, dA$$

La rapidez de acumulación de energía dentro del volumen de control se puede escribir:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\text{c.v.}} e\rho\, dV$$

La ecuación (6-7) se puede escribir ahora:

$$\frac{\delta Q}{dt} - \frac{\delta W}{dt} = \iint_{\text{c.s.}} e\rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\, dA + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\text{c.v.}} e\rho\, dV \qquad (6\text{-}8)$$

Después de hacer análisis más detallado de la rapidez de trabajo o término de la potencia, $\delta W/dt$, se puede obtener una forma final para la expresión de la primera ley.

Hay tres tipos de trabajo incluidos en el término para la rapidez de trabajo. El primero de ellos es el trabajo de flecha, W_s, que es el realizado por el volumen de control sobre la región circundante tal que haría girar una flecha

o podría levantar un peso y llevarlo a cierta distancia. El segundo tipo de trabajo es el trabajo de flujo, W_σ, que es aquél trabajo realizado sobre la región circundante para vencer los esfuerzos normales existentes en la superficie de control, donde hay flujo de fluido. El tercer tipo de trabajo se llama trabajo cortante, W_τ, que es el que realiza sobre la región circundante para vencer los esfuerzos cortantes que hay en la superficie de control.

Si se analiza la rapidez de flujo y de trabajo cortante de nuestro volumen de control, se tendrá, como puede verse en la figura 6.4, otro efecto sobre la porción elemental de la superficie de control, dA. El vector S es la intensidad de la fuerza (esfuerzo) cuyas componentes son σ_{ii} y τ_{ij} en direcciones normales y tangencial a la superficie, respectivamente. En términos de S la fuerza ejercida sobre dA es $\mathbf{S}\,dA$ y la rapidez de trabajo realizado por el fluido que fluye a través de dA es $\mathbf{S}\,dA$. v.

La rapidez neta de trabajo realizado por el volumen de control sobre su región circundante debido a la presencia de S, es:

$$-\iint_{\text{c.s.}} \mathbf{v}\cdot\mathbf{S}\,dA$$

donde el signo negativo resulta del hecho de que la furza por unidad de área ejercida *sobre la región* circundante es $-\mathbf{S}$.

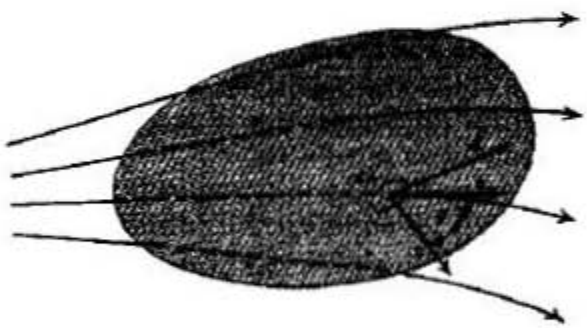


Figura 6.4 Flujo y trabajo cortante para un volumen general de control.

La ecuación para la primer ley puede, ahora, escribirse así:

$$\frac{\delta Q}{dt}-\frac{\delta W_s}{dt}+\iint_{\text{c.s.}} \mathbf{v}\cdot\mathbf{S}\,dA=\iint_{\text{c.s.}} e\rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dA+\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\text{c.v.}} e\rho\,dV \qquad (6\text{-}9)$$

donde $\delta W/dt$ es la rapidez del trabajo de flecha.

Si se escriben las componentes del esfuerzo normal de S como $\sigma_{ii}\mathbf{n}$, se obtendrá, para la rapidez neta de trabajo realizado para vencer el esfuerzo normal:

$$\left(\iint_{\text{c.s.}} \mathbf{v}\cdot\mathbf{S}\,dA\right)_{\text{normal}}=\iint_{\text{c.s.}} \mathbf{v}\cdot\sigma_{ii}\mathbf{n}\,dA=\iint_{\text{c.s.}} \sigma_{ii}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dA$$

La parte restante del trabajo, que se va a calcular, es la necesaria para vencer los esfuerzos cortantes. Esta porción de la rapidez requerida de trabajo, $\delta W_\tau/dt$, se convierte en una forma que no es capaz de realizar trabajo mecánico. Este término, que representa una pérdida de energía mecánica, se escribirá en la forma de derivada dada anteriormente e incluiremos su análisis en el ejemplo 3, posteriormente. La rapidez de trabajo se transforma, ahora, en:

$$\frac{\delta W}{dt} = \frac{\delta W_s}{dt} + \frac{\delta W_\sigma}{dt} + \frac{\delta W_\tau}{dt}$$
$$= \frac{\delta W_s}{dt} - \iint_{\text{c.s.}} \sigma_{ii}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dA + \frac{\delta W_\tau}{dt}$$

Al sustituir este valor en la ecuación (6-9) resulta:

$$\frac{\delta Q}{dt} - \frac{\delta W_s}{dt} + \iint_{\text{c.s.}} \sigma_{ii}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dA - \frac{\delta W_\tau}{dt} = \iint_{\text{c.s.}} e\rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dA + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\text{c.v.}} e\rho\,dV$$

El término que incluye esfuerzo normal debe presentarse ahora en una forma más útil. En el capítulo 9 daremos una expresión completa para σ_{ii}. Por ahora simplemente se dirá que el término que corresponde al esfuerzo normal es la suma de los efectos de presión y viscosos. Igual que en el trabajo cortante, el trabajo realizado para vencer a la porción viscosa del esfuerzo normal no puede usarse para realizar trabajo mecánico. Por lo tanto, se combinará el trabajo asociado con la porción viscosa del esfuerzo normal, con el trabajo cortante, para obtener un solo término, $\delta W\mu/dt$, la rapidez de trabajo realizado para vencer los efectos viscosos en la superficie de control. El subíndice, μ, se utiliza para hacer esta distinción.

La parte restante del término que corresponde al esfuerzo normal, o sea, la asociada con la presión, se puede escribir de manera ligeramente diferente, si recordamos que el esfuerzo global, $\bar{\sigma}_{ii}$, es el negativo de la presión termodinámica, P. Los términos para el trabajo cortante y para el flujo de trabajo, se pueden escribir en la siguiente forma:

$$\iint_{\text{c.s.}} \sigma_{ii}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dA - \frac{\delta W_\tau}{dt} = -\iint_{\text{c.s.}} P(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dA - \frac{\delta W_\mu}{dt}$$

Al combinar esta ecuación con la que se escribió anteriormente, y reordenar ligeramente, se obtendrá la forma final de la expresión de la primera ley:

$$\frac{\delta Q}{dt} - \frac{\delta W_s}{dt} = \iint_{\text{c.s.}} \left(e + \frac{P}{\rho}\right)\rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dA + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\text{c.v.}} e\rho\,dV + \frac{\delta W_\mu}{dt} \qquad (6\text{-}10)$$

Las ecuaciones (6-10), (4-1) y (5-4) constituyen las relaciones básicas para el análisis de los fluidos vía el enfoque de volumen de control. La comprensión absoluta de estas tres ecuaciones, así como la maestría en su aplicación, ponen a disposición del estudiante medios muy poderosos para el análisis de los problemas con los que tenemos que enfrentarnos más a menudo al estudiar el flujo de los fluidos.

En los siguientes problemas que se presentan como ejemplo, se utilizará el equilibrio de la energía total.

6.2 APLICACIONES DE LA EXPRESION INTEGRAL

EJEMPLO 1

Como primer ejemplo se escogerá un volumen de control como el que puede apreciarse en la figura 6.5, bajo las condiciones de: flujo permanente de un fluido y sin pérdidas debidas a la fricción.

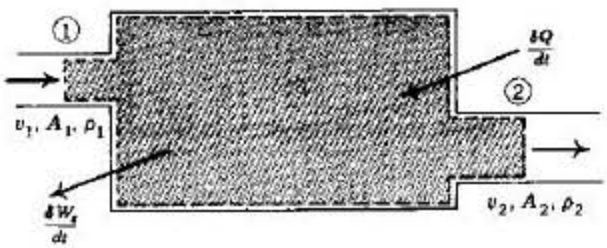


Figura 6.5 Volumen de control con flujo unidimensional a través de las fronteras

En las condiciones especificadas, la expresión que corresponde la energía total, ecuación (6-10), se transforma en:

$$\frac{\delta Q}{dt} - \frac{\delta W_s}{dt} = \iint_{c.s.} \rho\left(e + \frac{P}{\rho}\right)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, dA + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{c.v.} e\rho\, dV + \frac{\delta W_\mu}{dt}$$

0—steady flow; 0

Si se presta atención a la integral de superficie, se verá que el producto $\rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})dA$ es la rapidez de flujo de masa y de que el signo de este producto indica si el flujo de masa ocurre hacia adentro o hacia afuera del volumen de control, dependiendo del sentido de $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$. El factor por el cual está multiplicada la rapidez de masa, o sea, $e + P/\rho$, representa los tipos de energía que pueden entrar o salir de volumen de control por masa de fluido. La energía específica total, e, se puede expander para que incluya las contribuciones de las energías: cinética potencial e interna, de tal manera que:

$$e + \frac{P}{\rho} = gy + \frac{v^2}{2} + u + \frac{P}{\rho}$$

Ya que la masa únicamente entra al volumen de control en la sección (1) y sale en la (2), la integral de superficie se transforma en:

$$\iint_{c.s.} \rho\left(e+\frac{P}{\rho}\right)(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dA = \left[\frac{v_2^2}{2}+gy_2+u_2+\frac{P_2}{\rho_2}\right](\rho_2 v_2 A_2) - \left[\frac{v_1^2}{2}+gy_1+u_1+\frac{P_1}{\rho_1}\right](\rho_1 v_1 A_1)$$

En el capítulo 4 encontramos que en esta misma situación, el equilibrio de la masa era:

$$\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2$$

la expresión que corresponde a la energía, en este ejemplo, es:

$$\frac{\delta Q}{dt}-\frac{\delta W_s}{dt} = \left[\frac{v_2^2}{2}+gy_2+u_2+\frac{P_2}{\rho_2}\right](\rho_2 v_2 A_2) - \left[\frac{v_1^2}{2}+gy_1+u_1+\frac{P_1}{\rho_1}\right](\rho_1 v_1 A_1)$$

Si ahora se divide cada uno de los términos de la expresión anterior entre la rapidez de flujo de masa, se obtendrá la expresión:

$$\frac{q-\dot{W}_s}{\dot{m}} = \left[\frac{v_2^2}{2}+gy_2+u_2+\frac{P_2}{\rho_2}\right]-\left[\frac{v_1^2}{2}+gy_1+u_1+\frac{P_1}{\rho_1}\right]$$

o la ecuación más familiar:

$$\frac{v_1^2}{2}+gy_1+h_1+\frac{q}{\dot{m}} = \frac{v_2^2}{2}+gy_2+h_2+\frac{\dot{W}_s}{\dot{m}}$$

donde la suma de la energía interna y el flujo de energía, o sea $u + P/\rho$ ha sido reeemplazada por la entalpía, h, que es igual a la suma de estas cantidades, por definición:

$$h \equiv u + P/\rho.$$

EJEMPLO 2

Como segundo ejemplo, considérese la situación que aparece en la figura 6.6. Si fluye agua en condiciones continuas en las que la bomba entrega 3 caballos de fuerza al fluido, encuentre la rapidez de flujo de masa si se desprecian las pérdidas debidas a la fricción.

Si se define el volumen de control marcado por medio de líneas punteadas, se podrán calcular los términos de la ecuación de uno en uno, en la forma siguiente:

$$\frac{\delta Q}{dt} = 0$$

$$\frac{\delta W_s}{dt} = (3\text{ hp})(2545\text{ Btu/hp hr})(778\text{ ft-lb}_f\text{/Btu})(\text{hr}/3600\text{ s})$$

$$= 1650\text{ ft lb}_f\text{/s}$$

$$\iint_{c.s.} \left(e+\frac{P}{\rho}\right)\rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dA = \iint_{A_2} \left(e+\frac{P}{\rho}\right)\rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dA + \iint_{A_1} \left(e+\frac{P}{\rho}\right)\rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dA$$

$$= \left(\frac{v_2^2}{2}+gy_2+u_2+\frac{P_2}{\rho_2}\right)(\rho_2 v_2 A_2)$$

$$-\left(\frac{v_1^2}{2}+gy_1+u_1+\frac{P_1}{\rho_1}\right)(\rho_1 v_1 A_1)$$

$$= \left[\frac{v_2^2-v_1^2}{2}+g(y_2-y_1)+(u_2-u_1)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{P_2}{\rho_2}-\frac{P_1}{\rho_1}\right)\right](\rho v A)$$

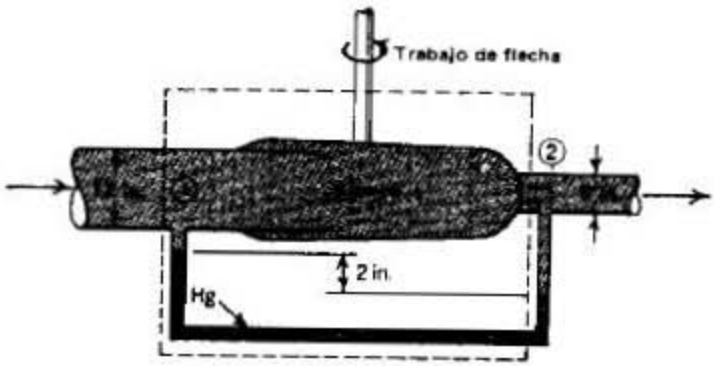


Figura 6.6 Control de volumen para el punto de análisis

Aquí debe notarse que la presión medida en la región (1) es la presión estática, en tanto que la presión medida en la región 2 es la presión de estancamiento, definida en la siguiente forma: $P_{\text{estancamiento}} \equiv P_0 \equiv P_{\text{estática}} + {}^1/_2\,\rho V^2$ a un fluido incompresible. Por lo tanto, se obtiene:

$$= \left(\frac{P_{0_2}-P_1}{\rho}-\frac{v_1^2}{2}\right)(\rho v A)$$

$$= \left\{\frac{2(1-1/13.6)\text{ in. Hg}(14.7\text{ lb/in.}^2)(144\text{ in.}^2/\text{ft}^2)}{(62.4\text{ lb}_m/\text{ft}^3)(29.92\text{ in. Hg})}\right.$$

$$\left.-\frac{v_1^2}{64.4\,(\text{lb}_m\,\text{ft/s}^2\,\text{lb}_f)}\right\}\{(62.4\text{ lb}_m/\text{ft}^3)(v_1)(\pi/4\ ft^2)\}$$

$$= \left(2.27-\frac{v_1^2}{64.4}\right)(49v_1)\text{ ft lb}_f/\text{s}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{c.v.} e\rho\,dV = 0$$

$$\frac{\delta W_s}{dt} = 0$$

Cuando se calculó la integral de superficie, la elección del volumen de control coincidió con la colocación de los medidores de presión en las regiones (1) y (2). La presión medida en la región (1) es la presión estática, ya que la abertura del manómetro es paralela a la dirección de flujo del fluido. Sin embargo, en la sección (2) la abertura del manómetro es normal a la corriente de flujo del fluido. La presión medida por medio de este arreglo incluye, tanto a la presión del fluido estático como a la presión que resulta cuando el fluido que fluye con una velocidad v_2, se detiene. La suma de ambas cantidades se llama presión de impacto.

El cambio de la energía potencial es igual a cero entre las regiones (1) y (2), y como el flujo se ha considerado isotérmico, la variación en la energía interna también vale cero. Por lo tanto, la integral de superficie se reduce a la forma simple que ya se ha indicado.

La rapidez de flujo de agua que se necesita para que existan las condiciones establecidas se logra resolviendo la ecuación cúbica resultante. La solución es:

$$v_1 = 16.65 \text{ fps } (5.075 \text{ m/s})$$

$$\dot{m} = \rho A v = 815 \text{ lb}_m/\text{s } (370 \text{ kg/s})$$

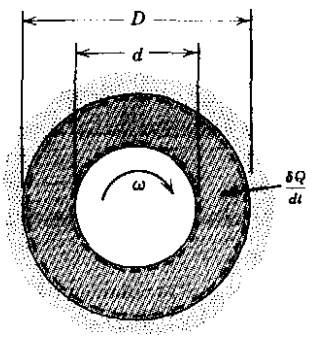


Figura 6.7 Buje y volumen de control para el análisis del buje

EJEMPLO 3

Una flecha gira con una velocidad angular constante, ω, en el cojinete que aparece en la figura 6.7. El diámetro del eje es d y el esfuerzo cortante que actúa sobre el eje es τ. Encuentre la rapidez con la que debe quitarse energía al cojinete para que la temperatura del lubricante que hay entre el eje que gira y la superficie estacionaria del cojinete permanezca constante. Supóngase que la flecha tiene poco peso y es concétrico con el buje.

El volumen de control elegido consiste en una unidad de longitud de fluido que rodea a la flecha. Como puede verse en la figura 6.7. La primera ley de la termodinámica que corresponde al volumen de control es:

$$\frac{\delta Q}{dt} - \frac{\delta W_s}{dt} = \iint_{c.s.} \rho\left(e + \frac{P}{\rho}\right)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, dA + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{c.v.} \rho e\, dV + \frac{\delta W_\mu}{dt}$$

Se puede observar, en la figura, lo siguiente:

1. El fluido no atraviesa la superficie de control.
2. El trabajo de la flecha no atraviesa la superficie de control.
3. El flujo es permanente.

Así pues, $\delta Q/dt = \delta W_\mu/dt = \delta W_v/dt$. Vamos a determinar la rapidez de trabajo viscoso. En este caso, todo el trabajo viscoso se realiza para vencer los esfuerzos cortantes; por lo tanto, el trabajo viscoso es $\iint_{c.s.} \tau(\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_t)\,dA$. En la frontera experior, $v = 0$ y en la interior $\iint_{c.s.} \tau(\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_t)\,dA = -\tau(\omega d/2)A$. donde e indica el sentido del esfuerzo cortante, τ, sobre la región circundante. El signo resultante es consistente con el concepto de trabajo, siendo positivo cuando es realizado por un sistema sobre su región circundante. Por esto:

$$\frac{\delta Q}{dt} = -\tau\frac{\omega d^2\pi}{2}$$

que es la rapidez de transferencia de calor que se requiere para mantener al lubricante a una temperatura constante.

Si no se quitara energía del sistema, entonces $\delta Q/dt = 0$, and

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{c.v.} e\rho\,dV = -\frac{\delta W_\mu}{dt}$$

Ya que sólo la energía interna del lubricante aumentará con respecto al tiempo,

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{c.v.} e\rho\,dV = \rho\pi\left(\frac{D^2-d^2}{4}\right)\frac{du}{dt} = -\frac{\delta W_\mu}{dt} = \omega\frac{d^2\pi}{2}\tau$$

o sea, con un calor específico constante, c:

$$c\frac{dT}{dt} = \frac{2\tau\omega d^2}{\rho(D^2-d^2)}$$

donde D es el diámetro exterior del buje.

En este ejemplo se ha explicado la utilización del término trabajo viscoso. Nótese que:

1. El término trabajo viscoso sólo incluye cantidades que se encuentran sobre la superficie del volumen de control.
2. Cuando la velocidad desarrollada sobre la superficie del volumen de control es nula, el valor del término trabajo viscoso es cero.

6.3 LA ECUACION DE BERNOULLI

Bajo ciertas condiciones de flujo, la expresión para la primera ley de la termodinámica, aplicada a un volumen de control, se reduce a una relacón utilísima conocida como ecuación de Bernoulli.

Si se aplica la ecuación (6-10) a un volumen de control (como ocurre en la figura 6.8 en la cual el flujo sea permanente, incompresible y no viscoso, y en el cual no ocurra ninguna transferencia de calor ni cambio en la energía interna, al evaluar la ecuación (6-10) obtendremos el resultado siguiente:

$$\frac{\delta Q}{dt} = 0$$

$$\frac{\delta W_s}{dt} = 0$$

$$\iint_{c.s.} \rho\left(e+\frac{P}{\rho}\right)(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dA = \iint_{A_1} \rho\left(e+\frac{P}{\rho}\right)(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dA + \iint_{A_2} \rho\left(e+\frac{P}{\rho}\right)(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dA$$

$$= \left(gy_1+\frac{v_1^2}{2}+\frac{P_1}{\rho_1}\right)(-\rho_1 v_1 A_1) + \left(gy_2+\frac{v_2^2}{2}+\frac{P_2}{\rho_2}\right)(\rho_2 v_2 A_2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{c.v.} e\rho\,dV = 0$$

La expresión para la primera ley, se ha transformado, ahora, en:

$$0 = \left(gy_2+\frac{v_2^2}{2}+\frac{P_2}{\rho}\right)(\rho v_2 A_2) - \left(gy_1+\frac{v_1^2}{2}+\frac{P_1}{\rho}\right)(\rho v_1 A_1)$$

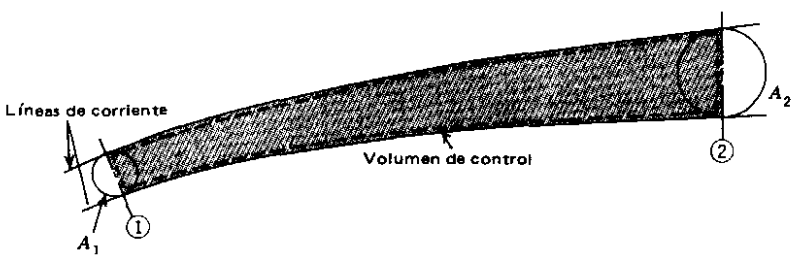


Figura 6.8 Volumen de control para flujo permanente, incompresible, no viscoso e isotérmico.

Como el flujo es permanente, la ecuación de continuidad da como resultado:

$$\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2$$

La cual puede dividirse para obtener:

$$gy_1+\frac{v_1^2}{2}+\frac{P_1}{\rho} = gy_2+\frac{v_2^2}{2}+\frac{P_2}{\rho} \qquad (6\text{-}11a)$$

Dividiendo la ecuación entre g, tenemos:

$$y_1+\frac{v_1^2}{2g}+\frac{P_1}{\rho g} = y_2+\frac{v_2^2}{2g}+\frac{P_2}{\rho g} \qquad (6\text{-}11b)$$

Cualquiera de las dos ecuaciones anteriores se llama ecuación de Bernoulli.

Note que cada uno de los términos de la ecuación (6-11b) tiene la unidad de longitud. Con frecuencia a las cantidades se les llama "carga" debido a la elevación, a la velocidad y a la presión, respectivamente. Estos términos, tanto individual como conjuntamente indican las cantidades que se pueden convertir directamente para producir energía mecánica.

La ecuación (6-11) se puede interpretar físicamente. Su significado es que la energía total se conserva para un volumen de control que satisfaga las condiciones en las que se basa esta relación, esto es, deber ser: permanente, incompresible, no viscoso, de flujo isotérmico, sin transferencia de energía y sin que se realice ningún trabajo. Estas condiciones pueden parecer demasiado restrictivas pero ocurren (o casi ocurre) en muchos sistemas físicos. Una de dichas situaciones de valor práctico es aquella en la que entra o sale un flujo de corriente de un conducto. Ya que los conductos son de diversos tamaños, la ecuación de Bernoulli puede describir realmente la variación en la elevación, velocidad y carga de presión de un punto a otro en un campo de flujo de fluidos. También es de esperarse que esta consideración vaya de un enfoque diferencial a las leyes generales del flujo de fluidos y esto es precisamente lo que ocurre.

En la figura 6.9 está dibujado un ejemplo clásico de la aplicación de la ecuación de Bernoulli, en la cual se desea encontrar la velocidad del flujo que sale del tanque.

El volumen de control está marcado en la figura por medio de líneas punteadas. La frontera superior del volumen de control está inmediatamente debajo de la superficie del fluido y por lo tanto puede considerarse que está a la misma altura que éste. Hay un flujo de fluido a través de esta superficie,

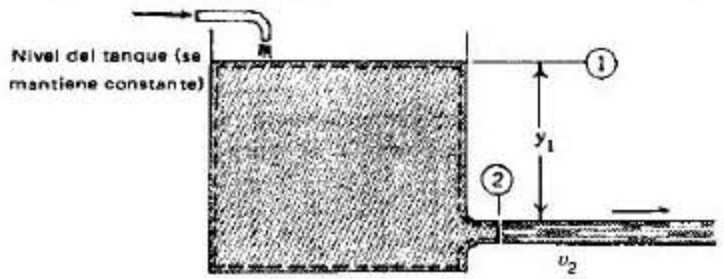


Figura 6.9 Volumen de control para el análisis de la ecuación de Bernoulli.

pero el área superficial es lo suficientemente grande como para que podamos considerar la velocidad de este fluido como despreciable.

Bajo estas condiciones, la forma de la primera ley de la termodinámica que debemos emplear es la ecuación (6-11), la ecuación de Bernoulli.

Si se aplica la ecuación (6-11), se tiene:

$$y_1 + \frac{P_{atm}}{\rho g} = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{P_{atm}}{\rho g}$$

a partir de lo cual se puede expresar la velocidad de salida en la forma, más conocida,

$$v_2 = \sqrt{2gy}$$

Como ejemplo final de la aplicación de las relaciones de volumen de control, se presentará, ahora, un problema en el cual se utilizarán las tres expresiones.

EJEMPLO 4

En el conducto de la figura (6-10), el cual presenta un ensanchamiento abrupto, la presión que actúa sobre la región (1) se considera uniforme y su valor, es P_1. Encuentre el cambio de energía interna entre las regiones (1) y (2) para un flujo permanente e incompresible. Desprecie el esfuerzo cortante que actúa sobre las paredes y exprese $u_2 - u_1$ en términos de v_1, A_1, and A_2. El volumen de control escogido está indicado por medio de líneas punteadas.

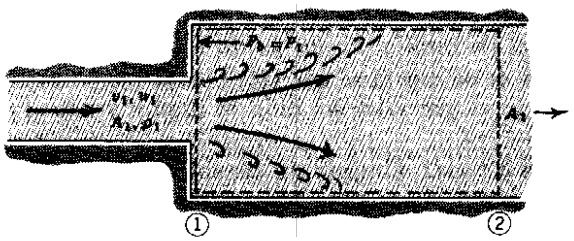


Figura 6.10 Flujo a través de un ensanchamiento abrupto.

Conservación de la masa

$$\iint_{c.s.} \rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dA + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{c.v.} \rho\,dV = 0$$

Si se escoge la región (2) a una distancia considerable a partir del ensanchamiento abrupto en la dirección del flujo, la expresión de continuidad para un flujo permanente e incompresible, se transforma en:

$$\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2$$

o

$$v_2 = v_1 \frac{A_1}{A_2} \tag{6-12}$$

Momento

$$\sum \mathbf{F} = \iint_{c.s.} \rho\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dA + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{c.v.} \rho\mathbf{v}\,dV$$

por lo que:

$$P_1 A_2 - P_2 A_2 = \rho {v_2}^2 A_2 - \rho {v_1}^2 A_1$$

o

$$\frac{P_1 - P_2}{\rho} = {v_2}^2 - {v_1}^2\left(\frac{A_1}{A_2}\right) \tag{6-13}$$

Energía

$$\frac{\delta Q}{\partial t} - \frac{\delta W_s}{dt} = \iint_{c.s.} \rho\left(e + \frac{P}{\rho}\right)(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dA + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{c.v.} \rho e\,dV + \frac{\delta W_\mu}{dt}$$

Por lo que:

$$\left(e_1+\frac{P_1}{\rho}\right)(\rho v_1 A_1)=\left(e_2+\frac{P_2}{\rho}\right)(\rho v_2 A_2)$$

O, ya que: $\rho v_1 A_1=\rho v_2 A_2$.

$$e_1+\frac{P_1}{\rho}=e_2+\frac{P_2}{\rho}$$

La energía específica es:

$$e=\frac{v^2}{2}+gy+u$$

Por lo que la expresión que corresponde a la energía se transforma en:

$$\frac{v_1^2}{2}+gy_1+u_1+\frac{P_1}{\rho}=\frac{v_2^2}{2}+gy_2+u_2+\frac{P_2}{\rho} \tag{6-14}$$

Las tres expresiones correspondientes al volumen de control se pueden combinar, ahora, para calcular u_2-u_1. De la ecuación (6-14), se obtiene:

$$u_2-u_1=\frac{P_1-P_2}{\rho}+\frac{v_1^2-v_2^2}{2}+g(y_1-y_2) \tag{6-14a}$$

Al susbstituir la ecuación (6-13) por $(P_1-P_2)/\rho$ y (6-12) por v_2, y como $y_1=y_2$,, se obtiene:

$$u_2-u_1=v_1^2\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2-v_1^2\frac{A_1}{A_2}+\frac{v_1^2}{2}-\frac{v_1^2}{2}\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2$$

$$=\frac{v_1^2}{2}\left[1-2\frac{A_1}{A_2}+\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2\right]=\frac{v_1^2}{2}\left[1-\frac{A_1}{A_2}\right]^2$$

La ecuación (6-15) demuestra que la energía interna aumenta en el ensanchamiento. El cambio de temperatura corrrespondiente a este cambio en la energía interna es insignificante, pero de la ecuación (6-14a) se puede deducir que el cambio en la carga total:

$$\left(\frac{P_1}{\rho}+\frac{v_1^2}{2}+gy_1\right)-\left(\frac{P_2}{\rho}+\frac{v_2^2}{2}+gy_2\right) \tag{6-15}$$

es igual al cambio en la energía interna. En concordancia con lo anterior, el cambio de energía interna en un flujo incompresible se conoce con la pérdida de la carga, h_L, y la ecuación de energía correspondiente a un flujo permanente, adiabático e incompresible en un conducto se puede escribir:

$$\frac{P_1}{\rho g}+\frac{v_1^2}{2g}+y_1=h_L+\frac{P_2}{\rho g}+\frac{v_2^2}{2g}+y_2 \tag{6-16}$$

Nótese la semejanza con la ecuación (6-11)

6.4 CONCLUSION

En este capítulo se ha utilizado la primera ley de la termodinámica, que es la tercera de las relaciones fundamentales sobre las cuales se basa el análisis del flujo de fluidos, para obtener una expresión integral para el principio de conservación de la energía con respecto a un volumen de control. La expresión resultante, la ecuación (6-10) es, junto con las ecuaciones (4-1) y (5-4), una de las expresiones fundamentales para el análisis, por medio del volumen de control, de los problemas relacionados con el flujo de fluidos.

La ecuación de Bernoulli, ecuación (6-11), es un caso especial de la expresión integral para el principio de conservación de la energía. Aunque su forma es simple y es fácil de usar, esta expresión tiene gran aplicación a las situaciones físicas.

6.6

PROBLEMAS

6.7

6.1 Fluye agua de mar, $\rho = 1025$ kg/m^3, a través de una bomba a 0.14 m^3/seg. La entrada de la bomba mide 0.25 m de diámetro. En la estrada, la presión es de -0.15 m de mercurio. La presión en la salida es de 175 KPa. Si las temperaturas de entrada y salida son iguales, ¿qué cantidad de potencia agrega la bomba al fluido?

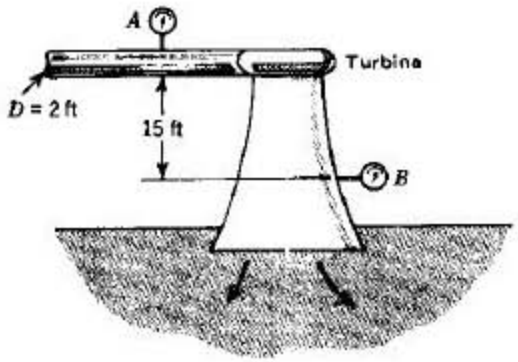
6.2 Se calienta un líquido en un tubo vertical de diámetro constante y de 15 m de longitud. El flujo ocurre hacia arriba. A la entrada la velocidad promedio es de 1 m/seg; la presión, de 340,000 Pa y la densidad, de 1,001 kg/m^3. Si el aumento de energía interna es de 200,000 J/kg, encuentre la cantidad calor que se ha agregado al fluido.

6.3 Fluye aire a 70° F en un depósito de 10 ft^3 con una velocidad de 90 fps. Si la presión en el depósito es de 14 psig y su temperatura de 70° F, encuentre la rapidez de aumento de la temperatura dentro del depósito. Suponga que el aire que entra está a la presión del depósito y fluye a través de un tubo de 3 in de diámetro.

6

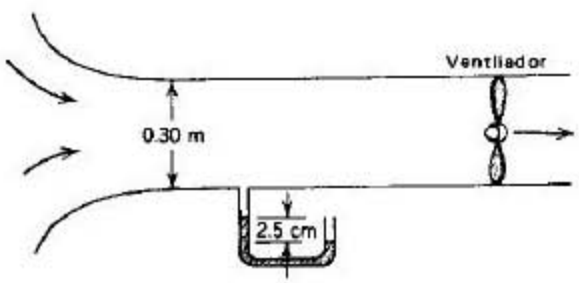
6.4 Fluye agua a través de un tubo horizontal de 2 in de diámetro con una rapidez de flujo de 35 gal/min. La transferencia de calor al tubo puede despreciarse y las fuerzas debidas a la fricción ocasionan una caída de presión de 10 psi. ¿Cuál es el cambio de temperatura del agua?

6.5 Durante el flujo de 200 ft^3/seg de agua por la turbina hidráulica que aparece en la figura, la presión que indica el manómetro A es de 12 psig. ¿Cuál debería ser la lectura del manómetro B si la turbina libera 600 hp con una eficiencia del 82%? El propósito del manómetro B es medir la presión total, esto es, $P + \rho v^2/2$ para un fluido incompresible.

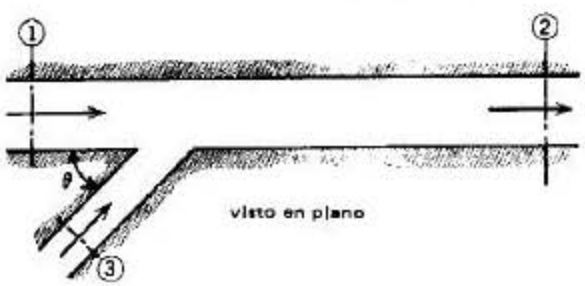


6.6 Durante la prueba de una bomba centrífuga, un manómetro de Bourdon que se encuentra inmediantamente afuera de la cubierta del tubo de succión de 12 in. de diámetro, registra una lectura de 40 psig. El tubo de descarga está a 5 ft sobre el tubo de succión. La descarga de agua a través de la bomba es de 4 ft/seg. Calcule el número de caballos de potencia de entrada de la bomba de prueba.

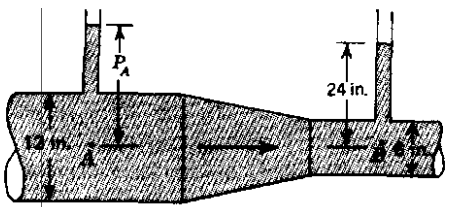
6.7 Un ventilador succiona aire de la atmósfera a través de un conducto circular de 0.30 m de diámetro que tiene una entrada suavemente redondeada. El manómetro diferencial conectado a una abertura que hay en la pared del conducto registra una presión del vacío de 2.5 cm de agua. La densidad del aire es de 1.22 kg/m^3. Determine la rapidez de flujo del volumen de aire al conducto, en pies cúbicos por segundo. ¿Cuál es el rendimiento de salida, en caballos de fuerza, del ventilador?



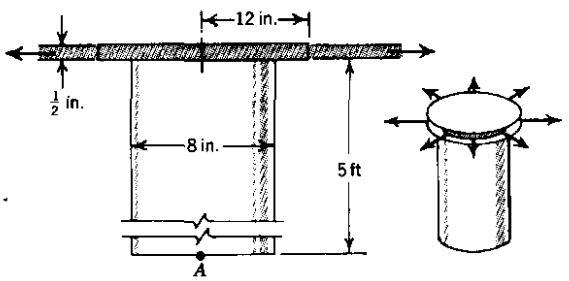
6.8 Encuentre el cambio de temperatura entre las regiones (1) y (2) en función de las cantidades A_1, A_3, v_1, v_3, c_v y θ. La energía interna está dada por c_vT. El fluido es agua y $T_1 = T_3$, $P_1 = P_3$.



6.9 Un líquido fluye de A a B, en la tubería horizontal que aparece en la figura, con una rapidez de 2 ft^3 /seg y una pérdida, debida a la fricción, de 0.15 ft de flujo de fluido. ¿Cuál será la carga de presión A para una carga de presión de 24 in en B?



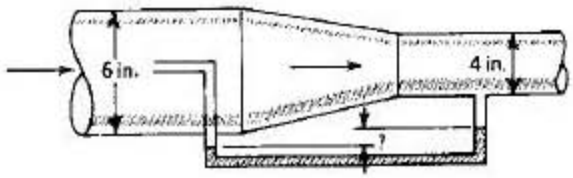
6.10 Fluye agua constantemente hacia arriba de un tubo vertical y después se deflecta para salir hacia afuera con una velocidad radial uniforme. Si se desprecia la fricción, ¿cuál es la rapidez de flujo de agua a través del tubo si la presión en A es de 10 psig?



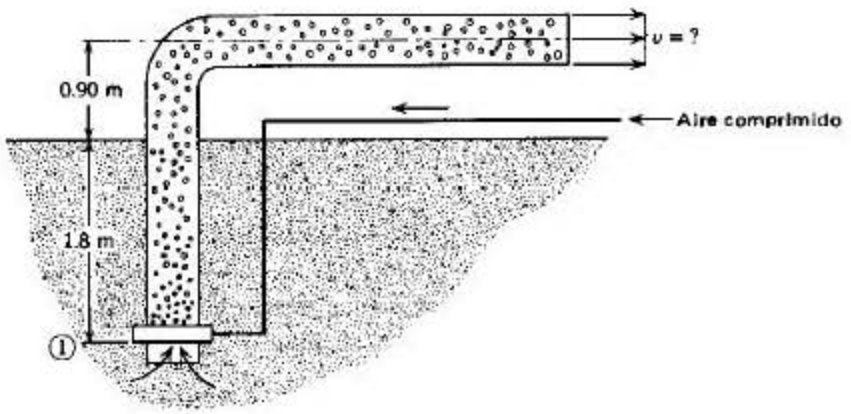
6.11 En el problema 6.10, calcule la fuerza hacia arriba, debida al aire y al agua, ejercida sobre el aparato. Use los resultados del problema 6.10 así como cualesquiera otros datos que pueda usted necesitar de ese problema. Explique por qué no es conveniente aquí utilizar la ecuación de Bernoulli para calcular la fuerza.

6.12 Un medidor Venturi cuyo diámetro de entrada es de 0.5 está hecho para trabajar con 6 m^3 /seg de aire estándar. ¿Cuál es el diámetro requerido en la garganta si se desea que este flujo registre una lectura de 0.10 de alcohol en un manómetro diferencial conectado a la entrada y a la garganta? Puede tomarse la gravedad específica del alcohol como 0.8.

6.13 Fluye agua a través de la contracción del tubo de la figura, con una rapidez de 1 ft^3/seg. Calcule la lectura del manómetro diferencial en pulgadas de mercurio, suponiendo que no hay ninguna pérdida de energía en el flujo. Asegúrese de indicar la dirección correcta de la lectura del manómetro.

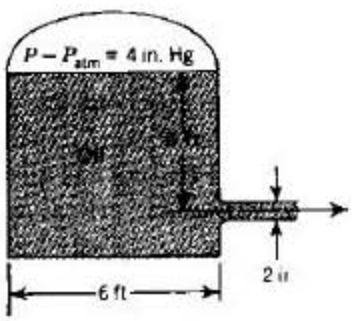


6.14 La figura muestra la operación de una bomba de aire. Se fuerza la entrada de aire en una cámara perforada para que se mezcle con el agua de tal modo que la

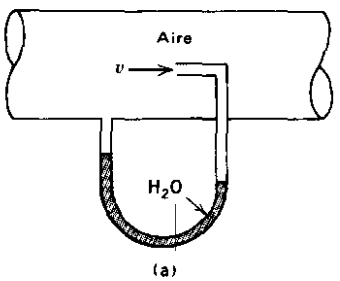


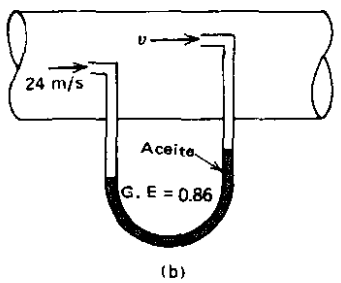
gravedad específica de la mezcla de aire y agua por encima de la entrada de aire sea de 0.5. Despreciando cualesquiera caídas depresión a través de la sección (1), cualcule la velocidad de descarga, v, de la mezcla formada por aire y agua. ¿Puede usarse la ecuación de Bernoulli a través de la sección (1)?

6.15 El tanque a presión que puede verse en la figura, tiene una sección transversal de 6 ft de diámetro. Se saca aceite a través de una boquilla de 2 in. de diámetro en uno de los lados del tanque. Suponiendo que se mantiene constante la presión del aire, ¿cuánto tiempo se necesita para que la superficie del aceite baje 2 ft? La gravedad específica del aceite que está en el tanque es de 0.75 y la del mercurio es de 13.6.



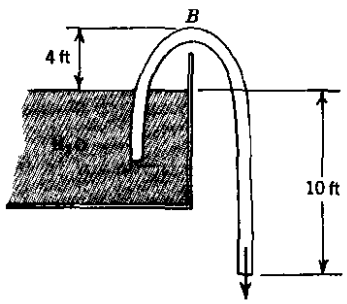
6.16 Fluye aire, cuya densidad es de 1.21 kg/m^3, como puede verse en la figura. Si v = 24 m/seg, calcule las lecturas de los manómetros que aparecen en los puntos a y b, en la figura.





6.20

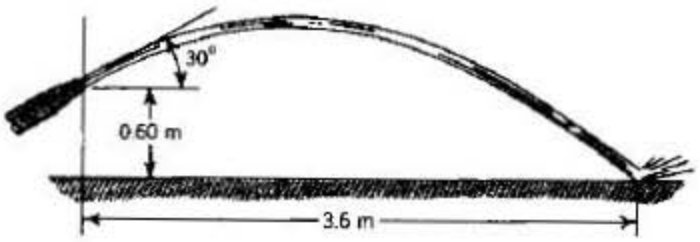
6.17 Utilizando la siguiente figura, suponga que el flujo en el sifón se lleva a cabo sin fricción. Encuentre la rapidez de descarga en pies cúbicos por segundo y la carga de presión en B sabiendo que el tubo tiene un diámetro uniforme de 1 in. ¿Cuánto tardará en bajar 3 pies el nivel del agua? El diámetro del tanque es de 10 ft.



6.21

6.18 Un automóvil viaja a 45 mph en contra de la dirección de un viento de 50 mph. Si la lectura del barómetro es 29 in de Hg. y la temperatura es de 40° F, ¿cuál es la presión en un punto del automóvil en el que la velocidad del viento es de 120 fps con respecto al auto?

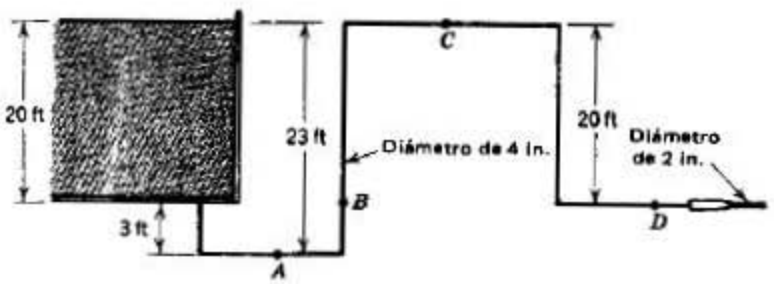
6.19 De una boquilla de 1.27 cm de diámetro, inclinada 30° con respecto a la horizontal, fluye agua. Si el chorro cae al suelo a una distancia horizontal de 3.66 m y a una distancia vertical de 0.6 m de la boquilla, tal como se aprecia en la figura, ¿cuál es la rapidez de flujo en metros cúbicos por segundo?, ¿cuál es la carga total del chorro? (Ver ecuación 6-11b).



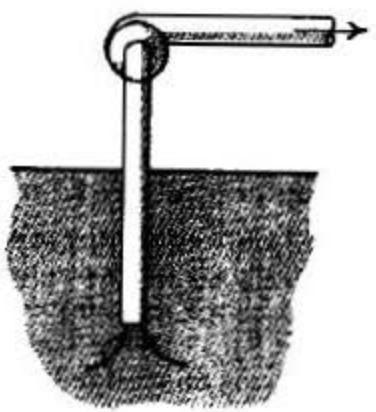
6.20 Suponga que el nivel del agua que se encuentra en el tanque de la figura siguiente, permanece constante y que no hay pérdidas debidas a la fricción ni en el tubo, ni a la entrada, ni en la boquilla. Calcule:

(*a*) la rapidez de descarga volumétrica que sale de la boquilla.

(*b*) la velocidad y la presión en los puntos *A*, *B*, *C*, y *D*.



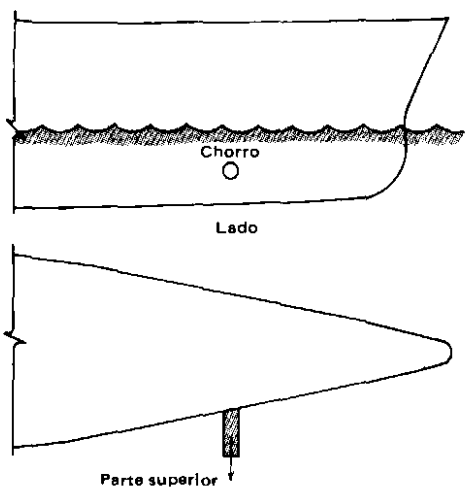
6.21 La bomba que aparece en la figura saca agua, cuya temperatura es de 59° F, con una rapidez de 500 gal/min. El tubo de entrada tiene un diámetro interior de 5.95 in, es de 10 ft de longitud y está sumergido hasta los 6 ft en el agua, en forma vertical. Calcule la presión existente dentro del tubo, así como a la entrada de éste.



6.22 En el problema anterior determine la rapidez de flujo a la cual la presión en la entrada es igual a la presión de vapor del agua. Suponga que la fricción ocasiona una pérdida de carga de 4 ft. La presión de vapor del agua a 59° F es de 0.247 psi.

6.23 Usando los datos del problema 5.20, determine la carga de velocidad del fluido que sale del impulsor. ¿Cuál es el aumento de presión que resulta de tal carga de velocidad?

6.24 Para poder maniobrar un barco grande, al atracar, se usan bombas para producir un chorro de agua perpendicular a la proa del barco, tal como lo muestra la figura.



La entrada del tubo está colocada lo suficientemente lejos de la salida para que no exista ninguna interacción entre ambas. La entrada es vertical para que el empuje axial de los chorros sobre el barco sea independiente, tanto de la velocidad de entrada, como de la presión. Calcule la potencia, en caballos de fuerza, que se requiere por libra de presión. Suponga que la entrada y la salida se encuentran a la misma profundidad. ¿Cuál producirá más empuje por caballo de fuerza, una bomba de alta presión y pequeño volumen o una de baja presión y gran volumen?

6.25 Calcule la pérdida de carga entre las regiones (1) y(2) del problema 5.7.

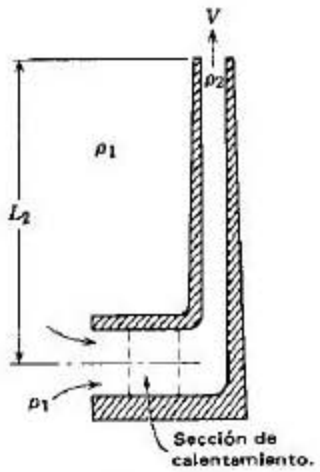
6.26 Vuelva a hacer el problema 6.14, suponiendo que el momento del aire que entra en la sección (1) es igual a cero. Calcule la velocidad de salida, v y la magnitud de la caída de presión en la sección (1).

6.27 Se vierte agua, que se encuentra en un tanque cilíndrico, abierto, de 10 ft de diámetro, en la atmósfera, a través de una boquilla de 2 in de diámetro. Despreciando la fricción y sin tomar en cuenta el hecho de que el flujo no es permanente, encuentre el tiempo que se necesita para que el agua del tanque baje de un nivel de 25 ft sobre la boquilla, a un nivel de 4 ft.

6.28

6.2

6.28 Un fluido, cuya densidad es ρ_1 entra en una cámara donde se calienta el fluido hasta que su densidad baje a ρ_2. Después escapa el fluido a través de una chimenea vertical cuya altura es L. Despreciando la fricción y tratando los procesos de flujo como si fueran incompresibles, excepto por el calentamiento, determine la velocidad, V, en el tubo de escape. La velocidad de fluido, al entrar en la cámara de calentamiento, puede despreciarse. La chimenea está sumergida en un fluido, cuya densidad es ρ_1.



6.29 Repita el problema anterior sin suponer que la velocidad en la sección de calentamiento es despresciable. La razón: área de flujo de la sección de calentamiento de flujo de la chimenea, es R.

7
ESFUERZO CORTANTE EN EL FLUJO LAMINAR

En el análisis de fluidos que se ha hecho hasta aquí, se ha mencionado el esfuerzo cortante, pero se le ha relacionado con las propiedades del fluido o del flujo. Se investigará ahora, esta relación en relación con el flujo laminar. El esfuerzo cortante que actúa sobre un fluido depende del tipo de fluido del que se trate. En el llamado flujo laminar, el fluido fluye en capas constantes o láminas y el esfuerzo cortante es el resultado de la acción microscópica (que no puede observarse) de las moléculas. El flujo turbulento se caracteriza por las fluctuaciones, observables a gran escala, en cuanto a propiedades del fluido y del flujo y el esfuerzo cortante es el resultado de estas fluctuaciones. En los Capítulos 12 y 13 se estudiarán los criterios correspondientes a flujos laminar y turbulento. El esfuerzo cortante en el flujo turbulento, se estudiará en el Capítulo 13.

7.1 RELACION DE NEWTON PARA LA VISCOSIDAD

En un sólido, la resistencia a la *deformación* es el módulo de elasticidad. El módulo cortante de un sólido elástico está dado por:

$$\text{módulo cortante} = \frac{\text{esfuerzo cortante}}{\text{deformación cortante}} \tag{7-1}$$

Así como el módulo cortante de un sólido elástico es una propiedad del sólido que relaciona al esfuerzo cortante con la deformación cortante, existe una relación semejante a la ecuación (7-1) que relaciona al esfuerzo cortante de un flujo laminar paralelo, con una propiedad del fluido. Esta relación es la ley de Newton para la viscosidad,

$$\text{viscosidad} = \frac{\text{esfuerzo cortante}}{\text{rapidez de deformación cortante}} \tag{7-2}$$

Por lo tanto, la viscosidad es la propiedad que presenta un fluido de resistir la rapidez con la que tiene lugar la deformación cuando las fuerzas cortantes actúan sobre el fluido. Como propiedad del fluido la viscosidad depende de la temperatura, composición y presión del fluido pero es independiente de la rapidez de deformación cortante.

La rapidez de deformación en un fluido simple puede apreciarse en la figura 7.1. El flujo paralelo al eje x deformará el elemento si la velocidad, en la parte superior de dicho elemento, es diferente de la velocidad en su parte inferior.

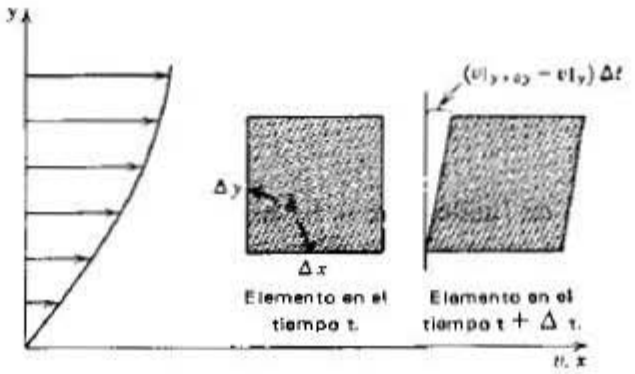


Figura 7.1 Deformación de un elemento de fluido.

La rapidez de deformación cortante en un punto se define como $-d\delta/dt$. En la figura 7.1, se puede ver que:

$$-\frac{d\delta}{dt} = \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta t \to 0} \frac{\delta|_{t+\Delta t} - \delta|_t}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta t \to 0} \left(\frac{\{\pi/2 - \arctan[(v|_{y+\Delta y} - v|_y)\,\Delta t/\Delta y]\} - \pi/2}{\Delta t} \right)$$

En el límite $-d\delta/dt = dv/dy$ = rapidez de deformación cortante

(7-3)

Si se combinan las ecuaciones (7-2) y (7-3) y llamando μ a la viscosidad, podemos escribir la ley de Newton que corresponde a la viscosidad en la siguiente forma:

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} \tag{7-4}$$

El perfil de velocidad y la variación de la deformación cortante de un fluido que se encuentra entre dos placas paralelas, como se puede apreciar en la figura 7.2. El perfil de velocidad,* en este caso es parabólico; así como la deformación cortante es proporcional a la derivada de la velocidad, el esfuerzo cortante varía en forma lineal.

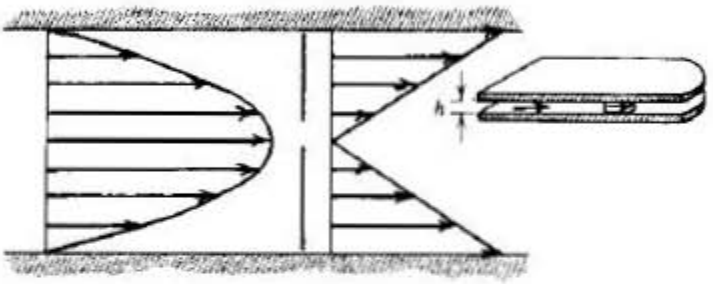


Figura 7.2 Perfiles de la velocidad y del esfuerzo cortante para el flujo entre dos placas paralelas.

7.2 FLUIDOS NO NEWTONIANOS

La ley de Newton de la viscosidad no predice el esfuerzo cortante para todos los fluidos. Los fluidos se clasifican en newtonianos y no newtonianos, dependiendo de la relación entre el esfuerzo cortante y la rapidez de deformación cortante. En los fluidos newtonianos la relación es lineal, tal como aparece en la figura 7.3.

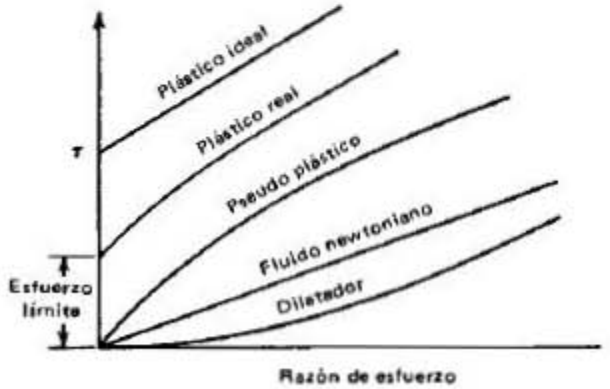


Figura 7.3 Relación entre esfuerzo y rapidez de deformación para fluidos newtonianos y no newtonianos.

*En el Capítulo 8 se estudiará la manera de obtener los perfiles de la velocidad.

En los fluidos no newtonianos, el esfuerzo cortante depende de la rapidez de deformación cortante. En tanto que los fluidos sufren una deformación continua bajo la acción del esfuerzo cortante, los plásticos soportan el esfuerzo cortante antes de ocurrir la deformación. En el "plástico ideal" hay una relación lineal entre esfuerzo y rapidez de deformación, mayor que el esfuerzo total.

Las substancias tixotrópicas tales como la tinta para imprimir, presentan una resistencia a la deformación que depende de la rapidez y del tiempo de deformación.

LA CONDICION DE NO DESLIZAMIENTO

En tanto que las substancias que se mencionaron arriba difieren en sus relaciones entre esfuerzo y rapidez de deformación, son semejantes en su acción en un límite. Tanto en los fluidos newtonianos como en los no newtonianos, la capa de fluido adyacente al límite tiene una velocidad, relativa al límite, igual a cero.

Cuando la frontera es una pared estacionaria, la capa de fluido próxima a la pared está en reposo. Si el límite o pared se están moviendo, la capa de fluido se mueve con la velocidad del límite, de aquí el nombre de condición de no deslizamiento (del límite).

La condición de no deslizamiento es el resultado de la observación experimental y falla cuando ya no se puede considerar el fluido como un continuo.

La condición de no deslizamiento es un resultado de la naturaleza viscosa del fluido. En las situaciones de flujo en las que los efectos viscosos se pueden despreciar—los llamados flujos no viscosos—sólo la componente de la velocidad normal al límite es igual a cero.

7.3 VISCOSIDAD

La viscosidad de un fluido es una medida de su resistencia a la deformación. La brea y la melaza son ejemplos de fluidos altamente viscosos, el aire y el agua que con frecuencia son de gran interés en la ingeniería, son ejemplos de fluidos cuya viscosidad es relativamente baja. Para comprender la existencia de la viscosidad se requiere un examen del movimiento del fluido a nivel molecular.

El movimiento molecular de los gases se puede describir de manera más sencilla que el de los líquidos. El mecanismo por medio del cual el gas resiste a la deformación puede comprenderse mediante el examen del movimiento molecular a nivel microscópico. Estúdiese el volumen de control que aparece en la figura 7.4.

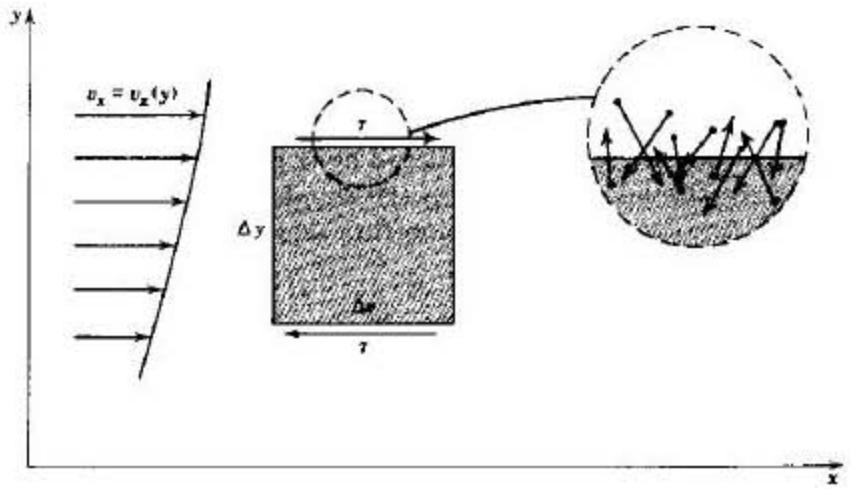


Figura 7.4 Movimiento molecular en la superficie de un volumen de control.

La parte superior del volumen de control se presenta agrandado para demostrar que, aunque la parte superior del elemento es una línea de corriente de flujo, hay moléculas individuales que atraviesan este plano. Las trayectorias de las moléculas, entre colisiones, están representadas por las flechas trazadas en direcciones fortuitas. Como la parte superior del volumen de control es una línea de corriente, el flujo molecular neto que atraviesa esta superficie debe ser nulo, por lo tanto, el flujo molecular ascendente debe ser igual al flujo molecular descendente. Las velocidades promedio en la dirección de x de las moléculas que atraviesan la superficie de control en dirección ascendente, corresponden a sus puntos de origen. Llamado y_0 a la coordenada sobre el eje y de la parte superior de la superficie de control, podemos escribir la velocidad promedio en la dirección x del flujo molecular ascendente en la forma $v_{x|y-}$, donde el signo menos significa que la velocidad promedio se evaluó en un punto que se encuentra debajo de y_0. El momento en la dirección de x llevado a través de la parte superior de la superficie de control es, entonces, $mv_{x|y-}$ por molécula, donde m es la masa de la molécula. Si Z moléculas cruzan el plano por unidad de tiempo, entonces el flujo de momento en la dirección de x será:

$$\sum_{n=1}^{Z} m_n(v_x|_{y-} - v_x|_{y+}) \tag{5-4}$$

El flujo de momento en la dirección de x a escala molecular, aparece como un esfuerzo cortante cuando se observa el fluido a escala macroscópica. La relación entre el flujo de momento molecular y el esfuerzo cortante se puede encontrar a partir de la expresión de volumen de control para el momento lineal:

$$\sum \mathbf{F} = \iint_{\text{c.s.}} \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, dA + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\text{c.v.}} \rho \mathbf{v}\, dV \tag{7-5}$$

El primer término del lado derecho de la ecuación (5-4) es el flujo de momento. Cuando se analiza un volumen de control a escala molecular, este término comprende los flujos de momento macroscópico y molecular. Si la porción molecular del flujo total de momento se va a considerar como una fuerza, deberá colocarse del lado izquierdo de la ecuación (5-4). Por esto el término que corresponde al flujo molecular de momento cambia de signo. Si denotamos al negativo del flujo de momento molecular por unidad de área mediante la letra τ, se tendrá:

$$\tau = -\sum_{n=1}^{Z} m_n(v_x|_{y-} - v_x|_{y+}) \tag{7-6}$$

Se considerará el esfuerzo cortante exclusivamente como una fuerza por unidad de área.

El término, que aparece entre paréntesis $(v_x|_{y-} - v_x|_{y+})$ en la ecuación (7-6) se puede evaluar tomando en cuenta que $v_x|_y = v_x|_{y_0} - (dv_x/dy|_{y_0})\delta$, donde $y - = y_0 - \delta$. Si se usa una expresión semejante para $y +$, se obtendrá, para el esfuerzo cortante.

$$\tau = 2\sum_{n=1}^{Z} m_n \frac{dv_x}{dy}\bigg|_{y_0} \delta_n$$

En la expresión anterior δ es la componente en y de la distancia entre colisiones moleculares. Si se toma la teoría cinética de los gases el concepto de trayectoria media libre, λ, que es la distancia entre colisiones, y de la misma fuente se toma el resultado: $\delta = \frac{2}{3}\lambda$, se obtendrá, para un gas puro:

$$\tau = \tfrac{4}{3} m\lambda Z \frac{dv_x}{dy}\bigg|_{y_0} \tag{7-7}$$

que es el esfuerzo cortante.

Si se compara la ecuación (7-7) con la ley de Newton correspondiente a la viscosidad, se verá que:

$$\mu = \tfrac{4}{3} m\lambda Z \tag{7-8}$$

La teoría cinética dice que $Z = N\bar{C}/4$, donde:

N = moléculas por unidad de volumen
$\bar{C}$ = velocidad molecular aleatoria promedio

y, por lo tanto:

$$\mu = \tfrac{1}{3} Nm\lambda\bar{C} = \frac{\rho\lambda\bar{C}}{3}$$

o utilizando los valores*

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi N d^2} \qquad \text{y} \qquad \bar{C} = \sqrt{\frac{8\kappa T}{\pi m}}$$

donde d es el diámetro molecular y κ la constante de Boltzmann, se obtiene:

$$\mu = \frac{2}{3\pi^{3/2}} \frac{\sqrt{m\kappa T}}{d^2} \tag{7-9}$$

La ecuación (7-9) indica que μ es independiente de la presión para un gas. Se ha demostrado experimentalmente la veracidad de esta relación aproximadamente hasta 10 atmósferas. La evidencia experimental indica que, a bajas temperaturas, la viscosidad varía con una rapidez mayor que $\sqrt{T}$. El modelo de esfera rígida de diámetro constante para la molécula de gas es responsable de la inadecuada relación viscosidad-temperatura. Aunque el procedimiento anterior no fue lo suficientemente rígido ya que se introdujo el diámetro molecular, que es una propiedad indefinida, la interpretación de que la viscosidad se debe al flujo microscópico de momento es un resultado valioso y no se debe pasar por alto. También es importante hacer notar que la ecuación (7-9) expresa la viscosidad totalmente en términos de las propiedades de los fluidos.

Un modelo molecular más realista, que utilice un campo de fuerza en lugar de una esfera rígida dará una relación entre viscosidad y temperatura mucho más consistente con los resultados experimentales que el resultado $\sqrt{T}$. La expresión más aceptable para las moléculas no polares es la que se base en la función para la energía potencial de Lennard-Jones. Ni esta función ni el procedimiento que nos condujo a la expresión para la viscosidad, se incluyen en esta obra. El lector interesado puede consultar las obras de Hirschfelder, Curtiss y Bird* para enterarse de los detalles de este razonamiento. La expresión resultante que corresponde a la viscosidad de un gas monoatómico puro es:

$$\mu = 2.6693 \times 10^{-6} \frac{\sqrt{MT}}{\sigma^2 \Omega_\mu} \tag{7-10}$$

donde μ es la viscosidad en pascales por segundo, T es la temperatura absoluta en grados, K, M es el peso molecular, σ es el "diámetro de colisión", que es un parámetro de Lennard-Jones expresando en Å (Angstroms), Ω_μ es la "integral de colisión", parámetro de Lennard-Jones que varía en forma relativa-

*Las expresiones para la trayectoria media libre, en orden ascendente de complejidad, pueden encontrarse en: R. Resnick and D. Halliday, *Physics*, Parte I, Wiley, Nueva York, 1966, Capítulo 24 y E. H. Kennard, *Kenetic Theroy of Gases*, Mc. Graw Hill Book Company, Nueva York, 1938, Capítulo 2.

*J. O. Hirschfelder, C. F. Curtiss and R. B. Bird, *Molecular Thoery of Gases and Liquids*, Wiley, Nueva York, 1954.

mente lenta con la temperatura, carente de dimensión, $\kappa T/\epsilon$; κ, κ es la constante de Boltzmann = 1.38×10^{-16} ergios/K y ϵ es la energía característica de interacción entre moléculas. Los valores de σ y ϵ para los diversos gases, aparecen en el Apéndice K, y en el Apéndice J hemos incluido una tabla de valores de Ω_μ contra $\kappa T/\epsilon$.

En mezclas gaseosas de componentes múltiples a baja densidad, Wilke† ha propuesto esta fórmula empírica para la viscosidad de la mezcla:

$$\mu_{\text{mezcla}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i \mu_i}{\sum x_j \phi_{ij}} \tag{7-11}$$

donde x_i, x_j son fracciones molares de las especies i e j que contiene la mezcla y

$$\phi_{ij} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left(1 + \frac{M_i}{M_j}\right)^{-1/2} \left[1 + \left(\frac{\mu_i}{\mu_j}\right)^{1/2} \left(\frac{M_j}{M_i}\right)^{1/4}\right]^2 \tag{7-12}$$

donde M_i, M_j son los pesos moleculares de las especies i e j y μ_i, μ_j son las viscosidades de las especies i e j. Nótese que cuando $i = j$, $\phi_{ij} = 1$.

Las ecuaciones (7-10), (7-11) y (7-12) se utilizan en gases no polares y en mezclas de gases a bajas densidades. Para moléculas polares se debe modificar la relación anterior.

En tanto que la teoría cinética de los gases está bien fundamentada y los modelos más sofisticados de interacción molecular predicen con exactitud la viscosidad de los gases, la teoría molecular de los líquidos está menos desarrollada. Por lo tanto, la mayor fuente de conocimiento concerniente a la viscosidad de los líquidos es el exprimento. Las dificultades que se encuentran en el manejo analítico de un líquido están estrechamente relacionadas con la naturaleza misma del líquido. Mientras en los gases la distancia intermolecular es tan grande que podemos considerar que la interacción de las moléculas se lleva a cabo en pares, las distancias intermoleculares son muy pequeñas en los líquidos, lo cual origina la interacción simultánea de varias moléculas. La situación es semejante al problema de gravitación de N cuerpos. A pesar de estas dificultades, Eyring ha desarrollado una teoría aproximada que pone de manifiesto la relación entre las fuerzas intermoleculares y la viscosidad‡ Se puede considerar que la viscosidad de un líquido se debe a la restricción causada por las fuerzas intermoleculares. Al calentarse el líquido, las moléculas adquieren una movilidad mayor, lo cual da como resultado una menor restricción de las fuerzas intermoleculares. La evidencia experimental de que se dispone acerca de la viscosidad de los líquidos, demuestra que la viscosidad disminuye con la temperatura de acuerdo con el concepto de que las fuerzas de adhesión intermolecular son el factor que controla este fenómeno.

†C. R. Wilke, *J. Chem. Phys*, 18, 517-519 (1950).

‡Para encontrar una descripción de la teoría de Eyring, ver R. B. Bird, W. E. Stewart and E. N. Lightfoot, *Transport Phenomena*, Wiley, Nueva York, 1960. Capítulo 1.

UNIDADES DE VISCOSIDAD

Las dimensiones de la viscosidad se pueden obtener a partir de la relación de Newton para la viscosidad:

$$\mu = \frac{\tau}{dv/dy}$$

o, en forma dimensional,

$$\frac{F/L^2}{(L/t)(1/L)} = \frac{Ft}{L^2}$$

donde F = fuerza, L = longitud y t = tiempo.

Si se usa la segunda ley de Newton del movimiento para relacionar a la masa con la fuerza ($F = ML/t^2$), se encontrará que las dimensiones de la viscosidad, en el sistema masa-longitud-tiempo, se convierten en M/Lt.

La razón de la viscosidad a la densidad ocurre frecuentemente en los problemas ingenieriles. Esta razón: μ/δ se denomina viscosidad cinemática y se le denota por medio del símbolo ν. El origen del nombre viscosidad cinemática puede comprenderse a partir de las dimensiones de:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \sim \frac{M/Lt}{M/L^3} = \frac{L^2}{t}$$

Las dimensiones de ν son las de la cinemática: longitud y tiempo. En la mayoría de los casos se emplea uno de los nombres: viscosidad absoluta o viscosidad dinámica para distinguir a μ de la viscosidad cinemática, ν.

En el sistema internacional la viscosidad dinámica se expresa en pascales/seg (1 pasal/seg = 1 N · seg/m^2 = 10 poise = 0.2089 slugs/ft · seg = 0.289 lb_f · seg/ft^2 = 0.6720 lb_m /ft · seg). En el sistema métrico la viscosidad cinemática se expresa en metros cuadrados por segundo (1 m^2/seg = 10^4 stokes = 10.76 ft^2/seg).

Las viscosidades absoluta y cinemática como funciones de la temperatura, aparecen en la figura 7.5. En el apéndice 1 hay una lista más extensa.

7.4 ESFUERZO CORTANTE EN LOS FLUJOS LAMINARES MULTIDIMENSIONALES DE UN FLUIDO NEWTONIANO

La relación de Newton para la viscosidad, estudiada previamente, es válida solamente para flujos laminares paralelos. Stokes extendió el concepto de viscosidad a los flujos laminares tridimensionales.

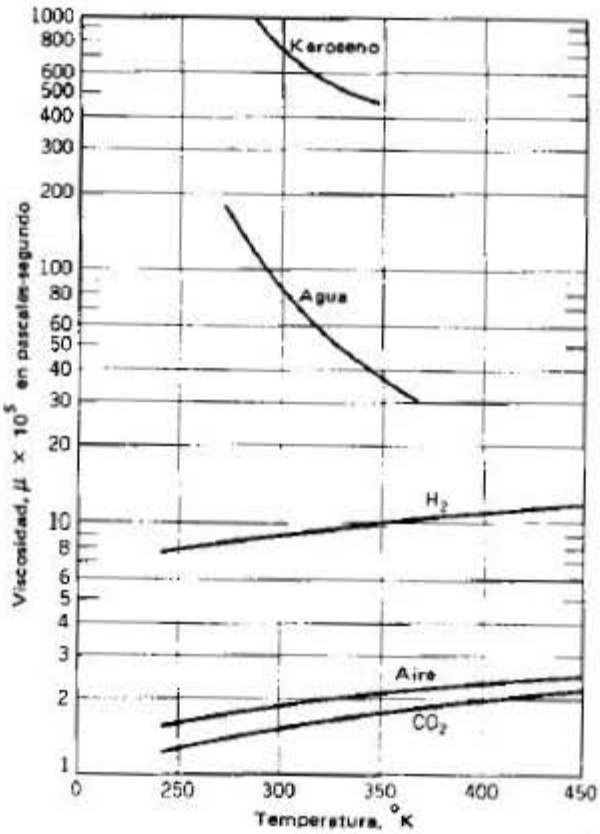


Figura 7.5 Variación de la viscosidad con la temperatura para algunos líquidos y gases.

La base de la relación de Stokes es la ecuación (7-2):

$$\text{viscosidad} = \frac{\text{esfuerzo cortante}}{\text{rapidez de deformación cortante}} \tag{7-2}$$

donde el esfuerzo cortante y la rapidez de deformación cortante son los de un elemento tridimensional. Por esto debemos examinar el esfuerzo y la rapidez de deformación cortantes para un cuerpo tridimensional.

ESFUERZO CORTANTE

El esfuerzo cortante es una cantidad tensorial que requiere de magnitud, dirección y orientación con respecto a un plano para su identificación. El método usual de identificación del esfuerzo cortante incluye un doble subíndice, tal como τ_{xy}. La componente tensorial τ_{ij} se identifica de la siguiente manera:

τ = magnitud

Primer subíndice = dirección del eje, normal al plano de acción del esfuerzo cortante

Segundo subíndice = dirección de acción

Por lo tanto, τ_{xy} actúa en un plano normal al eje x (el plano yz) y actúa en la dirección de y. Además del doble subíndice se requiere un sentido. Los esfuerzos cortantes que actúan sobre el elemento Δ_x, Δ_y, Δ_z, que aparece en la figura 7.6, están indicados en sentido positivo. La definición de esfuerzo cortante positivo se puede generalizar para usarla en otros sistemas de coordenadas. Una componente del esfuerzo cortante es positiva cuando, tanto el vector normal a la superficie de acción como el esfuerzo cortante actúan en la misma dirección (ambos positivos o ambos negativos).

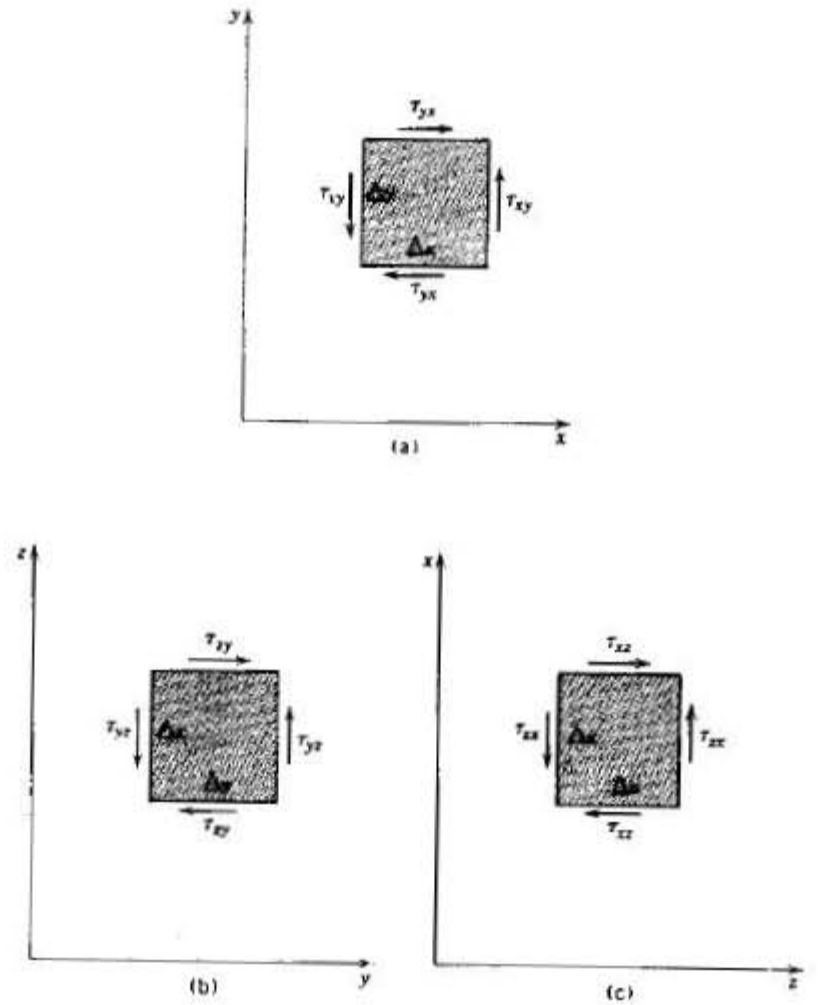


Figura 7.6 Esfuerzo cortante actuando en sentido positivo.

Por ejemplo, en la figura 7.6a, el esfuerzo cortante τ_{yx} que actúa sobre la parte superior del elemento, actúa sobre la superficie $\Delta_x\ \Delta_z$. El vector normal a esta área se encuentra en la dirección positiva del eje y. El esfuerzo τ_{yx} actúa en la dirección positiva del eje x, por lo tanto, τ_{yx}, tal como aparece en la figura 7.6a, es positiva. El estudiante puede aplicar un razonamiento semejante a τ_{yx} que actúa sobre la parte inferior del elemento y concluir que τ_{yx} también es positivo, como puede verse.

Igual que en la mecánica de sólidos, $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ (ver Apéndice C).

RAPIDEZ DE DEFORMACION CORTANTE

La rapidez de deformación cortante correspondiente a un elemento tridimensional se puede calcular determinando la rapidez de deformación cortante en los planos, xy, yz y xz. En el plano xy, que aparece en la figura 7.7, la rapidez de deformación cortante es, de nuevo, $d\delta/dt$. Sin embargo, el elemento puede sufrir deformaciones en las direcciones x e y.

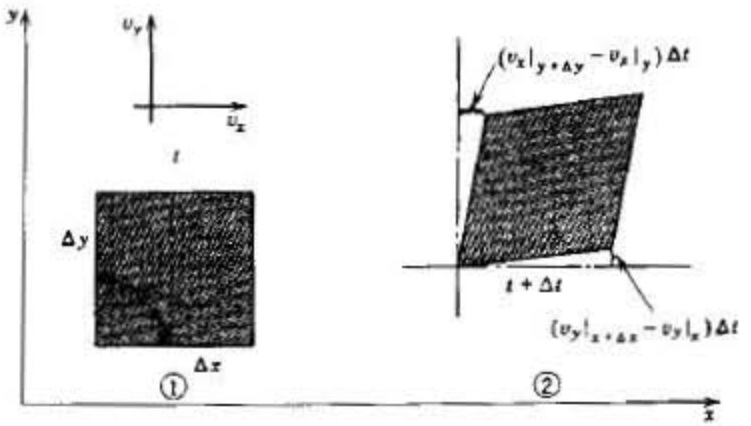


Figura 7.7 Deformación cortante en el plano xy.

Por lo tanto, al moverse el elemento de la posición 1 a la 2 en un tiempo Δt,

$$-\frac{d\delta}{dt} = \lim_{\Delta x,\Delta y,\Delta t\to 0} \frac{\delta|_{t+\Delta t} - \delta|_t}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta x,\Delta y,\Delta t\to 0} \left\{ \frac{\pi/2 - \arctan\{[(v_x|_{y+\Delta y} - v_x|_y)\,\Delta t]/\Delta y\}}{\Delta t} - \frac{\arctan\{[(v_y|_{x+\Delta x} - v_y|_x)\,\Delta t]/\Delta x\} - \pi/2}{\Delta t} \right\}$$

ya que la deformación cortante calculada anteriormente se encuentra en el plano xy, su subíndice será xy. En el límite $-d\delta_{xy}/dt = \partial v_x/\partial y + \partial v_y/\partial x$. De

manera semejante, la rapidez de deformación cortante en los planos yz y xz se puede calcular de la manera siguiente:

$$-\frac{d\delta_{yz}}{dt}=\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}$$

$$-\frac{d\delta_{xz}}{dt}=\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}$$

RELACION DE STOKES PARA LA VISCOSIDAD

A. Esfuerzo Cortante. La relación de Stokes que corresponde a las componentes del esfuerzo cortante en el flujo laminar se pueden establecer ahora con la ayuda de las relaciones anteriores para la rapidez de deformación cortante. Al usar la ecuación (7-2), se tendrá, para los esfuerzos cortantes escritos en forma de coordenadas rectangulares, la ecuación:

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}=\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right) \tag{7-13a}$$

$$\tau_{yz}=\tau_{zy}=\mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}\right) \tag{7-13b}$$

y

$$\tau_{zx}=\tau_{xz}=\mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) \tag{7-13c}$$

B. Esfuerzo Normal. El esfuerzo normal también se puede determinar a partir de una relación de esfuerzo a rapidez de deformación, sin embargo, la rapidez de deformación es más difícil de expresar que en caso de la deformación cortante. Por esta razón el desarrollo del esfuerzo normal, basado en una generalización de la ley de Hooke para un medio elástico, aparece, detalladamente en el Apéndice D. En las ecuaciones (7-14a) (7-14b y (7-14c) se expresarán solamente los resultados:

$$\sigma_{xx}=\mu\left(2\frac{\partial v_x}{\partial x}-\tfrac{2}{3}\nabla\cdot\mathbf{v}\right)-P \tag{7-14a}$$

$$\sigma_{yy}=\mu\left(2\frac{\partial v_y}{\partial y}-\tfrac{2}{3}\nabla\cdot\mathbf{v}\right)-P \tag{7-14b}$$

y

$$\sigma_{zz}=\mu\left(2\frac{\partial v_z}{\partial z}-\tfrac{2}{3}\nabla\cdot\mathbf{v}\right)-P \tag{7-14c}$$

Debe hacerse notar que la suma de estas tres ecuaciones lleva al resultado anteriormente mencionado: el esfuerzo $\bar{\sigma} = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})/3$, es el negativo de la presión, P.

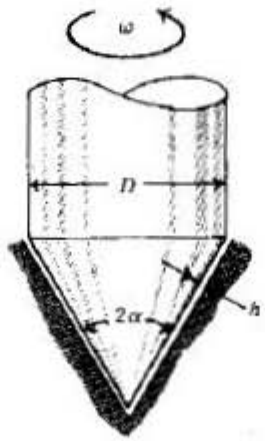
7.5 CONCLUSION

El esfuerzo cortante en el flujo laminar y su dependencia de la viscosidad y de las derivadas cinemáticas se ha presentado para un sistema de coordenadas cartesianas. El esfuerzo cortante ocurrirá con frecuencia en otros sistemas de coordenadas y debe notarse que en la ecuación (7-2) es la relación general que existe entre esfuerzo cortante, viscosidad y rapidez de deformación cortante. El esfuerzo cortante en otros sistemas de coordenadas se puede obtener evaluando la rapidez de deformación cortante en los sistemas asociados de coordenadas. Al final de este Capítulo se han incluido diversos problemas de este tipo.

En conclusión, se le recuerda de nuevo al estudiante, que el Capítulo 7 solamente cubre lo referente a flujo laminar.

PROBLEMAS

7.1 Un gato hidráulico para automóviles está constituido por un émbolo de 35.56 cm. de diámetro que se desliza dentro de un cilindro de 35.58 cm. de diámetro. La región anular está llena de un aceite cuya viscosidad es de 0.00037 m^2/seg. y cuya gravedad es de 0.85. Si la rapidez con la que se mueve el émbolo es de 0.15 m/seg., calcule la resistencia debida a la fricción cuando 2.44 m del émbolo se encuentran dentro del cilindro.



7.2 Si el émbolo y la plataforma del problema anterior tienen, en total, una masa de 680 kg., calcule la velocidad máxima de descenso del émbolo y

la plataforma cuando las únicas fuerzas que actúan son la gravedad y la fricción viscosa. Suponga que 2.4 m del émbolo están dentro del cilindro.

7.3 El pivote cónico que aparece en la figura tiene una velocidad angular ω y descansa sobre una capa de aceite cuyo espesor uniforme es h. Determine el momento de fricción en función del ángulo α, de la viscosidad, de la velocidad angular, de la distancia entre separaciones y del diámetro del eje.

7.4 Determine el número de moléculas de aire que cruzan una unidad plana de área en el aire, bajo condiciones estándar. La razón κ/m es igual a la constante de los gases, R.

7.5 Para el agua que fluye a través de un tubo de 0.1 plg de diámetro, la distribución de velocidades es parabólica (ver ejemplo 2, Capítulo 4). Si la velocidad promedio es de 2 fps, determine la magnitud del esfuerzo cortante en las paredes del tubo.

7.6 La rapidez del trabajo cortante por unidad de volumen está dado por el producto τv. En un perfil parabólico de velocidad en un tubo circular (ver ejemplo 2, Capítulo 4), determine la distancia a la pared en la cual es máximo el trabajo cortante.

7.7 El diámetro del cigüeñal de un automóvil mide 3.175 cm. El buje del cigüeñal es de 3.183 cm. de diámetro y de 2.8 cm. de largo. El buje está lubricado con aceite del número 30 a una temperatura de 365° K. Suponiendo que el cigüeñal está centralmente colocado en el buje, determine cuánto calor debe quitarse para mantener el buje a una temperatura constante. El cigüeñal está girando a 1,700 r.p.m. y la viscosidad del aceite es de 0.01 Pa .seg.

7.8 Si la velocidad del cugüeñal del problema 7.7 se duplica, ¿cuál será el incremento en el porcentaje del calor transferido desde el buje? Suponga que el buje permanece a una temperatura constante.

7.9 Calcule la viscosidad del nitrógeno a 175° K, usando la ecuación (7-10).

7.10 Dos barcos viajan paralelamente uno al otro, conectados por mangüeras flexibles. De un barco a otro se transfiere cierto fluido para su procesamiento y después se le devuelve al primer barco. Si el fluido fluye a razón de 100 kg./seg., y en un instante dado el primer barco viaja a 4m/seg., en tanto que el segundo se mueve a 3.1 m/seg., ¿cuál es la fuerza neta ejercida sobre el barco número uno, dadas las velocidades anteriormente mencionadas?

7.11 Dibuje la deformación de un elemento de fluido para los siguientes casos:

(a) $\partial v_x/\partial_y$ es mucho mayor que $\partial v_y/\partial_x$

(b) $\partial v_y/\partial_x$ es mucho mayor que $\partial v_x/\partial_y$

7.12 Para un fluido bidimensional e incompresible cuya velocidad es $v_x = v_x(y)$, dibuje un elemento tridimensional de fluido, indicando la magnitud, dirección y superficie de acción de cada una de las componentes del esfuerzo.

7.13 Demuestre que la rapidez axial de esfuerzo en un flujo unidimensional, $v_x = v_x(x)$, está dada por: $\partial v_x/\partial x$. ¿Cuál es la rapidez de cambio de volumen? Haga las generalizaciones para un elemento tridimensional y determine la rapidez de cambio de volumen.

7.14 Usando un elemento cilíndrico, demuestre que la relación de Stokes que corresponde a la viscosidad tienen las siguientes componentes en el esfuerzo cortante:

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \mu\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]$$

$$\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = \mu\left[\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}\right]$$

$$\tau_{zr} = \tau_{rz} = \mu\left[\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right]$$

8
ANALISIS DE UN ELEMENTO DIFERENCIAL DE FLUIDO EN EL FLUJO LAMINAR

El análisis del flujo de un fluido puede tomar dos caminos diferentes. Un tipo de análisis ya se ha presentado ampliamente en los Capítulos 4, 5 y 6, en los cuales la región de interés ha sido un volumen definido, el volumen de control macroscópico. Para analizar un problema desde el punto de vista de un volumen macroscópico de control, solamente interesan las cantidades brutas de masa, momento y energía que atraviesan la superficie de control y el cambio total de estas cantidades, que exhibe el material que está siendo estudiado. Los cambios de cada elemento diferencial de fluido dentro del volumen de control, no se pueden obtener a partir de este tipo de análisis global.

En este capítulo se concentrará la atención en los elementos de fluido que tienden a un tamaño diferencial. Nuestras metas serán el cálculo y la descripción del comportamiento del fluido desde un punto de vista diferencial. Las expresiones que resulten de este análisis serán ecuaciones diferenciales. La solución de éstas nos proporcionará información acerca del flujo, de una naturaleza diferente que la obtenida a partir del examen macroscópico. Esta información puede ser de menor interés para el ingeniero que necesite información global acerca del diseño, pero puede proporcionar una compresión mucho más profunda de los mecanismos de transferencia de la masa, la energía y el momento.

Es posible cambiar de una forma de análisis a la otra, esto es, pasar de un análisis diferencial a uno integral por integración y viceversa con bastante facilidad.*

Sólo es posible encontrar una solución completa para las ecuaciones diferenciales del flujo de fluidos si el flujo es laminar; por esta razón solamente se examinarán situaciones laminares de flujo en este capítulo. En el capítulo 9 se estudiará un método diferencial más general.

*Se puede lograr esta transformación por medio de diversos métodos, entre los cuales se encuentran los del cálculo vectorial. En el presente texto utilizaremos el proceso de límite.

8.1 FLUJO LAMINAR TOTALMENTE DESARROLLADO EN UN CONDUCTO CIRCULAR DE SECCION TRANSVERSAL CONSTANTE.

A menudo, los ingenieros tienen que enfrentarse con flujos de fluidos que se llevan a cabo dentro de conductos circulares o tubos. Ahora se analizará esta situación en el caso de un flujo laminar incompresible. En la figura 8.1 se puede ver la sección de un tubo en la cual el flujo es laminar y totalmente desarrollado, esto es, no está influido por efectos de entrada y representa una situación de flujo permanente. El *flujo totalmente desarrollado* se define como aquel para el cual el perfil de velocidad no varía a lo largo del eje de flujo.

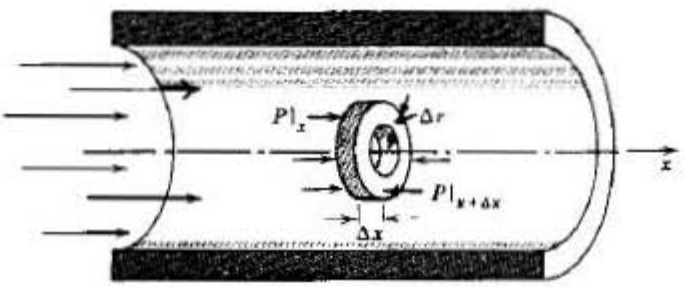


Figura 8.1 Volumen de control para el flujo a través de un conducto circular.

Estudiemos, ahora, el volumen cilíndrico de control de un fluido cuyo radio interior es r, cuyo grosor es Δr y cuya longitud es Δx. Si se aplica la segunda ley de Newton a este volumen de control, podremos calcular los términos apropiados para la fuerza y el momento en la dirección de x. Empezando con la expresión de volumen de control para el momento lineal en la dirección de x:

$$\sum F_x = \iint_{c.s.} \rho v_x (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, dA + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{c.v.} \rho v_x \, dV \qquad (5\text{-}5a)$$

y evaluando cada uno de los términos en la forma apropiada al volumen de control de la figura, se tendrá:

$$\sum F_x = P(2\pi r\, \Delta r)|_x - P(2\pi r\, \Delta r)|_{x+\Delta x}$$

$$+ \tau_{rx}(2\pi r\, \Delta x)|_{r+\Delta r} - \tau_{rx}(2\pi r\, \Delta x)|_r$$

$$\iint_{c.s.} v_x \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, dA = (\rho v_x)(2\pi r\, \Delta r v_x)|_{x+\Delta x} - (\rho v_x)(2\pi r\, \Delta r v_x)|_x$$

y

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{c.v.} v_x \rho \, dV = 0$$

en el flujo constante.

El flujo convectivo de momento

$$(\rho v_x)(2\pi r \, \Delta r v_x)|_{x+\Delta x} - (\rho v_x)(2\pi \, \Delta r v_x)|_x$$

es igual a cero ya que todos los términos dependen de x, porque originalmente se estipuló que se trataba de un flujo totalmente desarrollado. Si se substituyen los términos restantes en la ecuación (5-5a), se obtiene:

$$-[P(2\pi r \, \Delta r)|_{x+\Delta x} - P(2\pi r \, \Delta r)|_x] + \tau_{rx}(2\pi r \, \Delta x)|_{r+\Delta r} - \tau_{rx}(2\pi r \, \Delta x)|_r = 0$$

Al calcular términos y reacomodar los demás, se verá que esta expresión se reduce a la forma:

$$-r\frac{P|_{x+\Delta x} - P|_x}{\Delta x} + \frac{(r\tau_{rx})|_{r+\Delta r} - (r\tau_{rx})|_r}{\Delta r} = 0$$

Calculando esta expresión en el límite en el que el volumen de control tiende a un tamaño diferencial, esto es: cuando Δx y Δr tienden a cero, se tendrá:

$$-r\frac{dP}{dx} + \frac{d}{dr}(r\tau_{rx}) = 0 \tag{8-1}$$

Nótese que, tanto la presión como el esfuerzo cortante solamente son funciones de x y r, respectivamente, por lo tanto, las derivadas totales y no parciales. En una región donde el flujo sea totalmente desarrollado, el gradiente de presión, dP/dx, es constante.

Las variables de la ecuación (8-1) pueden separarse e integrarse para dar como resultado:

$$\tau_{rx} = \left(\frac{dP}{dx}\right)\frac{r}{2} + \frac{C_1}{r}$$

La constante de integración C_1 se puede calcular conociendo un valor de τ_{rx} para una r determinada. Esta condición se conoce en el centro del conducto, $r = 0$, donde, para cualquier valor finito de C_1, el esfuerzo cortante, τ_{rx} es infinito. Como esto es físicamente imposible, el único valor real para C_1 es cero. Por lo tanto, la distribución del esfuerzo cortante para las condiciones y la geometría especificadas, es:

$$\tau_{rx} = \left(\frac{dP}{dx}\right)\frac{r}{2} \tag{8-2}$$

Se puede ver que el esfuerzo cortante varía linealmente a través del conducto, desde un valor de 0 en $r = 0$, hasta un valor máximo para $r = R$, la superficie del interior del conducto.

Se puede obtener más información si se sustituye la relación correspondiente a la viscosidad newtoniana, esto es, si se supone que el fluido es newtoniano y se recuerda que el flujo es laminar:

$$\tau_{rx} = \mu \frac{dv_x}{dr} \tag{8-3}$$

Al sustituir esta relación en la ecuación (8-2), se obtiene:

$$\mu \frac{dv_x}{dr} = \left(\frac{dP}{dx}\right)\frac{r}{2}$$

lo cual, después de hacer la integración, se transforma en:

$$v_x = \left(\frac{dP}{dx}\right)\frac{r^2}{4\mu} + C_2$$

La segunda constante de integración, C_2, se puede calcular utilizando como condición a la frontera, que la velocidad V es cero en la superficie del conducto (la condición de no deslizamiento), $r = R$. Por lo tanto:

$$C_2 = -\left(\frac{dP}{dx}\right)\frac{R^2}{4\mu}$$

y la distribución de velocidades, se convierte en

$$v_x = -\left(\frac{dP}{dx}\right)\frac{1}{4\mu}(R^2 - r^2) \tag{8-4}$$

o en:

$$v_x = -\left(\frac{dP}{dx}\right)\frac{R^2}{4\mu}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \tag{8-5}$$

Las ecuaciones (8-4) y (8-5) indican que el perfil de la velocidad es parabólico y que la máxima velocidad ocurre en el centro del conducto circular, donde $r = 0$. Así:

$$v_{máx} = -\left(\frac{dP}{dx}\right)\frac{R^2}{4\mu} \tag{8-6}$$

y la ecuación (8-5) se puede escribir en la forma:

$$v_x = v_{máx}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \tag{8-7}$$

Nótese que el perfil de la velocidad escrito en la forma de la ecuación (8-7) es idéntico al utilizado en el ejemplo 4.2. Por lo tanto, se puede usar el resultado obtenido en el ejemplo 4.2.

$$v_{avg} = \frac{v_{máx}}{2} = -\left(\frac{dP}{dx}\right)\frac{R^2}{8\mu} \tag{8-8}$$

La ecuación (8-8) puede reordenarse para que exprese el gradiente de presión, $-dP/dx$, en términos de V

$$-\frac{dP}{dx} = \frac{8\mu v_{avg}}{R^2} = \frac{32\mu v_{avg}}{D^2} \tag{8-9}$$

La ecuación (8-9) se conoce como ecuación de Hagen-Poiseulle, en honor de los dos hombres a quienes se concede el crédito de haberla obtenido primero. Esta expresión se puede integrar sobre una longitud dada del conducto para encontrar el descenso de presión y el arrastre asociado ejercido sobre el conducto, como resultado del flujo de un fluido viscoso.

Las condiciones para las cuales se obtuvieron y se pueden emplear, deben tenerse en mente, así como comprenderse bien. Son las siguientes:

1. El fluido (a) es newtoniano.
   (b) se comporta como un continuo.
2. El flujo es (a) laminar.
   (b) permanente.
   (c) totalmente desarrollado.
   (d) incompresible.

8.2 FLUJO LAMINAR DE UN FLUIDO NEWTONIANO HACIA ABAJO, POR UNA SUPERFICIE PLANA INCLINADA

El enfoque utilizado en la sección 8.1 se aplicará ahora a una situación ligeramente diferente, la de un fluido newtoniano en un flujo laminar hacia abajo, por una superficie inclinada, plana. Tanto esta configuración como su nomenclatura, se presentan en la figura 8.2.

El análisis implica, otra vez, la aplicación de la expresión del volumen de control para el momento lineal en la dirección de x, que es:

$$\sum F_x = \iint_{c.s.} v_x \rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\, dA + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{c.v.} \rho v_x\, dV \tag{5-5a}$$

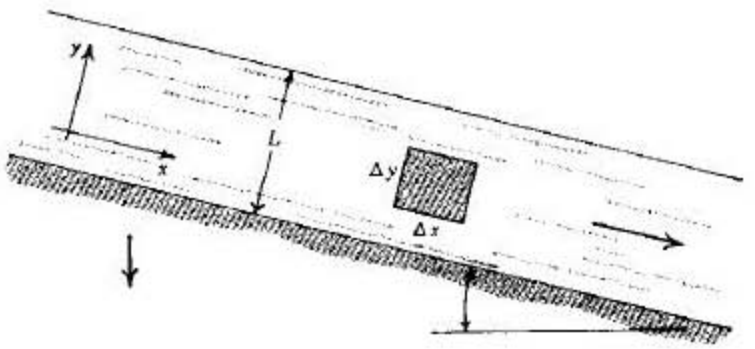


Figura 8.2 Flujo laminar descendente en una superficie plana inclinada.

Si se calcula cada uno de los términos de esta expresión para el elemento del fluido del volumen $(\Delta x)\,(\Delta y)\,(1)$, que aparece en la figura, tendremos:

$$\sum F_x = P\,\Delta y|_x - P\,\Delta y|_{x+\Delta x} + \tau_{yx}\,\Delta x|_{y+\Delta y} - \tau_{yx}\,\Delta x|_y + \rho g\,\Delta x\,\Delta y \operatorname{sen}\theta$$

$$\iint_{c.s.} \rho v_x(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dA = \rho v_x^2\,\Delta y|_{x+\Delta x} - \rho v_x^2\,\Delta y|_x$$

y

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{c.v.} \rho v_x\,dV = 0$$

Nótese que los términos para el momento convectivo se cancelan para un flujo totalmente desarrollado y los términos para la presión también se cancelan debido a la presencia de la superficie libre de un líquido, por lo cual la ecuación que se obtiene substituyendo estos términos en la ecuación (5-5a), se transforma en:

$$\tau_{yx}\,\Delta x|_{y+\Delta y} - \tau_{yx}\,\Delta x|_y + \rho g\,\Delta x\,\Delta y \operatorname{sen}\theta = 0$$

Al dividir entre $(\Delta x)\,(\Delta y)\,(1)$, el volumen del elemento que estamos estudiando, obtendremos:

$$\frac{\tau_{yx}|_{y+\Delta y} - \tau_{yx}|_y}{\Delta y} + \rho g \operatorname{sen}\theta = 0$$

En el límite, cuando $\Delta y \to 0$, se obtiene la ecuación diferencial aplicable:

$$\frac{d}{dy}\tau_{yx} + \rho g \operatorname{sen}\theta = 0$$

Si se separan las variables de esta ecuación simple e integrando, se obtiene, para el esfuerzo cortante,

$$\tau_{yx} = -\rho g \operatorname{sen}\theta y + C_1 \tag{8-10}$$

La constante de integración C_1 puede evaluarse usando como condición a la frontera, que el esfuerzo cortante, τ_{yx}, es cero en la superficie libre $y = L$, por lo que la variación del esfuerzo cortante se convierte en:

$$\tau_{yx} = \rho g L \operatorname{sen}\theta\left[1 - \frac{y}{L}\right] \tag{8-11}$$

El estudio de un fluido newtoniano en flujo laminar permite sustituir a $\mu(dv_x/dy)$ por τ_{yx}, llegando así al siguiente resultado:

$$\frac{dv_x}{dy} = \frac{\rho g L \operatorname{sen}\theta}{\mu}\left[1 - \frac{y}{L}\right]$$

lo cual, después de la separación de variables y de la integración, se convierte en:

$$v_x = \frac{\rho g L \operatorname{sen}\theta}{\mu}\left[y - \frac{y^2}{2L}\right] + C_2$$

Si se usa la condición de frontera de no deslizamiento, esto es, $v_x = 0$ para $y = 0$, la constante de integración, C_2, será igual a cero. La expresión final para el perfil de la velocidad se puede escribir en la siguiente forma:

$$v_x = \frac{\rho g L^2 \operatorname{sen}\theta}{\mu}\left[\frac{y}{L} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{L}\right)^2\right] \tag{8-12}$$

La forma de esta solución indica que la variable de la velocidad es parabólica y alcanza su valor máximo:

$$v_{max} = \frac{\rho g L^2 \operatorname{sen}\theta}{2\mu} \tag{8-13}$$

en la superficie libre $y = L$.

Se pueden efectuar cálculos adicionales para determinar la velocidad promedio, tal como se indicó en la sección 8.1. Nótese que en este caso no existirá la parte correspondiente a la relación de Hagen-Poiseuille, ecuación (8-9) para el gradiente de la presión. La razón de esto es la presencia de una superficie libre, de líquido en la cual la presión es constante. Por lo tanto, para este caso, el flujo no es el resultado de un gradiente de presión sino la manifestación de la aceleración gravitacional sobre un fluido.

8.3 CONCLUSION

El método de análisis empleado en este capítulo, o sea, el de la aplicación de la relación básica para el momento lineal a un pequeño volumen de control, permitiendo al volumen de control reducir su tamaño hasta ser diferencial, permite encontrar información diferente a la obtenida anteriormente. Los perfiles de la velocidad y del esfuerzo cortante son ejemplos de este tipo de información. El comportamiento de un elemento de fluido de tamaño diferencial puede proporcionarnos una cantidad considerable de información acerca de un proceso dado de transferencia, así como una comprensión que no podremos obtener mediante ningún otro tipo de análisis.

Este método tiene sus correspondientes directos en la transferencia de calor y de masa, donde el elemento puede estar sujeto a un equilibrio de energía o de masa.

En el capítulo 9, se utilizarán los métodos introductorios en este capítulo para obtener las ecuaciones diferenciales del flujo de fluidos para un volumen general de control.

PROBLEMAS

8.1 Exprese la ecuación (8-9) en términos de la rapidez de flujo y del diámetro del tubo. Si este último se duplica, cuando hay un descenso constante en la presión, ¿cuál será el porcentaje de la variación en la rapidez del flujo?

8.2 Un oleoducto de 32 km de longitud conduce petróleo con una rapidez de 5,000 barriles al día. El descenso de presión resultante es 3.45×10^6 Pa. Si se coloca un oleoducto paralelo y del mismo tamaño a lo largo de los últimos 18 km. del anterior, ¿cuál será la nueva capacidad de éste? En ambos casos el flujo es laminar y el descenso en la presión continúa siendo de 3.45×10^6 Pa.

8.3 Obtenga las expresiones para la distribución de velocidades y para el descenso de presión para un fluido newtoniano en flujo laminar en el espacio anular que existe entre dos tubos horizontales concéntricos. Aplique el teorema del momento a una capa de fluido de un grosor Δr y demuestre que el análisis de este volumen de control nos conduce a la ecuación:

$$\frac{d}{dr}(r\tau) = r\frac{\Delta P}{L}$$

Las expresiones requeridas se pueden obtener mediante la sustitución de la ley de Newton de la viscosidad y por medio de dos integraciones.

8.4 Una varilla delgada de diámetro d se impulsa a través de un tubo, cuyo diámetro es D. Si el alambre se encuentra en el centro del tubo, encuentre el arrastre por unidad de longitud del alambre. La densidad del fluido es ρ y la viscosidad es μ.

8.5 La viscosidad de los líquidos espesos, como el aceite, se mide, a menudo, mediante un aparato que consiste en un cilindro giratorio dentro de un cilindro más grande. La región anular entre ambos cilindros se llena con un líquido y se calcula el par que se necesita aplicar para hacer girar el cilindro interior a velocidad constante, suponiendo que el perfil de la velocidad es lineal. ¿Para qué diámetros de cilindro es exacta la suposición de que el perfil de la velocidad es lineal dentro de un límite de 1% de error? (Ver problema 7-14).

8.6 Un conducto hidráulico de 0.635 cm. se rompe repentinamente a 3 m. de un depósito cuya presión manométrica es de 207 k Pa. Compare la rapidez de flujo laminar con la rapidez de flujo no viscoso del conducto roto, en metros cúbicos por segundo.

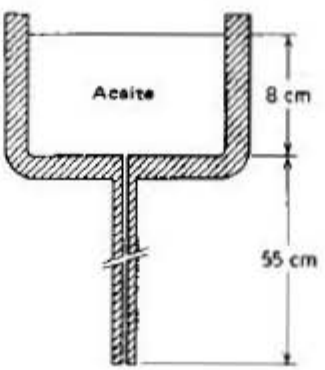
8.7 Dos fluidos no miscibles cuyas viscosidades y densidades son diferentes, fluyen por en medio de dos placas paralelas. Exprese las condiciones a la frontera en la interfase entre ambos fluidos.

8.8 Determine el perfil de velocidad para un fluido que fluye entre dos placas separadas por una distancia $2h$. El descenso de presión es constante.

8.9 Un fluido fluye entre dos placas paralelas, separadas una distancia h. La placa superior se mueve con una velocidad u_0, la inferior es estacionaria. ¿Para qué valor del gradiente de la presión será igual a cero el esfuerzo cortante sobre la pared inferior?

8.10 Obtenga la ecuación del movimiento para un flujo compresible, variable, no viscoso, unidimensional, a través de un tubo de sección transversal constante. Desprecie la gravedad.

8.11 Hay un tipo común de viscosímetro para líquidos que consiste en un depósito relativamente grande con un tubo de salida muy delgado. La rapidez de salida se determina tomando el tiempo de la superficie. Si fluye un aceite de densidad constante del viscosímetro con la rapidez de 0.273 $cm^3/seg.$, ¿Cuál es la viscosidad cinemática del fluido?



8.12 Una cinta continua pasa, en forma ascendente, a través de un baño químico con una velocidad V_0 y recoge una capa de líquido, de grosor h, densidad ρ y viscosidad μ. La gravedad tiende a hacer escurrir el líquido, pero el movimiento de la cinta evita que el líquido escape por completo. Suponga que se trata de un flujo laminar bien desarrollado, cuyo gradiente de presión es nulo y que la atmósfera no produce ningún corte en la superficie exterior de la película.

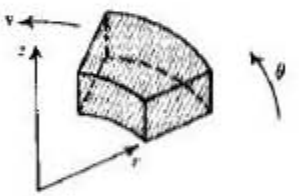
a) Establezca claramente las condiciones a la frontera para $y = 0$ e $y = h$ que debe satisfacer la velocidad.

b) Calcule el perfil de la velocidad.

c) Determine la rapidez con la que el fluido es arrastrado hacia arriba con la cinta, en términos de μ, ρ, h y V_0.

8.13 El elemento de fluido que ocupa el volumen de control que aparece en la figura tiene una velocidad $\mathbf{v} = v_\theta(r)\mathbf{e}_\theta$. Demuestre que la rapidez de cambio del vector velocidad a lo largo de una línea de flujo es:

$$d\mathbf{v}/dt = -(v_\theta^2/r)\mathbf{e}_r.$$



8.14 Dibuje el volumen de control del problema 8.13 mostrando las fuerzas y la expresión para el momento. Suponga que hay una densidad constante y que la gravedad actúa en la dirección negativa de z.

8.15 Examine el flujo laminar de un fluido newtoniano que desciende por una superficie plana e inclinada que forma un ángulo θ con la horizontal. Si se agrega al flujo por unidad de área una cantidad W de fluido en la superficie libre, encuentre usted el grosor de la capa de líquido en función de la distancia x, medida a lo largo del plano. Encuentre una expresión para el perfil de la velocidad en la capa del líquido. Deben despreciarse las velocidades de flujo normales a la superficie plana.

9
ECUACIONES DIFERENCIALES DE FLUJO DE FLUIDOS

Las leyes fundamentales del flujo de fluidos, que han sido expresadas en forma matemática para un volumen de control arbitrario en los capítulos 4, 5 y 6, también pueden expresarse en forma matemática para un tipo especial de volumen de control, el elemento diferencial. Estas ecuaciones diferenciales, del flujo de fluidos proporcionan un medio de determinación de la variación de las propiedades de los fluidos de un punto a otro. En el Capítulo 8 se estudiaron las ecuaciones diferenciales asociadas con algunos flujos laminares unidimensionales, constantes e incompresibles. En el Capítulo 9 se expresarán la ley de la conservación de la masa y la segunda ley de Newton del movimiento en forma diferencial para casos más generales. Los medios básicos que utilizamos para obtener estas ecuaciones diferenciales serán los que se elaboraron en los Capítulos 4 y 5.

9.1 LA ECUACION DE CONTINUIDAD DIFERENCIAL

La ecuación de continuidad que se va a elaborar en esta sección es la ley de conservación de la masa expresada en su forma diferencial. Estudiemos el volumen de control $\Delta x\ \Delta y\ \Delta z$ que aparece en la figura 9.1.

La expresión de volumen de control para la conservación de la masa es:

$$\iint \rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dA + \frac{\partial}{\partial t}\iiint \rho\,dV = 0 \qquad (4\text{-}1)$$

la cual establece que:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Rapidez neta de flujo}\\ \text{de la masa que sale}\\ \text{del volumen de contol}\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{l}\text{Rapidez de acumulación}\\ \text{de la masa dentro del}\\ \text{volumen de control}\end{array}\right\} = 0$$

El flujo de masa $\rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})$ de cada fase del volumen de control, aparece en la figura 9.1. La masa que se encuentra dentro del volumen de control es $\rho\Delta x\Delta y\Delta z$ y, por lo tanto, la rapidez de cambio de masa dentro del volumen

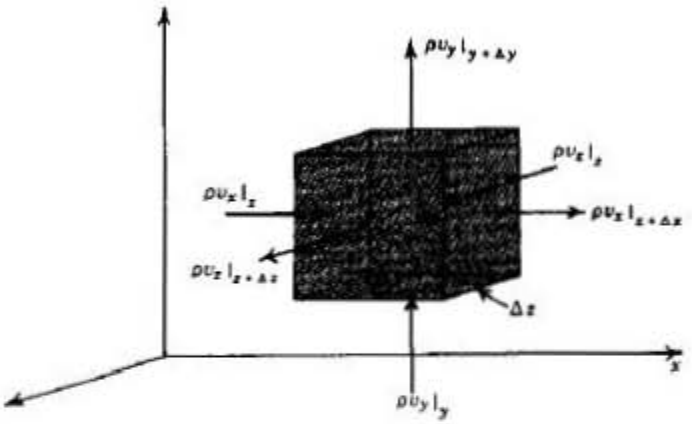


Figura 9.1 Flujo de masa a través de un volumen diferencial de control.

de control es:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\ \Delta x\ \Delta y\ \Delta z)$$

Se recuerda al estudiante que la densidad, en general, puede variar de un punto a otro, esto es: $\rho = \rho(x,y,z,t)$

El flujo neto de masa que sale del volumen de control en la dirección de x, es:

$$(\rho v_x|_{x+\Delta x} - \rho v_x|_x)\Delta y\ \Delta z$$

en la dirección de y:

$$(\rho v_y|_{y+\Delta y} - \rho v_y|_y)\Delta x\ \Delta z$$

y en la dirección de z:

$$(\rho v_z|_{z+\Delta z} - \rho v_z|_z)\Delta x\ \Delta y$$

El flujo total neto de la masa es la suma de los tres términos que aparecen arriba. Sustituyendo en la ecuación (4-1), se obtendrá:

$$(\rho v_x|_{x+\Delta x} - \rho v_x|_x)\Delta y\ \Delta z + (\rho v_y|_{y+\Delta y} - \rho v_y|_y)\Delta x\ \Delta z$$
$$+ (\rho v_z|_{z+\Delta z} - \rho v_z|_z)\Delta x\ \Delta y + \frac{\partial}{\partial t}(\rho\ \Delta x\ \Delta y\ \Delta z) = 0$$

El volumen no varía con el tiempo, de manera que podemos dividir ambos lados de la ecuación (9-1) entre $\Delta x\ \Delta y\ \Delta z$. En el límite, cuando $\Delta x\ \Delta y$ y Δz tienden a cero, se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z)+\frac{\partial \rho}{\partial t}=0 \tag{9-1}$$

Los tres primeros términos comprenden la divergencia del vector $\rho \mathbf{v}$. La divergencia de un vector es el producto punto con el operador

$$\text{div}\ \mathbf{A}=\nabla \cdot \mathbf{A}$$

El estudiante puede verificar que los tres primeros términos de la ecuación (9-1) se pueden escribir en la forma: $\nabla \cdot \rho \mathbf{v}$. por lo tanto, se obtiene una forma más compacta de la ecuación de continuidad:

$$\nabla \cdot \rho \mathbf{v}+\frac{\partial \rho}{\partial t}=0 \tag{9-2}$$

La ecuación anterior puede aplicarse al flujo tridimensional variable. Es obvio que, cuando el flujo es incompresible, esta ecuación se reduce a:

$$\nabla \cdot \mathbf{v}=0 \tag{9-3}$$

ya sea que el flujo sea o no permanente.

La ecuación (9-2) se puede reordenar en una forma ligeramente diferente para explicar el uso de la *derivada substancial*. Si se lleva a cabo la diferenciación indicada en la ecuación (9-1), se tiene:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+v_x\frac{\partial \rho}{\partial x}+v_y\frac{\partial \rho}{\partial y}+v_z\frac{\partial \rho}{\partial z}+\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=0$$

Los cuatro primeros términos de la ecuación anterior comprenden a la derivada substancial de la densidad, indicada por medio de $D\rho/Dt$, donde:

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+v_x\frac{\partial}{\partial x}+v_y\frac{\partial}{\partial y}+v_z\frac{\partial}{\partial z} \tag{9-4}$$

en coordenadas cartesianas. La ecuación de continuidad puede escribirse de la siguiente manera:

$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho \nabla \cdot \mathbf{v}=0 \tag{9-5}$$

Cuando se desea obtener la diferencial total de una cantidad se pueden emplear tres enfoques distintos. Si, por ejemplo, se desea evaluar el cambio

de presión atmosférica, P, la diferencial total escrita en coordenadas rectangulares es:

$$dP = \frac{\partial P}{\partial t}dt + \frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz$$

donde dx, dy y dz son desplazamientos arbitrarios en las direcciones de x, y y z. La rapidez de cambio de la presión se obtiene dividiendo la ecuación entre dt, dando como resultado:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{dz}{dt}\frac{\partial P}{\partial z} \tag{9-6}$$

Como primer enfoque, el instrumento para medir la presión se encuentra en una estación meteorológica que, desde luego, está fija en un lugar de la superficie terrestre. Por lo tanto, los coeficientes: dx/dt, dy/dt y dz/dt, son todos nulos, y para un punto fijo de observación, la derivada total, dP/dt es igual a la derivada local con respecto al tiempo, $\partial P/\partial t$.

Un segundo enfoque implicaría el uso del instrumento para medir la presión que utilizan los aviones, el cual, a discreción del piloto, puede hacer que el aparato suba, descienda, o vuele en cualquier dirección x, y, z escogida. En este caso, los coeficientes dx/dt, dy/dt, dz/dt, son las velocidades del avión a lo largo de los ejes x, y, z y se escogen arbitrariamente, teniendo una relación puramente casual con las corrientes de aire.

La tercera situación es aquella en la que el indicador de presión es un globo que asciende, cae y se mueve debido a la acción del flujo del aire en el que se encuentra suspendido. En este caso los coeficientes dx/dt, dy/dt, dz/dt son los del flujo y se les puede denotar como v_x, v_y y v_z, respectivamente. Este último caso corresponde a la derivada sustancial y los términos se pueden reagrupar en la forma en que aparecen a continuación:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{DP}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial P}{\partial t}}_{\text{rapidez local de cambio de presión}} \underbrace{+ v_x\frac{\partial P}{\partial x} + v_y\frac{\partial P}{\partial y} + v_z\frac{\partial P}{\partial z}}_{\text{rapidez de cambio de la presión debido al movimiento}} \tag{9-7}$$

La derivada sustancial es la derivada que sigue el movimiento del fluido. La derivada D/Dt se puede interpretar como la rapidez de cambio de un fluido o flujo variable a lo largo de la trayectoria de un elemento de fluido. La derivada sustancial se aplicará, tanto a las variables escalares como a las vectoriales en las secciones siguientes.

9.2 ECUACIONES DE NAVIER-STOKES

Las ecuaciones de Navier-Stokes son las formas diferenciales de la segunda ley de Newton del movimiento. Tome como ejemplo, el volumen diferencial de control que aparece en la figura 9.1. El medio básico que se utilizará para obtener las ecuaciones de Navier-Stokes es la segunda ley de Newton del movimiento correspondiente a un volumen de control arbitrario, como se hizo en el Capítulo 5:

$$\sum \mathbf{F} = \iint_{c.s.} \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, dA + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{c.v.} \rho \mathbf{v}\, dV \tag{5-4}$$

la cual establece que:

Suma de las fuerzas externas que actúan sobre el volumen de control	=	rapidez neta del flujo de momento, hacia afuera del volumen de control	+	rapidez de cambio del momento lineal dentro del volumen de control

Como la expresión matemática de cada uno de los términos anteriores es muy larga, se calculará cada una separadamente y después se las sustituirá en la ecuación (5-4).

El cálculo se puede simplificar más aún, recordando que, como en el caso anterior, se ha dividido entre el volumen de control y se ha tomado el límite, cuando las dimensiones tienden a cero. La ecuación (5-4) tmabién se puede escribir en la forma siguiente:

$$\lim_{\Delta x\,\Delta y\,\Delta z \to 0} \frac{\sum \mathbf{F}}{\Delta x\, \Delta y\, \Delta z} = \lim_{\Delta x,\Delta y,\Delta z \to 0} \frac{\iint \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, dA}{\Delta x\, \Delta y\, \Delta z} + \lim_{\Delta x\,\Delta y\,\Delta z \to 0} \frac{\partial/\partial t \iiint \rho \mathbf{v}\, dV}{\Delta x\, \Delta y\, \Delta z} \tag{9-8}$$

① ② ③

① ***Suma de las Fuerzas Externas.*** Las fuerzas que actúan sobre el volumen de control son las que se deben al esfuerzo normal y al esfuerzo cortante, y las fuerzas tales como la gravedad que se ejercen sobre un cuerpo. La figura 9.2 nos muestra las diversas fuerzas que actúan sobre el volumen de control. Si se suman las fuerzas en la dirección de x, se obtiene:

$$\sum F_x = (\sigma_{xx}|_{x+\Delta x} - \sigma_{xx}|_x)\Delta y\, \Delta z + (\tau_{yx}|_{y+\Delta y} - \tau_{yx}|_y)\Delta x\, \Delta z$$

$$+ (\tau_{zx}|_{z+\Delta z} - \tau_{zx}|_z)\Delta x\, \Delta y + g_x \rho\, \Delta x\, \Delta y\, \Delta z$$

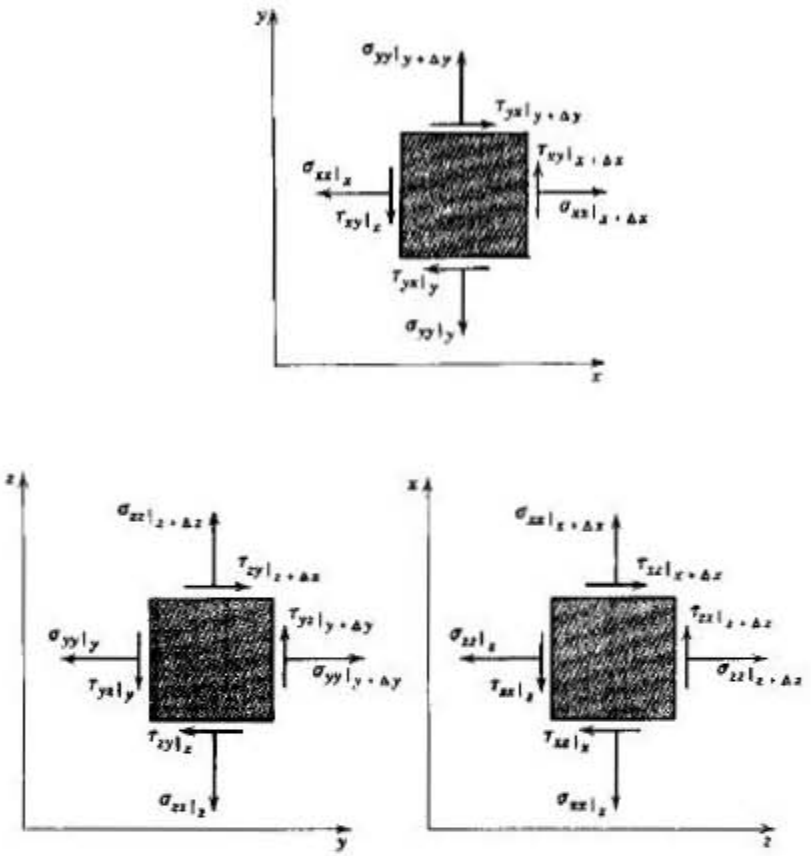


Figura 9.2 Fuerzas que actúan sobre un volumen diferencial de control.

donde g_x es la componente de la aceleración gravitacional en la dirección de x. En el límite, cuando las dimensiones del elemento tienden a cero,

$$\lim_{\Delta x,\Delta y,\Delta z\to 0}\frac{\sum F_x}{\Delta x\,\Delta y\,\Delta z}=\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+\rho g_x \tag{9-9}$$

Se pueden obtener expresiones semejantes para las sumas en las direcciones y y z:

$$\lim_{\Delta x,\Delta y,\Delta z\to 0}\frac{\sum F_y}{\Delta x\,\Delta y\,\Delta z}=\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+\rho g_y \tag{9-10}$$

$$\lim_{\Delta x,\Delta y,\Delta z\to 0}\frac{\sum F_z}{\Delta x\,\Delta y\,\Delta z}=\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+\rho g_z \tag{9-11}$$

② ***Flujo Neto de Momento a través del Volumen de Control.*** El flujo neto de momento que pasa a través del volumen de control, que se puede observar en la

figura 9.3, es:

$$\lim_{\Delta x,\Delta y,\Delta z\to 0}\frac{\iint \rho \mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dA}{\Delta x\,\Delta y\,\Delta z}=\lim_{\Delta x,\Delta y,\Delta z\to 0}\left[\frac{(\rho \mathbf{v}v_x|_{x+\Delta x}-\rho \mathbf{v}v_x|_x)\Delta y\,\Delta z}{\Delta x\,\Delta y\,\Delta z}\right.$$
$$+\frac{(\rho \mathbf{v}v_y|_{y+\Delta y}-\rho \mathbf{v}v_y|_y)\Delta x\,\Delta z}{\Delta x\,\Delta y\,\Delta z}$$
$$\left.+\frac{(\rho \mathbf{v}v_z|_{z+\Delta z}-\rho \mathbf{v}v_z|_z)\Delta x\,\Delta y}{\Delta x\,\Delta y\,\Delta z}\right]$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}(\rho \mathbf{v}v_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho \mathbf{v}v_y)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho \mathbf{v}v_z) \qquad (9\text{-}12)$$

Al realizar la diferenciación indicada del lado derecho de la ecuación (9-12), se obtiene:

$$\lim_{\Delta x,\Delta y,\Delta z\to 0}\frac{\iint \rho \mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dA}{\Delta x\,\Delta y\,\Delta z}=\mathbf{v}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z)\right]$$
$$+\rho\left[v_x\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}+v_y\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}+v_z\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}\right]$$

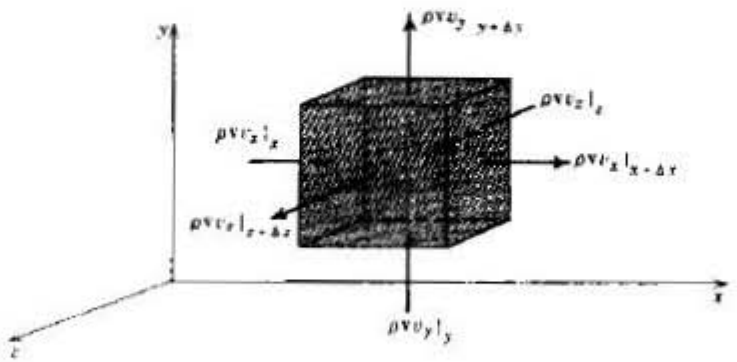


Figura 9.3 Flujo de momento a través de un volumen diferencial de control.

El término anterior se puede simplificar con la ayuda de la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z)=0 \qquad (9\text{-}1)$$

la cual, después de hacer la sustitución se transforma en:

$$\lim_{\Delta x,\Delta y,\Delta z\to 0}\frac{\iint \rho \mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dA}{\Delta x\,\Delta y\,\Delta z}=-\mathbf{v}\frac{\partial \rho}{\partial t}+\rho\left[v_x\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}+v_y\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}+v_z\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}\right] \qquad (9\text{-}13)$$

③ *Rapidez de cambio de Momento dentro del Volumen de Control.* La rapidez (con respecto al tiempo) de cambio de momento dentro del volumen de control, puede evaluarse directamente:

$$\lim_{\Delta x,\Delta y,\Delta z \to 0} \frac{\partial/\partial t \iiint \mathbf{v}\rho \, dV}{\Delta x \, \Delta y \, \Delta z} = \frac{(\partial/\partial t)\rho \mathbf{v} \, \Delta x \, \Delta y \, \Delta z}{\Delta x \, \Delta y \, \Delta z} = \frac{\partial}{\partial t}\rho \mathbf{v} = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad (9\text{-}14)$$

Ahora ya se han calculado todos los términos de la ecuación (9-8):

$$① \lim_{\Delta x,\Delta y,\Delta z \to 0} \frac{\sum \mathbf{F}}{\Delta x \, \Delta y \, \Delta z} = \begin{Bmatrix} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho g_x\right)\mathbf{e}_x & (9\text{-}9) \\ \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho g_y\right)\mathbf{e}_y & (9\text{-}10) \\ \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho g_z\right)\mathbf{e}_z & (9\text{-}11) \end{Bmatrix}$$

$$② \lim_{\Delta x,\Delta y,\Delta z \to 0} \frac{\iint \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, dA}{\Delta x \, \Delta y \, \Delta z} = -\mathbf{v}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\left(v_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}\right) \qquad (9\text{-}13)$$

$$③ \lim_{\Delta x,\Delta y,\Delta z \to 0} \frac{\partial/\partial t \iiint \rho \mathbf{v} \, dV}{\Delta x \, \Delta y \, \Delta z} = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad (9\text{-}14)$$

Como puede verse, las fuerzas están expresadas por medio de sus componentes, en tanto que los términos de rapidez de cambio de momento se han expresado como vectores. Cuando los términos de momento se expresan por medio de sus componentes, se obtienen tres ecuaciones diferenciales que son los enunciados de la segunda ley de Newton en las direcciones de x, y, z:

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) = \rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \qquad (9\text{-}15a)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right) = \rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \qquad (9\text{-}15b)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = \rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \qquad (9\text{-}15c)$$

Se habrá notado que en estas ecuaciones (9-15), los términos del lado izquierdo representan la rapidez de cambio de momento (con respecto al tiempo) en tanto que los términos del lado derecho representan a las fuerzas. Si enfocamos

nuestra atención sobre los términos del lado izquierdo de la ecuación (9-15a), podremos observar que:

$$\underbrace{\frac{\partial v_x}{\partial t}}_{\text{rapidez local de cambio de } v_x} + \underbrace{v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}}_{\text{rapidez de cambio de } v_x \text{ debido al movimiento}} = \left(\frac{\partial}{\partial t}+v_x\frac{\partial}{\partial x}+v_y\frac{\partial}{\partial y}+v_z\frac{\partial}{\partial z}\right)v_x$$

El primer término, $\partial v_x/\partial t$, incluye a la rapidez (con respecto al tiempo) de v_x en un punto y se le llama la *aceleración local*. Los términos restantes incluyen al cambio de velocidad de un punto a otro, o sea la *aceleración convectiva*. La suma de estos dos términos encerrados entre paréntesis constituye la aceleración total. El lector puede verificar que los términos que aparecen del lado izquierdo de las ecuaciones (9-15) son todos, de la forma:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+v_x\frac{\partial}{\partial x}+v_y\frac{\partial}{\partial y}+v_z\frac{\partial}{\partial z}\right)v_i$$

donde $v_i = v_x$, v_y o v_z. La ecuación anterior es la derivada sustancial de v_i.

Cuando se usa la notación de la derivada sustancial, las ecuaciones (9-15) se transforman en:

$$\rho\frac{Dv_x}{Dt} = \rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \tag{9-16a}$$

$$\rho\frac{Dv_y}{Dt} = \rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \tag{9-16b}$$

$$\rho\frac{Dv_z}{Dt} = \rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \tag{9-16c}$$

Las ecuaciones (9-16) son válidas para cualquier tipo de fluido sin importar la naturaleza de la relación esfuerzo-rapidez de deformación. Si se utilizan las relaciones de Stokes para la viscosidad, que son las ecuaciones (7-13) y (7-14), correspondientes a las componentes del esfuerzo, las ecuaciones (9-16) se convierten en:

$$\rho\frac{Dv_x}{Dt} = \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\tfrac{2}{3}\mu\nabla\cdot\mathbf{v}\right)+\nabla\cdot\left(\mu\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}\right)+\nabla\cdot(\mu\nabla v_x) \tag{9-17a}$$

$$\rho\frac{Dv_y}{Dt} = \rho g_y - \frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\tfrac{2}{3}\mu\nabla\cdot\mathbf{v}\right)+\nabla\cdot\left(\mu\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}\right)+\nabla\cdot(\mu\nabla v_y) \tag{9-17b}$$

$$\rho\frac{Dv_z}{Dt} = \rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial z}\left(\tfrac{2}{3}\mu\nabla\cdot\mathbf{v}\right)+\nabla\cdot\left(\mu\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}\right)+\nabla\cdot(\mu\nabla v_z) \tag{9-17c}$$

Las ecuaciones anteriores se llaman ecuaciones de Navier-Stokes* y son las expresiones diferenciales de la segunda ley de Newton del movimiento que corresponden a un fluido newtoniano. Como no se han hecho suposiciones acerca de la compresibilidad del fluido, estas ecuaciones son válidas, tanto para los fluidos compresibles como para los incompresibles. Este estudio de la transferencia de momento, se limitará al flujo incompresible con viscosidad constante. En un flujo incompresible, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. Por lo tanto, las ecuaciones (9-17), quedan en la forma:

$$\rho \frac{Dv_x}{Dt} = \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \tag{9-18a}$$

$$\rho \frac{Dv_y}{Dt} = \rho g_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) \tag{9-18b}$$

$$\rho \frac{Dv_z}{Dt} = \rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \tag{9-18c}$$

Estas ecuaciones pueden expresarse en forma más compacta en la ecuación de un solo vector:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \tag{9-19}$$

La anterior es la ecuación de Navier-Stokes para un flujo incompresible. Las ecuaciones de Navier-Stokes se encuentran escritas en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas, en el Apéndice E. Como la obtención de este resultado ha sido larga, se repasarán las suposiciones hechas, y, por lo tanto, las limitaciones, de la ecuación (9-19). Las suposiciones son:

1. Flujo incompresible
2. Viscosidad constante
3. Flujo laminar†

Todas estas suposiciones están asociadas con el uso de la relación de viscosidad de Stokes. Si el flujo no es viscoso ($\mu = 0$), la ecuación de Navier-Stokes se transforma en:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla P \tag{9-20}$$

*M. Navier, Memoire Sur les Mouvements des Fluides, *Mem.* de l'Acad. d. Sci., 6,398 (1927); C. G. Stokes "On the Theories of the Internal Friction of Fluids in Motion", Trans. Cambridge Phys. Soc., 8 (1845).

† Hablando estrictamente, la ecuación (9-19) es válida en los flujos turbulentos, ya que el esfuerzo turbulento está incluido en el término para el flujo de momento. Esto se estudiará en el Capítulo 13.

que se conoce como ecuación de Euler, que sólo tiene la limitación de que tiene que aplicarse a un fluido no viscoso.

EJEMPLO 1

La ecuación (9-19) se puede aplicar a numerosos sistemas de flujo para obtener información concerniente a: la variación de la velocidad, los gradientes de presión y otra información del tipo de la que se obtuvo en el Capítulo 8. Existen muchas situaciones lo suficientemente complejas para hacer que la solución sea extremadamente difícil y esté fuera del alcance de este libro. En la figura 9.4 aparece una situación para la cual *sí* se puede obtener una solución. Esta figura nos muestra la situación de un fluido incompresible confinado entre dos superficies verticales paralelas. Una de ellas, la del lado izquierdo, es estacionaria, en tanto que la otra se está moviendo hacia arriba con una velocidad constante v. Si consideramos al fluido como newtoniano y al flujo como laminar, la ecuación que rige el movimiento es la de Navier-Stokes, en la forma dada en la ecuación (9-19). A continuación aparece la reducción de cada uno de estos términos de la ecuación vectorial a su forma aplicable.

$$\rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt}=\rho\left\{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+v_x\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}+v_y\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}+v_z\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}\right\}=0$$

$$\rho\mathbf{g}=-\rho g\mathbf{e}_y$$

$$\nabla P=\frac{dP}{dy}\mathbf{e}_y$$

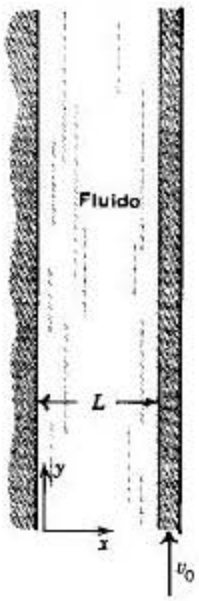


Figura 9.4 Fluido que se encuentra entre dos placas verticales, la de la izquierda es estacionaria y la derecha se mueve verticalmente hacia arriba con una velocidad v_0.

donde dP/dy es constante y

$$\mu \nabla^2 \mathbf{v} = \mu \frac{d^2 v_y}{dx^2} \mathbf{e}_y$$

La ecuación resultante, que se tiene que resolver, es:

$$0 = -\rho g - \frac{dP}{dy} + \mu \frac{d^2 v_y}{dx^2}$$

Esta ecuación diferencial es separable. La primera integración da el siguiente resultado:

$$\frac{dv_y}{dx} + \frac{x}{\mu}\left\{-\rho g - \frac{dP}{dy}\right\} = C_1$$

Integrando una vez más, se obtiene:

$$v_y + \frac{x^2}{2\mu}\left\{-\rho g - \frac{dP}{dy}\right\} = C_1 x + C_2$$

Las constantes de integración se pueden evaluar usando las condiciones a la frontera: $v_y = 0$ en $x = 0$ y $v_y = v_0$ en $x = L$. Por lo tanto, las constantes tienen el valor:

$$C_1 = \frac{v_0}{L} + \frac{L}{2\mu}\left\{-\rho g - \frac{dP}{dy}\right\} \qquad \text{y} \qquad C_2 = 0$$

El perfil de la velocidad se puede expresar así:

$$v_y = \underbrace{\frac{1}{2\mu}\left\{-\rho g - \frac{dP}{dy}\right\}\{Lx - x^2\}}_{①} + \underbrace{v_0 \frac{x}{L}}_{②} \tag{9-21}$$

Es interesante darse cuenta, en la ecuación (9-21), del efecto de los términos cuyos números son ① y ②, que se adicionan. La ecuación (9-21) es válida, ya sea que v sea ascendente, descendente o nula. En todos los casos se pueden agregar los términos para obtener el perfil total de la velocidad. Estos resultados aparecen en la figura (9.5). El perfil resultante de la velocidad se puede obtener superponiendo las dos partes, como puede verse en cada uno de los casos:

La ecuación de Euler se puede resolver, también, para determinar los perfiles de la velocidad, como se verá en el Capítulo 10. Las propiedades vectoriales de la ecuación de Euler se verán en el ejemplo que aparece a continuación, en el cual se obtendrá la forma del perfil de la velocidad.

EJEMPLO 2

Una flecha giratoria como la que aparece en la figura 9.6, hace que un líquido se mueva y origine líneas circulares de corriente cuya velocidad es inversamente proporcional a su distancia al centro. Encuentre la forma de la superficie, considerando que el líquido no es viscoso.

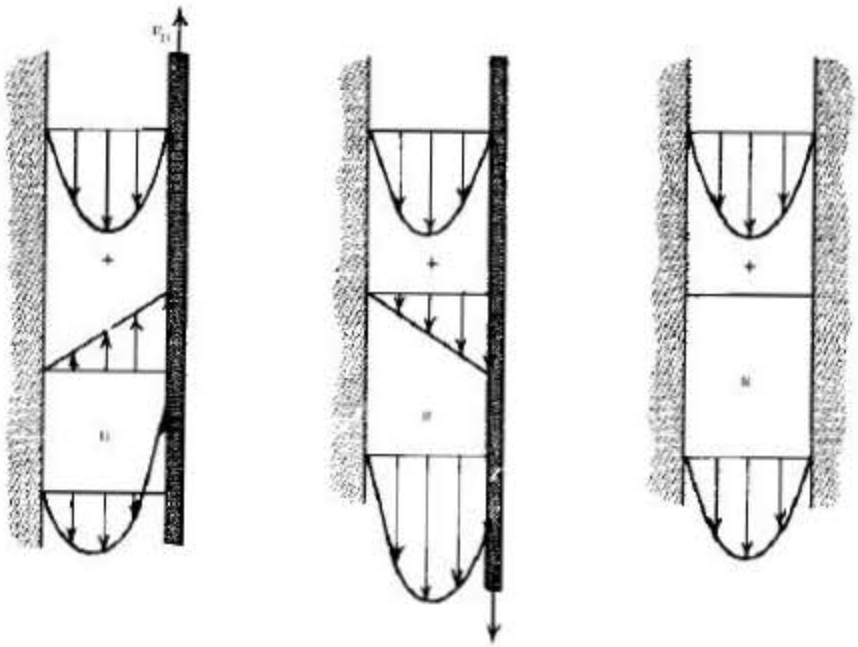


Figura 9.5 Perfiles de velocidad correspondientes a una superficie que se mueve en forma ascendente, descendente o es estacionaria.

Como la presión será constante en toda la superficie libre, podremos observar que ésta es perpendicular al gradiente de la presión. La determinación de este último, nos permitirá, por lo tanto, evaluar la pendiente de la superficie libre.

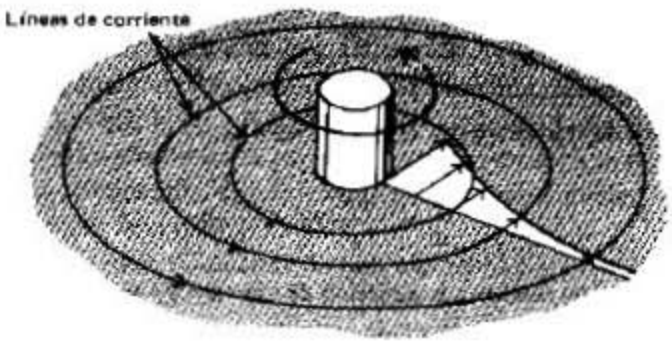


Figura 9.6 Flecha giratoria dentro de un fluido.

Reordenando la ecuación (9-20), se tendrá:

$$\nabla P = \rho \mathbf{g} - \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \qquad (9\text{-}20)$$

La velocidad es $\mathbf{v} = A\mathbf{e}_\theta/r$, donde A es una constante, cuando se usa el sistema de coordenadas de la figura 9.7. Suponiendo que no hay deslizamiento entre el fluido y el eje, en la superficie de este último, se tendrá:

$$v(R) = \omega R = \frac{A}{R}$$

y, por lo tanto, $A = \omega R^2$ y

$$\mathbf{v} = \frac{\omega R^2}{r}\mathbf{e}_\theta$$

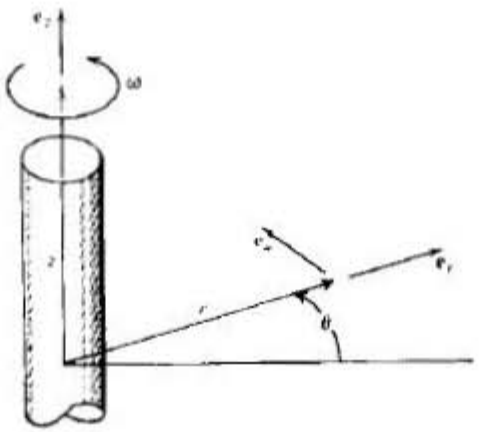


Figura 9.7 Sistema de coordenadas cilíndricas para una flecha giratoria dentro de un fluido.

La derivada sustancial, $D\mathbf{v}/Dt$ se puede calcular tomando la derivada total:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\omega R^2}{r^2}\mathbf{e}_\theta \dot{r} + \frac{\omega R^2}{r}\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt}$$

donde $d\mathbf{e}_\theta/dt = -\dot{\theta}\mathbf{e}_r$. La derivada total se convierte en:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\omega R^2}{r^2}\dot{r}\mathbf{e}_\theta - \frac{\omega R^2}{r}\dot{\theta}\mathbf{e}_r$$

Ahora la velocidad del fluido en la dirección de r es cero y $\dot{\theta}$ para el fluido es v/r, de modo que:

$$\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)_{\text{fluido}} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{\omega R^2}{r^2}v\mathbf{e}_r = -\frac{\omega^2 R^4}{r^3}\mathbf{e}_r$$

Este resultado podría haberse obtenido de manera más directa, observando que $D\mathbf{v}/Dt$ es la aceleración local del fluido que en este caso es $-v^2\mathbf{e}_r/r$. El gradiente de la presión es:

$$\nabla P = -\rho g\mathbf{e}_z + \rho\frac{\omega^2 R^4\mathbf{e}_r}{r^3}$$

En la figura 9.8 puede verse que la superficie libre forma un ángulo β con el eje r, de manera que:

$$\tan\beta = \frac{\rho\omega^2 R^4}{r^3\rho g} = \frac{\omega^2 R^4}{gr^3}$$

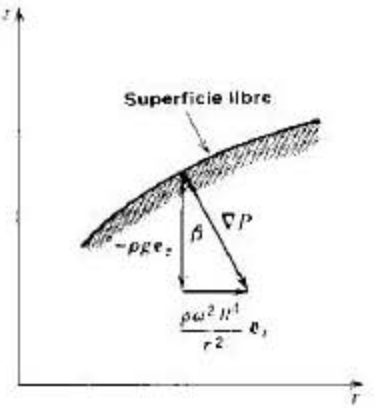


Figura 9.8 Pendiente de una superficie libre.

9.3 ECUACION DE BERNOULLI

La ecuación de Euler se puede integrar directamente para un caso particular, el del flujo a lo largo de una línea de corriente. El uso de las coordenadas de línea de corriente resulta muy útil para integrar la ecuación de Euler. Las coordenadas de línea de corriente, s y n, se muestran en la figura 9.9. La dirección de s es paralela a la línea de corriente, la dirección de n es perpendicular a la misma y su sentido es hacia afuera del centro instantáneo de curvatura. Las propiedades del flujo y del fluido son funciones de la posición y del tiempo. Así, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(s, n, t)$ y $P = P(s, n, t)$. Las derivadas sustanciales de los gradientes de la velocidad y de la presión, que aparecen en la ecuación (9-20) deben expresarse en términos de coordenadas de línea de corriente de tal modo que se pueda integrar la ecuación (9-20).

Siguiendo la forma utilizada en la cuación (9-6) para obtener la derivada sustancial, se tendrá:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \dot{s}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s} + \dot{n}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial n}$$

Como la velocidad del elemento de fluido tiene como componentes $\dot{s} = v$, $\dot{n} = 0$ la derivada sustancial de la velocidad en coordenadas de línea de corriente es:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + v\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s} \qquad (9\text{-}22)$$

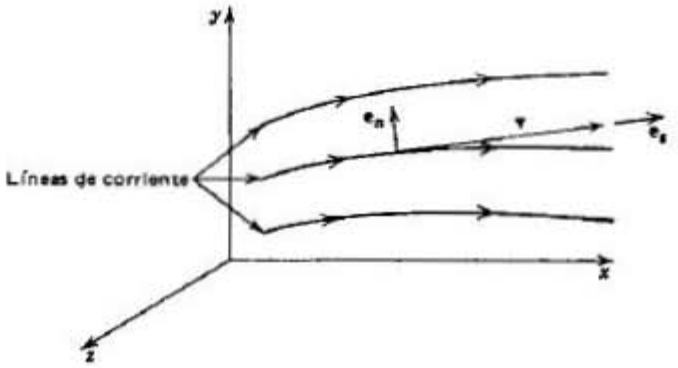


Figura 9.9 Coordenadas de línea de flujo.

El gradiente de presión en coordenadas de línea de corriente se puede escribir en la forma siguiente:

$$\nabla P = \frac{\partial P}{\partial s}\mathbf{e}_s + \frac{\partial P}{\partial n}\mathbf{e}_n \tag{9-23}$$

Tomando el producto punto de la ecuación (9-20) con $\mathbf{e}_s ds$, y usando las ecuaciones (9-22) y (9-23), se obtiene:

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\cdot \mathbf{e}_s\, ds + v\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s}\cdot \mathbf{e}_s\, ds\right) = \rho \mathbf{g}\cdot \mathbf{e}_s\, ds - \left(\frac{\partial P}{\partial s}\mathbf{e}_s + \frac{\partial P}{\partial n}\mathbf{e}_n\right)\cdot \mathbf{e}_s\, ds$$

o, como $\partial \mathbf{v}/\partial s \cdot \mathbf{e}_s = \partial/\partial s(\mathbf{v}\cdot \mathbf{e}_s) = \partial v/\partial s$, se tendrá:

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\cdot \mathbf{e}_s\, ds + \frac{\partial}{\partial s}\left\{\frac{v^2}{2}\right\} ds\right) = \rho \mathbf{g}\cdot \mathbf{e}_s\, ds - \frac{\partial P}{\partial s} ds \tag{9-24}$$

Si se selecciona g para actuar en la dirección $-\mathbf{y}$, se tendrá $\mathbf{g}\cdot \mathbf{e}_s\, ds = -g\, dy$. En un flujo constante *incompresible*, se puede integrar la ecuación (9-24), resultando:

$$\frac{v^2}{2} + gy + \frac{P}{\rho} = \text{constante} \tag{9-25}$$

que se conoce como ecuación de Bernoulli. Las limitaciones son:

1. Flujo no viscoso
2. Flujo constante
3. Flujo incompresible
4. La ecuación se aplica a lo largo de una línea de corriente.

La limitación 4 se moderará para ciertas condiciones, que investigaremos en el Capítulo 10.

La ecuación de Bernoulli también se obtuvo en el Capítulo 5 a partir de ciertas consideraciones acerca de la energía correspondiente a un flujo constante e incompresible y energía interna constante. Es interesante notar que la suposición de que la energía interna es constante y la de que el flujo no es viscoso, deben ser equivalentes, ya que las demás suposiciones eran iguales. Por lo tanto, debe notarse que la viscosidad efectuará, de alguna manera, un cambio en la energía interna.

9.4 CONCLUSION

Se han visto las ecuaciones diferenciales para la conservación de la masa y la segunda ley de Newton del movimiento. Estas ecuaciones pueden subdividirse en dos grupos especiales:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0 \tag{9-26}$$

(ecuación de continuidad)

Flujo no viscoso:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla P \tag{9-27}$$

(ecuación de Euler)

Flujo viscoso, incompresible:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{9-28}$$

(ecuación de continuidad)

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \tag{9-29}$$

(ecuación de Navier-Stokes para un flujo incompresible)

Además, el estudiante debe comprender el significado físico de la derivada sustancial, así como la capacidad de la representación vectorial. En forma de componentes, la ecuación (9-29) comprende unos 27 términos en coordenadas cartesianas.

PROBLEMAS

9.1 Aplique la ley de conservación de la masa a un elemento en el sistema de coordenadas polares y obtenga la ecuación de continuidad para un flujo incompresible, bidimensional y permanente.

9.2 Demuestre, en coordenadas cartesianas, que:

$$v_x\frac{\partial}{\partial x}+v_y\frac{\partial}{\partial y}+v_z\frac{\partial}{\partial z}$$

se puede escribir $(\mathbf{v}\cdot\nabla)$. ¿Cuál es el significado físico del término $(\mathbf{v}\cdot\nabla)$?

9.3 En un flujo incompresible, el volumen del fluido es constante. Usando la ecuación de continuidad, $\nabla\cdot\mathbf{v}=0$, demuestre que el cambio de volumen del fluido es cero.

9.4 Encuentre Dv/Dt en coordenadas polares, tomando la derivada de la velocidad. (Sugerencia: $\mathbf{v}=v_r(r,\theta,t)\mathbf{e}_r+v_\theta(r,\theta,t)\mathbf{e}_\theta$. Recuerde que los vectores unitarios también tienen derivada).

9.5 En flujos que son muy lentos y cuya viscosidad es muy grande (llamados flujos deslizantes), tal como ocurre en la lubricación, es posible omitir los términos correspondientes a la inercia, Dv/Dt, en la ecuación de Navier-Stokes. En los flujos rápidos y cuya viscosidad es pequeña, no debe omitirse el término que corresponde a la viscosidad $\nu\nabla^2\mathbf{v}$. Explique usted por qué.

9.6 Usando las ecuaciones de Navier-Stokes y la ecuación de continuidad, obtenga una expresión para el perfil de la velocidad entre dos placas planas, paralelas.

9.7 ¿Satisface la distribución de velocidades del ejemplo 2 el requisito de continuidad?

9.8 La densidad atmosférica se puede calcular, aproximadamente por medio de la relación $\rho=\rho_0\exp(-y/\beta)$, donde $\beta=22{,}000$ ft. Determine la rapidez con la que cambia la densidad con respecto a un cuerpo que cae con una velocidad de v fps. Si $v=20{,}000$ fps. a 100,000 ft, calcule la rapidez de cambio de la densidad.

9.9 En un campo de velocidades donde $\mathbf{v}=100[(y/L)^2\mathbf{e}_x+(x/L)^2\mathbf{e}_y]$ fps. determine el gradiente de la presión en el punto $(L, 2L)$. El eje y es vertical, la densidad es de 64.4 $\text{lb}_\text{m}/\text{ft}^3$ y el flujo puede considerarse no viscoso.

9.10 Escriba las ecuaciones (9-17) en forma de componentes, en coordenadas cartesianas.

9.11 Obtenga la ecuación (23) a partir de la (9-27).

9.12 En coordenadas polares, la ecuación de continuidad es la siguiente:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}=0$$

Demuestre que:

(a) Si $v_\theta = 0$, entonces $v_r = F(\theta)/r$;

(b) Si $v_r = 0$, entonces $v_\theta = f(r)$.

9.13 Usando las leyes para la suma de vectores y la ecuación (9-19), demuestre que, en la ausencia de gravedad,

(a) la aceleración del fluido, la fuerza de la presión y la fuerza viscosa, todas están en el mismo plano.

(b) en la ausencia de fuerzas viscosas, el fluido se acelera en la dirección en que la presión desciende.

(c) un fluido estático siempre empieza a moverse en la dirección de descenso de la presión.

9.14 Obtenga las ecuaciones correspondientes a un flujo unidimensional, permanente, viscoso, compresible en la dirección de x a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes (estas ecuaciones, junto con una ecuación de estado y la ecuación de energía, se pueden resolver para el caso de las ondas débiles de choque).

9.15 Obtenga las ecuaciones correspondientes a un flujo unidimensional, no viscoso, compresible y no permanente.

10
FLUJO DE FLUIDOS NO VISCOSOS

El flujo de los fluidos no viscosos es un área importante de la transferencia de momento, en la cual, en ausencia de esfuerzo cortante, es posible encontrar soluciones analíticas a las ecuaciones diferenciales del flujo de los fluidos.

El tema flujo no viscoso tiene una aplicación especial en aerodinámica y en hidrodinámica y una aplicación general al flujo alrededor de los cuerpos, llamado flujo externo. En este capítulo introduciremos los fundamentos del análisis del flujo no viscoso.

10.1 ROTACION DE UN FLUIDO EN UN PUNTO

Estudiemos el elemento de fluido que aparece en la figura 10.1. En el lapso Δt, el elemento se moverá en el plano xy, como puede verse. Además

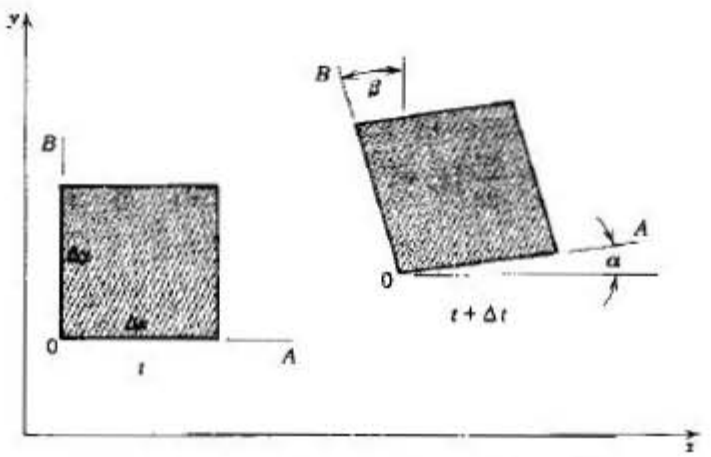


Figura 10.1 Rotación de un elemento de fluido.

de la traslación, el elemento también puede deformarse y girar. Ya anteriormente, en el Capítulo 7, se estudió la deformación. Ahora dirijamos nuestra atención a la rotación del elemento. Como el elemento puede deformarse, la orientación nos la proporcionará la rotación media de los segmentos de recta OB y OA, o denotando a la rotación:

$$\omega_z = \frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

donde el sentido positivo es el que va en contra de las manecillas del reloj. En la figura 10.1 podemos ver que:

$$\omega_z = \lim_{\Delta x,\Delta y,\Delta z,\Delta t\to 0} \frac{1}{2}\left(\frac{\arctan\{[(v_y|_{x+\Delta x} - v_y|_x)\,\Delta t]/\Delta x\}}{\Delta t} + \frac{\arctan\{-[(v_x|_{y+\Delta y} - v_x|_y)\,\Delta t]/\Delta y\}}{\Delta t}\right)$$

que, en el límite, se transforma en:

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) \tag{10-1}$$

El subíndice z indica que la rotación se efectúa alrededor del eje z.

En los planos xz y yz, la rotación en un punto está dada por:

$$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \tag{10-2}$$

y

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) \tag{10-3}$$

La rotación en un punto se relaciona con el producto vectorial o cruz de la velocidad. El estudiante puede verificar que:

$$\nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\mathbf{e}_z$$

y, por lo tanto,

$$\nabla \times \mathbf{v} = 2\boldsymbol{\omega} \tag{10-4}$$

El vector $\nabla \times \mathbf{v}$ se conoce también como *vorticidad*. Cuando la rotación es cero en un punto, se dice que el flujo es irrotacional. Como puede deducirse de la ecuación (10-4), para un flujo irrotacional, $\nabla \times \mathbf{v} = 0$, En secciones posteriores explicaremos el significado de flujo irrotacional.

10.2 LA FUNCION DE CORRIENTE

Para un flujo bidimensional incompresible, la ecuación de continuidad es:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \tag{9-3}$$

La ecuación (9-3) indica que v_x y v_y están relacionadas de algún modo, de manera que: $\partial v_x/\partial x = -(\partial v_y/\partial y)$. Tal vez la forma más sencilla de expresar esta relación es tener a v_x y v_y relacionados con la misma función. Estudiemos la función $F(x, y)$; if $v_x = F(x, y)$, entonces:

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial x} \qquad \text{ó} \qquad v_y = -\int \frac{\partial F}{\partial x}\, dy$$

Desafortunadamente, la selección de $v = F(x, y)$ da como resultado una integral para v_y. Podemos quitar fácilmente el signo de la integral si hacemos que la función original $F(x, y)$ sea igual a la derivada de alguna función con respecto a y. Por ejemplo, si $F(x, y) = (\partial\Psi(x, y)/\partial y]$, entonces:

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

Como $\partial v_x/\partial x = -(\partial v_y/\partial y)$, podemos escribir:

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) \qquad \text{ó} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(v_y + \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) = 0$$

Para que esta ecuación sea válida en general:

$$v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

En lugar de tener dos incógnitas v_x y v_y, ahora tenemos una sola, Ψ. La incógnita Ψ se llama *función de corriente*. El significado físico de Ψ se puede encontrar a partir de las consideraciones siguientes. Como $\Psi = \Psi(x, y)$, la derivada total es:

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x}\, dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\, dy$$

También:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -v_y \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = v_x$$

y, por lo tanto:

$$d\Psi = -v_y\,dx + v_x\,dy \tag{10-5}$$

Estudiemos una trayectoria en el plano xy tal que Ψ = constante. A lo largo de esta trayectoria, $d\Psi = 0$, por lo cual la ecuación (10-5) se transforma en:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\Psi\ =\ \text{constante}} = \frac{v_y}{v_x} \tag{10-6}$$

La pendiente de la trayectoria Ψ = constante es la misma que la pendiente de una línea de corriente, como se vio en el Capítulo 3. La función $\Psi(x, y)$ representa, por lo tanto, las líneas de corriente. La figura 10.2 nos muestra las líneas de flujo y las componentes de la velocidad para un flujo que tiene lugar alrededor de una superficie de sustentación (ala).

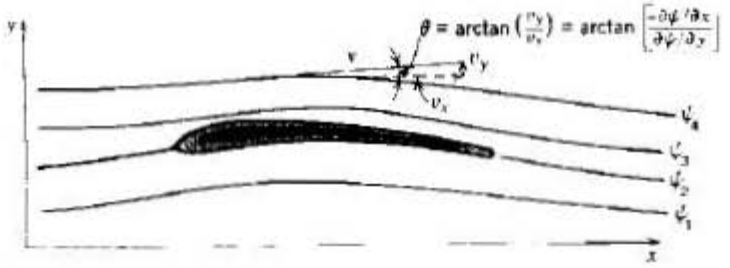


Figura 10.2 Líneas de corriente y la función de corriente.

La ecuación diferencial que rige a Ψ se obtiene por medio del análisis de la rotación del fluido, ω, en un punto. En un flujo bidimensional,

$$\omega_z = \tfrac{1}{2}[(\partial v_y/\partial x) - (\partial v_x/\partial y)],$$

y, por lo tanto, si las componentes de la velocidad v_y y v_x están expresadas en términos de la función de corriente, Ψ, se obtendrá, para un flujo constante e incompresible,

$$-2\omega_z = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} \tag{10-7}$$

Cuando el flujo es irrotacional, la ecuación (10-7) se transforma en la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} = 0 \tag{10-8}$$

10.3 FLUJO NO ROTACIONAL, NO VISCOSO, ALREDEDOR DE UN CILINDRO INFINITO

Resolviendo la ecuación (10-8), se obtendrá el patrón de un flujo no viscoso e irrotacional alrededor de un cilindro de longitud infita, para ejemplificar el uso de la función de corriente. La situación física es la que aparece en la figura 10.3. Un cilindro circular estacionario de radio a, se encuentra situado en un flujo uniforme, paralelo en la dirección de x.

Aprovechando la simetría cilíndrica, emplearemos coordenadas polares. En coordenas polares,* la ecuación (10-8) se transforma en:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} = 0 \tag{10-9}$$

donde las componentes de la velocidad: v_r y v_θ están dadas por:

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \qquad v_\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} \tag{10-10}$$

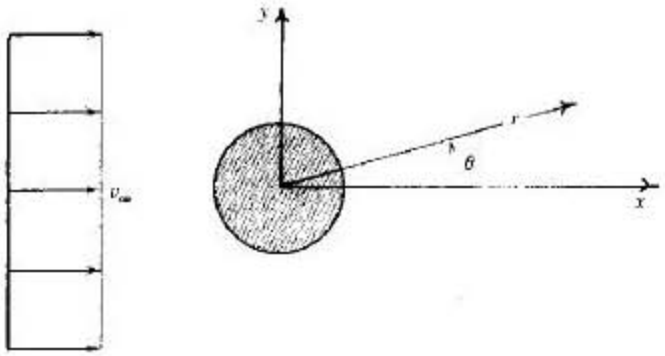


Figura 10.3 Cilindro en flujo uniforme.

Para poder resolver la ecuación (10-9) se requieren cuatro condiciones de frontera, que son las siguientes:

(1) El círculo $r = a$ debe ser una línea de corriente. Como la velocidad normal a una línea de corriente es cero, $v_r|_{r=a} = 0$ ó $\partial\Psi/\partial\theta|_{r=a} = 0$.
(2) Por simetría, la línea $\theta = 0$ también debe ser una línea de corriente, por lo tanto: 0 ó $\partial\Psi/\partial r|_{\theta=0} = 0$.
(3) Cuando $r \to \infty$ la velocidad debe ser finita.
(4) La magnitud de la velocidad, cuando $r \to \infty$ es v_∞, que es una constante.

La solución de la ecuación (10-9) se puede obtener, en este caso, utilizando el método de separación de variables. Suponiendo que existe una solu-

*El operador ∇^2 en coordenadas cilíndricas, aparece en el Apéndice A.

ción de la forma: $\Psi(r, \theta) = F(rt)G(\theta)$, si sustituimos este valor en la ecuación (10-9), se obtendrá:

$$r^2\frac{F''(r)}{F(r)} + r\frac{F'(r)}{F(r)} = \frac{G''(\theta)}{G(\theta)} \tag{10-11}$$

Como el lado izquierdo de la ecuación (10-11) es función de r y el lado derecho es función de θ, cada uno de los lados debe ser constante para que exista una igualdad en todos los valores de r y θ. Por lo tanto, la ecuación (10-11) se convierte en las siguientes dos:

$$G''(\theta) + \lambda^2 G(\theta) = 0 \tag{10-12}$$

y

$$r^2F''(r) + rF'(r) - \lambda^2 F(r) = 0 \tag{10-13}$$

La ecuación (10-12) es una ecuación diferencial lineal simple de segundo orden, cuya solución es:

$$G(\theta) = A\,\text{sen}\,\lambda\theta + B\cos\lambda\theta \tag{10-14}$$

La ecuación (10-13) se conoce con el nombre de Ecuación de Euler* y su solución es:

$$F(r) = Cr^{\lambda} + Dr^{-\lambda} \tag{10-15}$$

Las condiciones a la frontera que se enumeran a continuación nos servirán para calcular el valor de las constantes. De la condición a la frontera número 1, se tiene:

$$\left.\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right|_{r=a} = (Ca^{\lambda} + Da^{-\lambda})\lambda(A\cos\lambda\theta - B\,\text{sen}\,\lambda\theta) = 0$$

y, por lo tanto,

$$D = -Ca^{2\lambda}$$

de donde:

$$\Psi(r, \theta) = (A'\,\text{sen}\lambda\theta + B'\cos\lambda\theta)\left(r^{\lambda} - \frac{a^{2\lambda}}{r^{\lambda}}\right)$$

*La ecuación diferencial (10-13) es de un tipo investigado por Euler. Esta no es la misma ecuación que, en el Capítulo 9 designamos con el nombre de ecuación de Euler.

donde:

$$A' = AC \qquad \text{y} \qquad B' = BC$$

La segunda condición a la frontera establece que: para $\theta = 0$, tendremos $\partial\Psi/\partial r = 0$. Como sen $\theta = 0$, la única forma de cumplir con este requisito es que: $B' = 0$, por lo cual:

$$\Psi(r, \theta) = A'(\operatorname{sen}\lambda\theta)\left(r^{\lambda} - \frac{a^{2\lambda}}{r^{\lambda}}\right)$$

Finalmente, las condiciones 3 y 4 requieren que el límite $(v_r^2 + v_\theta^2) = v_\infty^2$. Como

$$v_r^2 + v_\theta^2 = A'^2\frac{\lambda^2\cos^2\lambda\theta}{r^2}\left(r^{\lambda} - \frac{a^{2\lambda}}{r^{\lambda}}\right)^2 + A'^2\lambda^2\operatorname{sen}^2\lambda\theta\left(r^{\lambda-1} + \frac{a^2}{r^{\lambda+1}}\right)^2$$

$$v_r^2 + v_\theta^2 = A'^2\lambda^2\left[(\cos^2\lambda\theta)\left(r^{\lambda-1} - \frac{a^{2\lambda}}{r^{\lambda+1}}\right)^2 + (\operatorname{sen}^2\lambda\theta)\left(r^{\lambda-1} + \frac{a^{2\lambda}}{r^{\lambda+1}}\right)^2\right]$$

el único valor de λ para el que la velocidad es finita cuando $r \to \infty$ es la unidad. El hecho de usar $\lambda = 1$ requiere que $A' = v_\infty$, por lo que la función de corriente se transforma en:

$$\Psi(r, \theta) = v_\infty r \operatorname{sen}\theta\left[1 - \frac{a^2}{r^2}\right] \tag{10-16}$$

Las componentes de la velocidad: v_r y v_θ se calculan a partir de la ecuación (10-10),

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta} = v_\infty\cos\theta\left[1 - \frac{a^2}{r^2}\right] \tag{10-17}$$

y

$$v_\theta = -\frac{\partial\Psi}{\partial r} = -v_\infty\operatorname{sen}\theta\left[1 + \frac{a^2}{r^2}\right] \tag{10-18}$$

Fijando el valor de $r = a$ en las ecuaciones anteriores, se puede determinar la velocidad en la superficie del cilindro, la cual es:

$$v_r = 0$$

y

$$v_\theta = -2v_\infty\operatorname{sen}\theta \tag{10-19}$$

La velocidad en la dirección del radio es, desde luego, igual a cero para $\theta = 0$ y $\theta = 180°$. Estos puntos de velocidad cero ese conocen como *puntos de estancamiento*. El punto de estancamiento de adelante está a $\theta = 180°$ y el de atrás a $\theta = 0°$.

10.4 FLUJO NO ROTACIONAL. EL POTENCIAL DE LA VELOCIDAD

En un flujo bidimensional irrotacional $\nabla \times \mathbf{v} = 0$, y, así, $\partial v_x/\partial y = \partial v_y/\partial x$. La semejanza de esta ecuación con la de continuidad nos sugiere que podemos volver a usar el tipo de relación que utilizamos para obtener la función de corriente. Nótese, sin embargo, que el orden de diferenciación aparece invertido en comparación con el de la ecuación de continuidad. Si tomamos, $v_x = \partial\phi(x, y)/\partial x$, observaremos que:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x}$$

ó

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y} - v_y\right) = 0$$

y, para el caso general:

$$v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

La función ϕ se llama *potencial de la velocidad*. Para que ϕ puede existir, el flujo debe ser irrotacional. Como la única condición que se requiere es la de no rotacionalidad, el potencial de la velocidad también puede existir para flujos compresibles y variables. El potencial de la velocidad por lo general se utiliza en el análisis del flujo de los fluidos compresibles. Cabe agregar que el potencial de la velocidad ϕ, existe para los flujos tridimensionales, en tanto que la función de corriente no existe.

El vector velocidad está dado por:

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z = \frac{\partial \phi}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z}\mathbf{e}_z$$

y por lo tanto, en notación vectorial,

$$\mathbf{v} = \nabla \phi \tag{10-20}$$

La ecuación diferencial que define a ϕ se obtiene a partir de la ecuación de continuidad. Si analizamos un flujo constante e incompresible, tendremos que:

$$\nabla \cdot \mathbf{n} = 0$$

por lo cual, usando la ecuación (10-20) para v, obtenemos:

$$\nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi = 0 \tag{10-21}$$

que, de nuevo, es la ecuación de Laplace; esta vez la variable independiente es ϕ. Es obvio que Ψ y ϕ deben estar relacionadas. Se puede ejemplificar esta relación por medio de un análisis de las isolíneas de Ψ y de ϕ. Una isolínea de Ψ es, desde luego, una línea de corriente. A lo largo de las isolíneas:

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy$$

o

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\Psi = \text{constante}} = \frac{v_y}{v_x}$$

y

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{d\phi = 0} = -\frac{v_x}{v_y}$$

por lo cual:

$$dy/dx|_{\phi = \text{constante}} = -\left.\frac{1}{dy/dx}\right|_{\Psi = \text{constante}} \tag{10-22}$$

y, por lo tanto, Ψ y ϕ son ortogonales. La ortogonalidad de la función de corriente y el potencial de la velocidad, son propiedades útiles particularmente cuando se emplean las soluciones gráficas de las ecuaciones (10-8) y (0-21).

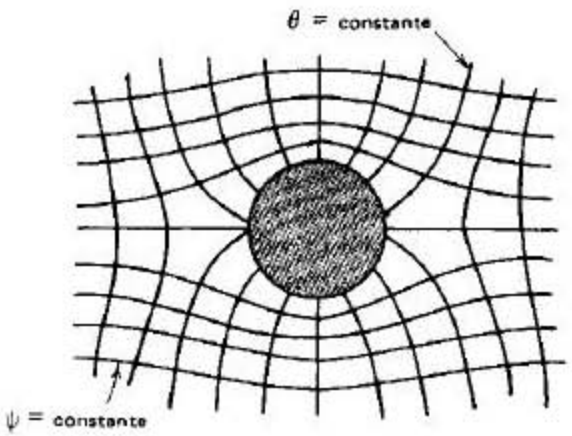


Figura 10.4 Líneas de corriente y líneas de potencial de velocidad constante para un flujo permanente, incompresible, irrotacional y no viscoso alrededor de un cilindro.

La figura 10.4 es un ejemplo de un flujo incompresible, permanente, irrotacional y no viscoso, alrededor de un cilindro circular de longitud infinita. Tanto las líneas de corriente como las de potencial a velocidad constante, aparecen en la figura.

10.5 CARGA TOTAL EN EL FLUJO NO ROTACIONAL

Se ha visto que la condición de no rotabilidad es de gran ayuda para obtener soluciones analíticas para flujos de fluidos. El significado físico del flujo irrotacional se puede explicar por medio de la relación entre la rotación o vorticidad, $\nabla \times \mathbf{v}$, y la carga total, $P/\rho + v^2/2 + gy$. Para un flujo no viscoso, podemos escribir.

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{g} - \frac{\nabla P}{\rho} \qquad \text{(Ecuación de Euler)}$$

y

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) \qquad \text{(Identidad vectorial)}$$

Como el gradiente de la energía potencial es $-\mathbf{g}$; la ecuación de Euler para un fluido incompresible, se convierte en,

$$\nabla\left\{\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gy\right\} = \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \qquad (10\text{-}23)$$

Si el flujo es permanente, se puede observar, en la ecuación (10-23), que el gradiente de la carga total depende de la vorticidad, $\nabla \times \mathbf{v}$. El vector $(\nabla \times \mathbf{v})$ es perpendicular al vector velocidad, por lo tanto, el gradiente de la carga total no tiene componente a lo largo de una línea de corriente, por lo que, a lo largo de una línea de corriente, en un fluido incompresible, no viscoso y permanente,

$$\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gy = \text{constante} \qquad (10\text{-}24)$$

Esta es, desde luego, la ecuación de Bernoulli que estudiamos en los Capítulos 6 y 9. Si el flujo es irrotacional y permanente, la ecuación (10-23) nos dice que la ecuación de Bernoulli es válida a través del campo de flujo. Un flujo irrotacional, permanente e incompresible, por lo tanto, tiene una carga total constante a través del campo de flujo.*

10.6 UTILIZACION DEL FLUJO POTENCIAL

El flujo potencial tiene una gran utilidad en ingeniería para la predicción de campos de presión, fuerzas y rapidez de flujo. En el campo de la aerodinámica, por ejemplo, las soluciones de flujo potencial se usan para predecir las distribuciones de fuerza y momento en alas y otros cuerpos.

*Hay un resultado más general, el teorema de Crocco, que relaciona a la vorticidad con la entropía. Por lo tanto, se puede demostrar que un flujo constante, no viscoso e irrotacional, sea compresible o incompresible, es isentrópico.

Se puede obtener un ejemplo de la determinación de la distribución de presiones de una solución de flujo potencial, de la solución para el flujo que se lleva a cabo alrededor de un cilindro, la cual se estudió en la sección 10.3. De la ecuación de Bernoulli, se tiene:

$$\frac{P}{\rho}+\frac{v^2}{2}=\text{constante} \tag{10-25}$$

Hemos omitido el término correspondiente a la energía potencial de acuerdo con la suposición original de que la velocidad es uniforme en la dirección de x. A gran distancia del cilindro, la presión es P_∞ y la velocidad es v_∞, de manera que la ecuación (10-25)* se transforma en:

$$P+\frac{\rho v^2}{2}=P_\infty+\frac{\rho v_\infty{}^2}{2}=P_0 \tag{10-26}$$

donde P_0 es la *presión de estancamiento* (esto es, la presión para la cual la velocidad es cero). De acuerdo con la ecuación (10-24),la presión de estancamiento es constante en todo el campo de un flujo irrotacional. La velocidad en la superficie del cuerpo es $v_\theta = -2v_\infty \operatorname{sen}\theta$, por lo que la presión en la superficie es:

$$P=P_0-2\rho v_\infty{}^2\operatorname{sen}^2\theta \tag{10-27}$$

En la figura 10.5 se puede ver una gráfica de la presión de flujo potencial alrededor de un cilindro.

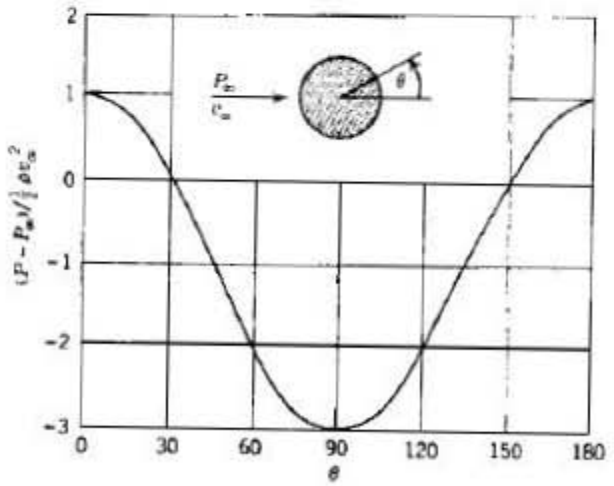


Figura 10.5 Distribución de presiones en un cilindro, para un flujo no viscoso, incompresible y permanente.

*La presión de estancamiento, en la forma que aparece en la ecuación (10-26) se puede aplicar únicamente a los flujos incompresibles.

10.7 CONCLUSION

En este capítulo hemos examinado el flujo potencial. Más adelante se da un breve resumen de las propiedades de la función de corriente y del potencial de velocidad.

Función de corriente

1. Existe una función de corriente $\Psi(x, y)$ para cada flujo bidimensional, constante e incompresible, sea este viscoso o no viscoso.
2. Las líneas para las cuales $\Psi(x, y) =$ constante son líneas de corriente.
3. En coordenadas cartesianas:

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \qquad v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \tag{10-28a}$$

y, en general,

$$v_s = \frac{\partial \Psi}{\partial n} \tag{10-28b}$$

donde n está a 90° de s en dirección opuesta a la de movimiento de las manecillas del reloj.

4. La función de corriente satisface la ecuación de continuidad.
5. Para un flujo irrotacional, constante e incompresible,

$$\nabla^2 \Psi = 0 \tag{10-28c}$$

Potencial de la velocidad

1. El potencial de la velocidad existe si y sólo si el flujo es irrotacional. No se requiere ninguna otra restricción.
2. $\nabla \phi = \mathbf{v}$.
3. Para un flujo constante e incompresible, $\nabla^2 \phi = 0$.
4. Para flujos constantes, incompresibles, bidimensionales, las líneas de potencial constante de velocidad son perpendiculares a las líneas de corriente.

PROBLEMAS

10.1 En coordenadas polares, demuestre que:

$$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right] \mathbf{e}_z$$

10.2 Determine la rotación del fluido en un punto, en coordenadas polares, usando el método de la figura 10.1.

10.3 Encuentre la función de corriente para un flujo cuya velocidad de corriente, uniforme y libre, es v_∞. La velocidad libre de corriente intersecta al eje x con un ángulo α.

10.4 En coordenadas polares, la ecuación de continuidad para un flujo permanente e incompresible se transforma en

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}=0$$

Obtenga las ecuaciones (10-10), usando esta relación.

10.5 Un vórtice es un patrón de flujo para el cual las líneas de corriente son círculos concéntricos. Encuentre la función de corriente para un vórtice irrotacional.

10.6 Haga un modelo analítico de un tornado usando un vórtice irrotacional (cuya velocidad sea inversamente proporcional a su distancia al centro) fuera de un núcleo central (con una velocidad directamente proporcional a la distancia). Suponga, que el diámetro del núcleo es de 200 ft y que la presión estática en el centro de éste es de 38 psf más baja que la presión ambiental. Encuentre:

(a) la velocidad máxima del viento.

(b) el tiempo que tardaría un tornado que se moviera a 60 mph en reducir la presión estática de −10 psfg a −38 psfg.

(c) la variación de presión total en todo el tornado. La ecuación de Euler se puede usar para relacionar el gradiente de la presión del núcleo con la aceleración del fluido.

10.7 Para un flujo alrededor de un cilindro, encuentre la variación de la velocidad a lo largo de la línea de corriente que llega al punto de estancamiento. ¿Cuál es la derivada de la velocidad, $\partial v_r/\partial_r$ en el punto de estancamiento?

10.8 En el problema 10.7, explique cómo se puede obtener $\partial v_\theta/\partial\theta$ en el punto de estancamiento utilizando únicamente r y $\partial v_r/\partial_r$.

10.9 ¿En qué punto de la superficie del cilindro circular, en un flujo potencial, la presión será igual a la presión de corriente libre?

10.10 Para los potenciales de la velocidad que aparecen a continuación encuentre la función de corriente y dibuje las líneas de corriente.

(a) $\phi = v_\infty L\left[\left(\frac{x}{L}\right)^3 - \frac{3xy^2}{L^3}\right]$

(b) $\phi = v_\infty \frac{xy}{L}$

(c) $\phi = \dfrac{v_\infty L}{2} \ln (x^2 + y^2)$

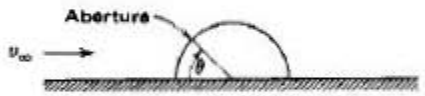
10.11 El patrón de flujo asociado con el flujo, desde o hacia un punto, se llama flujo de fuente o de sumidero. Determine la función de corriente para un flujo de fuente.

10.12 Encuentre la función de corriente para una fuente, en el origen. Sume esta función de corriente a la función de corriente de una corriente libre, uniforme $v_x = v_\infty$ y grafique la línea de corriente $\Psi = 0$. La rapidez de flujo de masa desde la fuente es $\dot{m}$.

10.13 En el problema anterior, ¿qué tan arriba llega el flujo de la fuente?

10.14 Determine la gradiente de la presión en el punto de estancamiento del problema 10.10a.

10.15 Calcule la fuerza total de sustentación del refugio polar que aparece a continuación en función de la colocación de la abertura. La fuerza de sustentación es el resultado de la diferencia entre la presión interior y la exterior. Suponga que hay un flujo potencial y que el refugio es de la forma de un medio cilindro.



11
ANALISIS DIMENSIONAL

En todas las ecuaciones que se han presentado hasta aquí, la homogeneidad dimensional ha sido de gran importancia. En ocasiones ha sido necesario utilizar factores apropiados de corrección para que una respuesta numéricamente correcta tenga también, las unidades correctas. La idea de consistencia dimensional se puede usar de otra manera, por medio de un procedimiento conocido como análisis dimensional, para agrupar las variables de una situación dada en parámetros carentes de dimensión, menos numerosos que las variables originales. Este procedimiento resulta muy útil en los trabajos experimentales en los que el número de variables significativas, en sí, representa una enfadosa tarea de correlación. Si se combinan las variables para formar un número menor de parámetro sin dimensión, se minimiza la tarea de reducción de los datos experimentales.

En este capítulo se proporcionan medios de evaluación de los parámetros adimensionales, tanto en situaciones en las que se conoce la ecuación principal como en aquellos en los que no existe ninguna ecuación conocida. Algunos grupos adimensionales serán ya conocidos por el estudiante, otros se introducirán por primera vez. Finalmente, se utilizarán ciertos aspectos de semejanza para predecir el comportamiento de flujo del equipo sobre la base de los experimentos realizados en modelos a escala.

11.1 DIMENSIONES

En el análisis dimensional se deben establecer ciertas dimensiones como fundamentales y expresar todas las demás en términos de éstas. Una de las dimensiones fundamentales es la longitud, L. Por lo tanto, el área y el volumen se pueden expresar, dimensionalmente, en la forma: L^2 y L^3, respectivamente. La segunda dimensión es fundamental es el tiempo, cuyo símbolo es

t. Las cantidades cinemáticas: velocidad y aceleración, se pueden expresar en la forma L/t y L/t^2, respectivamente.

Otra dimensión fundamental es la masa, cuyo símbolo es M. Un ejemplo de cantidad cuya expresión dimensional involucra a la masa es la densidad, que debe expresarse en M/L^3. La segunda ley de Newton del movimiento proporciona una relación entre fuerza y masa y permite expresar la fuerza de manera dimensional, como: $F = Ma = ML/t^2$. Algunos textos invierten este procedimiento y consideran fundamental a la fuerza, expresando la masa en términos de F, L y t de acuerdo con la segunda ley de Newton del movimiento. En este libro, la masa se considerará como unidad fundamental.

Todas las cantidades significativas en cuanto a la transferencia de momento se pueden expresar, ocasionalmente, en términos de M, L y t, de manera que comprendan a las unidades fundamentales de las que se ocupará el presente capítulo. El análisis dimensional de los problemas relacionados con la energía, que aparecen en el capítulo 19, requerirá de la adición de otras dos dimensiones fundamentales: el calor y la temperatura.

Algunas de las variables más importantes en la transferencia de momento, aparecen en la Tabla 11.1, junto con su representación dimensional en términos de M, L y t.

Tabla 11.1 Variables importantes relacionadas con la transferencia de momento

Variable	*Símbolo*	*Dimensión*
masa	M	M
longitud	L	L
tiempo	t	t
velocidad	v	L/t
aceleración gravitacional	g	L/t^2
fuerza	F	ML/t^2
presión	P	M/Lt^2
densidad	ρ	M/L^3
viscosidad	μ	M/Lt
tensión superficial	σ	M/t^2
velocidad sónica	a	L/t

11.2 SEMEJANZAS GEOMETRICA Y CINEMATICA

Para poder aplicar los datos obtenidos experimentalmente en un modelo, a un prototipo de tamaño natural, se necesita la existencia de ciertas semejanzas entre el modelo y el prototipo. Dos de estos tipos de semejanza son la geométrica y la cinemática.

Existe *semejanza geométrica* entre dos sistemas cuando la razón entre sus dimensiones significativas es la misma para ambos sistemas. Por ejemplo,

si la razón de las dimensiones a/b para el modelo de una sección de un ala, que aparece en la figura 11.1, tiene la misma magnitud que la razón a/b de la sección más grande del ala, entonces presentan una semejanza geométrica. En este ejemplo sólo hubo dos dimensiones significativas. Para los casos en los que la geometría sea más complicada, la semejanza geométrica requerirá, desde luego, que todas las razones geométricas sean iguales entre el modelo y el prototipo.

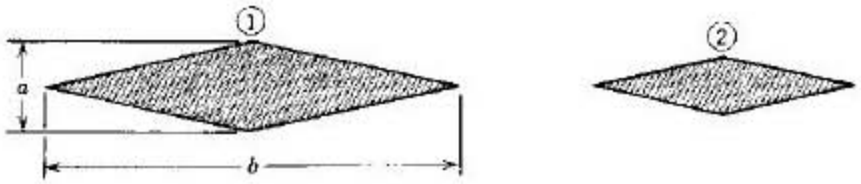


Figura 11.1 Dos secciones de ala supersónica, geométricamente semejantes.

Existe semejanza cinemática si, en los sistemas geométricamente semejantes, (1) y (2), las velocidades en los mismos puntos están relacionadas entre sí de acuerdo con las igualdades:

$$\left(\frac{v_x}{v_y}\right)_1 = \left(\frac{v_x}{v_y}\right)_2 \qquad \left(\frac{v_x}{v_z}\right)_1 = \left(\frac{v_x}{v_z}\right)_2$$

Por lo tanto, un requerimiento para que exista una semejanza cinemática es que también exista una semejanza geométrica.

11.3 ANALISIS DIMENSIONAL DE LA ECUACION DE NAVIER-STOKES

Si se conoce la ecuación diferencial que describe una situación dada de flujo, entonces para que exista homogeneidad dimensional se requiere que cada uno de los términos de la ecuación tenga las mismas unidades. Entonces la razón de un término a otro de la ecuación debe carecer, necesariamente, de dimensión. Si se conoce el sentido físico de los diversos términos de la ecuación, se podrá dar alguna interpretación física a los parámetros, carentes de dimensión, o adimensionales que se formen de este modo.

Un ejemplo clásico de este tipo de análisis es el que utiliza la ecuación de Navier-Stokes en la forma:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{g} - \frac{\nabla P}{\rho} + \nu\nabla^2\mathbf{v} \tag{9-19}$$

Cada uno de los términos de esta expresión se puede expresar por medio de una combinación de variables que pueden encontrarse en la tabla 11.1. Cada

uno de los términos tiene también sentido físico. El sentido físico y la expresión de cada uno de los términos son los siguientes:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + v_x\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v_y\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + v_z\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \quad \text{aceleración, o fuerza inercial, } v^2/L.$$

$$\mathbf{g} \quad \text{fuerza de gravedad, } g.$$

$$\frac{\nabla P}{\rho} \quad \text{fuerza debida a la presión, } P/pL$$

$$\nu\nabla^2\mathbf{v} \quad \text{fuerza viscosa } \nu v/L^2.$$

Las dimensiones de cada uno de estos términos son L/t^2, de manera que la razón entre cualesquiera dos de ellos producirá un grupo adimensional.* Se pueden formar los parámetros adimensionales, que aparecen a continuación, dividiendo cada uno de los términos del lado derecho de la ecuación (9-19) entre las fuerzas inerciales.

$$\frac{\text{fuerza de gravedad}}{\text{fuerza debida a la inercia}} = \frac{gL}{v^2}$$

$$\frac{\text{fuerza debida a la presión}}{\text{fuerza debida a la inercia}} = \frac{P}{\rho v^2}$$

y

$$\frac{\text{fuerza viscosa}}{\text{fuerza debida a la inercia}} = \frac{\nu}{Lv}$$

Estos grupos adimensionales aparecen a menudo en el análisis de fluidos, como es de esperarse, y ellos o sus recíprocos, reciben los siguientes nombres especiales:

$$\frac{\text{fuerza debida a la inercia}}{\text{fuerza de gravedad}} = \frac{v^2}{gL} = \textit{Número de Froude} \qquad (11\text{-}1)$$

$$\frac{\text{fuerza debida a la presión}}{\text{fuerza debida a la inercia}} = \frac{P}{\rho v^2} = \text{Eu, } \textit{número de Euler} \qquad (11\text{-}2)$$

y

$$\frac{\text{fuerza debida a la inercia}}{\text{fuerza viscosa}} = \frac{Lv}{\nu} = \text{Re, } \textit{número de Reynolds} \qquad (11\text{-}3)$$

*El factor de conversión g_c se debe utilizar con el término de la presión para que sus unidades sean compatibles con los demás términos.

Nótese que, además de la formación de varios grupos adimensionales, el análisis dimensional, utilizando la ecuación diferencial principal, también proporciona sentido físico, a los parámetros que se forman. Las variables dimensionales que forman estos parámetros varían con la situación particular. La longitud, la velocidad y otros parámetros semejantes que se utilicen serán en cada caso, los valores más significativos: o los más representativos: Por ejemplo, la longitud significativa será el diámetro del cilindro o la distancia tomada a partir de la orilla principal de una placa plana, medida en la dirección del flujo. La velocidad aplicable también se puede escoger de diferentes formas para situaciones diferentes. Para evitar confusiones es aconsejable especificar claramente la longitud, la velocidad de referencia y otras, cuando se informa de un valor para cualquier parámetro adimensional.

Si, en los sistemas con semejanza geométrica, los parámetros que representen razones de fuerza pertinentes a esta situación son iguales, entonces se dice que ambos sistemas son dinámicamente semejantes. Obviamente, esta situación requeriría que los número pertinentes sin dimensión, fueran iguales entre dos sistemas dinámicamente semejantes. La semejanza dinámica es una necesidad fundamental para poder extender los datos experimentales obtenidos a partir de un modelo, a su prototipo.

11.4 EL METODO DE BUCKINGHAM

Una situación general en la cual se puede emplear ventajosamente el análisis dimensional es aquella en la cual no hay ninguna ecuación diferencial principal que pueda aplicarse obviamente. En una situación como ésta, se necesita un procedimiento más general. Este procedimiento se conoce con el nombre de método de *Buckingham.**

El paso inicial para la aplicación del método de Buckinham requiere del listado de las variables significativas para un problema dado. Después, es necesario determinar el número de parámetros adimensionales en los que se pueden combinar las variables. Este número se puede determinar utilizando el teorema *pi de Buckingham*, que establece lo siguiente:

> El número de grupos sin dimensión que se utilizan para describir una situación dada que involucre a n variables es igual a $n - r$, donde r es el rango de la matriz dimensional de las variables.
> Por lo que:

$$i = n - r \tag{11.4}$$

*E. Buckingham, *Phys.* Rev. 2,345 (1914)

donde

i = número de grupos independientes, adimensionales
n = número de variables implicadas

y

r = rango de matriz dimensional

La matriz dimensional es, sencillamente, la matriz formada al tabular los exponentes de las dimensiones fundamentales M, L y t, que aparecen en cada una de las variables involucradas. A continuación aparece un ejemplo de la evaluación de r e i, así como la aplicación del método de Buckingham.

EJEMPLO 1

Determinar los grupos adimensionales formados con las variables incluidas en el flujo externo de fluido, hacia un cuerpo sólido. La fuerza ejercida sobre el cuerpo es una función de v, ρ, μ y L (que es una dimensión significativa del cuerpo).

El primer paso es, usualmente construir una tabla de las variables y sus dimensiones.

Variable	*Símbolo*	*Dimensiones*
fuerza	F	ML/t^2
velocidad	v	L/t
densidad	ρ	M/L^3
viscosidad	μ	M/Lt
longitud	L	L

Antes de determinar el número de parámetros adimensionales, debemos conocer a r. La matriz dimensional correspondiente, se forma a partir de la tabulación siguiente:

	F	v	ρ	μ	L
M	1	0	1	1	0
L	1	1	−3	−1	1
t	−2	−1	0	−1	0

Los números que aparecen en la tabla representan los exponentes de M, L y t en la expresión dimensional de cada una de las variables involucradas. Por ejemplo, la expresión dimensional de F es Ml/t^2, así es que los exponentes 1, 1 y −2 se tabulan contra M, L y t, respectivamente, que son las cantidades a las que están asociados. La matriz es el siguiente ordenamiento de números:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango, r, de una matriz, es el número de hileras (columnas) del mayor determinante diferente de cero que se pueda formar a partir de ella. En este caso, el rango es 3. Por lo tanto, el número de parámetros que pueden formarse se encuentra aplicando la ecuación (11-4). En este ejemplo $i = 5-3 = 2$.

Los dos parámetros adimensionales tendrán los símbolos π_1 y π_2 y pueden formarse de varias maneras. Debe escogerse, inicialmente, un *grupo básico* de r variables, que consistirá en las variables que aparecen en cada uno de los grupos pi y, entre todas, contengan todas las dimensiones fundamentales. Una forma de escoger este grupo básico es excluir de él todas las variables cuyo efecto se desee aislar. En este problema sería deseable que la fuerza de arrastre estuviera solamente en un grupo sin dimensión, por lo tanto, no se encontrará en el grupo básico. Se escogerá arbitrariamente a la viscosidad para ser la otra exclusión del grupo básico. Nuestro grupo básico consistirá, pues, del resto de las variables v, ρ y L, las cuales como puede verse, incluyen a M, L y t entre ellas.

Ahora se sabe que, tanto π_1 como π_2 incluyen a ρ, L y v, que una de ellas incluye a F y la otra a μ, y que ambas son adimensionales. Para que ambas sean adimensionales se las debe elevar a ciertos exponentes. Si se hace:

$$\pi_1 = v^a \rho^b L^c F \qquad \text{y} \qquad \pi_2 = v^d \rho^e L^f \mu$$

se evaluarán los exponentes en la forma siguiente. Si se considera a cada grupo π independiente, se puede escribir:

$$\pi_1 = v^a \rho^b L^c F$$

y dimensionalmente:

$$M^0 L^0 t^0 = 1 = \left(\frac{L}{t}\right)^a \left(\frac{M}{L^3}\right)^b (L)^c \frac{ML}{t^2}$$

Si se igualan los exponentes de M, L y t en ambos lados de esta expresión, se tendrá, para M, el valor:

$$0 = b + 1$$

para L,

$$0 = a - 3b + c + 1$$

y para t:

$$0 = -a - 2$$

A partir de estos valores se encuentran los siguientes: $a = -2$, $b = -1$, $c = -2$, de manera que:

$$\pi_1 = \frac{F}{L^2 \rho v^2} = \frac{F/L^2}{\rho v^2} = \text{Eu}$$

De manera semejante, se tiene, para π_2, en forma dimensional:

$$1 = \left(\frac{L}{t}\right)^d \left(\frac{M}{L^3}\right)^e (L)^f \frac{M}{Lt}$$

y, para los exponentes de M:

$$0 = e + 1$$

para los de L,

$$0 = d - 3e + f - 1$$

y para los de t,

$$0 = -d - 1$$

dando como resultado los siguientes valores: $d = -1$, $e = -1$ y $f = -1$. Así, para el segundo grupo dimensional, se tendrá:

$$\pi_2 = \mu/\rho v L = 1/\mathrm{Re}$$

El análisis dimensional ha permitido que se puedan relacionar las cinco variables en términos de sólo dos parámetros adimensionales de la forma:

$$\mathrm{Eu} = \phi(\mathrm{Re}) \tag{11-5}$$

donde ϕ (Re) es alguna función de Re. El hecho de que se pueda graficar el número de Euler contra el número de Reynolds, se ha verificado experimentalmente y en el Capítulo 12 aparece, en la forma de la ecuación anteriormente mencionada, una gráfica de datos experimentales para el flujo alrededor de un cilindro circular.

El ejemplo anterior ha servido para explicar la aplicación del teorema pi de Buckingham así como los pasos subsecuentes que deben tomarse para correlacionar las variables y formar grupos adimensionales. Se han dado las reglas generales y éstas deben seguirse en todo análisis dimensional. Nótese que este método no proporciona ningún significado físico a los parámetros dimensionales resultantes.

11.5 TEORIA DE MODELOS

En el diseño y prueba de equipo grande que se relacione con el flujo de fluidos se acostumbra construir modelos pequeños, geométricamente semejantes a los prototipos grandes. Los datos experimentales logrados en el modelo a escala se convierten al tamaño normal del prototipo de acuerdo con las necesidades de similaridad geométrica, cinemática y dinámica. El siguiente ejemplo ayudará al estudiante a comprender la manera de utilizar los datos obtenidos en el modelo para evaluar las condiciones necesarias para un aparato de tamaño natural.

EJEMPLO 2

Se puede lograr la semejanza dinámica por medio del uso de un túnel de viento criogénico en el cual se emplea, como fluido de trabajo, nitrógeno a baja temperatura y presiones muy altas. Si se usa nitrógeno a 5 atm y 183 K para probar la aerodinámica a bajas veloci-

dades de un prototipo que mide 24.38 m de envergadura de alas y debe volar en condiciones estándar al nivel del mar con una velocidad de 60 m/seg., determínense:

1. La escala del modelo que se va a probar.
2. La proporción en la que deben estar las fuerzas del modelo y las del avión de tamaño normal.

Deben prevalecer las condiciones para la semejanza dinámica. La velocidad del sonido en el nitrógeno a 183 K es de 275 m/seg.

Para que pueda existir semejanza dinámica, sabemos que, tanto el modelo como el prototipo deben ser geométricamente semejantes y que el número de Reynods y el de Mach* deben ser iguales. La tabla que aparece a continuación será de gran utilidad:

	Modelo	*Prototipo*
Longitud característica	L	24.38 m
Velocidad	V	60 m/s
Viscosidad	μ	$1.789 \cdot 10^{-6}$ Pa · s
Densidad	ρ	1.225 kg/m^3
Velocidad del sonido	275 m/seg	340 m/seg

Las condiciones que se han enumerado para el prototipo se han obtenido del Apéndice I. Igualando los números de Mach, se obtendrá:

$$M_m = M_p$$

$$V = \frac{275}{340} 60 = 48.5 \text{ m/s}$$

Igualando los números de Reynolds del modelo con los del prototipo se obtiene:

$$Re_m = Re_p$$

$$\frac{\rho 48.5 L}{\mu} = \frac{1.225 \cdot 60 \cdot 24.38}{1.789 \cdot 10^{-5}} = 1.002 \cdot 10^8$$

Si se usa la ecuación (7-10), se puede calcular μ para el nitrógeno. Del Apéndice K, se obtienen los valores, $\epsilon/\kappa = 91.5$ K y $\sigma = 3.681$ Å para el nitrógeno, de tal modo, que: $\kappa T/\epsilon = 2$ y $\Omega\mu = 1.175$ (Apéndice K). Por esto:

$$\mu = 2.6693 \cdot 10^{-6} \frac{\sqrt{28 \cdot 183}}{(3.681)^2 (1.175)} = 1.200 \cdot 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

Se puede obtener un valor aproximado para la densidad a partir de la ley para los gases perfectos:

$$\rho = \frac{P}{P_1} \frac{M}{M_1} \frac{T_1}{T} \rho_1$$

*El número de Mach es una medida de los efectos de la compresibilidad en el flujo de los fluidos y es igual a la razón entre la velocidad y la velocidad del sonido.

de manera que:

$$\rho = 5\left(\frac{28}{28.96}\right)\left(\frac{288}{183}\right)1.225 = 7.608 \text{ kg/m}^3$$

Resolviendo esta ecuación para la envergadura de las alas del modelo, se obtiene:

$$L = 3.26 \text{ m } (10.7 \text{ ft})$$

La proporción entre las fuerzas que actúan sobre el modelo y las que actúan sobre el prototipo puede determinarse notando que la semejanza dinámica asegurará que los coeficientes de la fuerza adimensional serán iguales para el modelo y para el prototipo. De ahí que:

$$\left(\frac{F}{\rho V^2 A_R}\right)_{\text{modelo}} = \left(\frac{F}{\rho V^2 A_R}\right)_{\text{prototipo}}$$

donde A es un área de referencia adecuada. Para un avión esta área de referencia es la área proyectada de las alas. La proporción entre las fuerzas del modelo y del prototipo está dada por:

$$\frac{F_m}{F_p} = \frac{\rho_m}{\rho_p}\frac{V_m^2}{V_p^2}\frac{A_{R,m}}{A_{R,p}} = \frac{(\rho V^2)_m}{(\rho V^2)_p}\left(\frac{l_m}{l_p}\right)^2$$

donde la proporción de áreas de referencia se pueden expresar en términos de la proporción de la escala. Si se sustituye por números:

$$\frac{F_m}{F_p} = \frac{7.608}{1.225}\left(\frac{48.5}{60.0}\right)^2\left(\frac{3.26}{24.38}\right)^2 = 0.0726$$

Se observará que las fuerzas que actúan sobre el modelo son el 7.26% de las que actúan sobre el prototipo.

11.6 CONCLUSION

El análisis dimensional de un problema de transferencia de momento es sencillamente, una aplicación del requerimiento de homogeneidad dimensional a una situación dada. Por medio del análisis dimensional, tanto el trabajo como el tiempo que se tienen que emplear para reducir y correlacionar los datos obtenidos experimentalmente, disminuyen sustancialmente por medio de la combinación de variables individuales para formar grupos π adimensionales, cuyo número será menor que el de las variables originales. Las relaciones indicadas entre los parámetros adimensionales son útiles para expresar la eficiencia de los sistemas en los que se emplean.

Se debe tener presente que el análisis dimensional *no puede* predecir cuáles variables son importantes en una situación dada, ni tampoco puede ayudarnos a comprender el mecanismo involucrado de la transferencia física.

Aunque con estas limitaciones, las técnicas del análisis dimensional constituyen una valiosa ayuda para el ingeniero.

Si se conoce la ecuación que describe un proceso dado, el número de grupos adimensionales queda determinado automáticamente al tomar las proporciones entre los diversos términos de la expresión.

Por otro lado, si no existe ninguna ecuación adecuada, se puede emplear el método de Buckingham, que es empírico. Este enfoque es muy general, pero no proporciona ningún significado físico a los parámetros obtenidos de este análisis.

Los requisitos de semejanza geométrica, cinemática y dinámica nos permiten utilizar los datos del modelo para predecir el comportamiento de una parte del equipo de tamaño natural, o prototipo. La teoría de modelos es, por lo tanto, una aplicación importante de los parámetros obtenidos en un análisis dimensional.

PROBLEMAS

11.1 La potencia de salida de una turbina hidráulica depende de su diámetro, D de la densidad del agua, ρ, de la altura, H, a la que se encuentre la superficie de agua sobre la turbina, de la aceleración gravitacional, g, de la velocidad angular, ω, de la rueda de la turbina, de la descarga Q de agua a través de la turbina, y de la eficiencia, η, de la turbina. Por medio del análisis dimensional, genérese un conjunto apropiado de grupos adimensionales.

11.2 Por medio de una serie de pruebas realizadas, relacionadas con el flujo a través de tuberías, H. Darcy obtuvo una ecuación para la pérdida ocasionada por la fricción en el flujo a través de un tubo; que es la siguiente

$$h_L = f\frac{L}{D}\frac{v^2}{2g}$$

donde f es un coeficiente adimensional que depende de: (a) la velocidad promedio, v, del flujo a través del tubo, (b) el diámetro del tubo, D, (c) la densidad del fluido, ρ, (d) la viscosidad del fluido, μ, y (e) la irregularidad promedio de las paredes, e (longitud). Encuentre una función adimensional para el coeficiente, f, usando el teorema π de Buckingham.

11.3 La elevación de presión a través de una bomba, P (este término es proporcional a la carga desarrollada por la bomba), puede considerarse afectada por la densidad del fluido, ρ, la velocidad angular, ω, el diámetro del motor, D, la rapidez de flujo volumétrico, Q y la viscosidad del fluido, μ. Encuentre los grupos adimensionales adecuados, escogiéndolos de tal manera que P, Q y μ aparezcan, cada uno, en un sólo grupo. En-

cuentre expresiones semejantes, reemplazando la elevación de presión, primero, por la energía de entrada y después por la eficiencia de la bomba.

11.4 Un método aproximado de obtener el tamaño normal de los tanques cilíndricos mezcladores de líquido, así como de los batidores, a partir del modelo, es mantener constante la energía de entrada por unidad de volumen. Si se desea aumentar el volumen de un mezclador de líquido, con mamparas adecuadas, triplicándolo, ¿en qué proporción deberán cambiarse el diámetro del tanque y la velocidad del batidor? Los mezcladores son geométricamente semejantes y ambos operan en la región de turbulencia completa. La energía, P, suministrada al batidor, del mezclador, se puede considerar como función del batidor, D, de su velocidad angular, ω, y de la densidad, ρ, del líquido.

11.5 Un modelo a escala 1/6 de un torpedo se prueba en un túnel de agua para determinar sus características de arrastre. ¿Qué velocidad del modelo corresponde a la de 20 nudos, del torpedo? Si la resistencia del modelo es de 10 lb ¿cuál es la resistencia del prototipo?

11.6 El momento de avance máximo efectuado por el agua sobre un bote volador al aterrizar, se denota $c_{máx}$. En seguida aparece una lista de las variables implicadas en la acción:

α = ángulo que la trayectoria de vuelo del avión forma con la horizontal.
β = ángulo que define la altitud del avión.
M = masa del avión.
L = longitud del casco.
ρ = densidad del agua.
g = aceleración de la gravedad.
R = radio de giro del avión alrededor de su eje de avance.

(a) De acuerdo con el teorema pi de Buckingham, ¿cuántos grupos adimensionales independientes que caractericen este problema debe haber?

(b) ¿Cuál es la matriz dimensional de este problema? ¿Cuál es su rango?

(c) Calcule los parámetros adimensionales apropiados para este problema.

11.7 Un automóvil viaja por una carretera a 22.2 m/seg. Calcule el número de Reynolds:

(a) basándose en la longitud del auto,

(b) basándose en el diámetro de la antena del radio.
La longitud del automóvil es 5.8 m. y el diámetro de la antena, 6.4 mm.

11.8 Durante el diseño de un buque de 300 ft, se desea probar un modelo a escala, del 10% del tamaño natural en un tanque de remolque, para determinar las características de arrastre del casco. Determine cómo debe probarse el modelo si se desea duplicar el número de Froude.

11.9 Se va a probar un modelo a escala, del 25% del tamaño natural, de un vehículo submarino, que tiene una velocidad máxima de 15 m/seg, en un túnel de viento donde hay una presión de 5 atm, para determinar las características de arrastre del vehículo de tamaño natural. El modelo mide 3 m. de longitud. Encuentre la velocidad que necesita tener el aire para poder probar el modelo y encuentre la proporción entre el arrastre de éste y el del vehículo real.

11.10 Introduzca los siguientes términos adimensionales en la ecuación de Navier-Stokes:

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{v}/v_\infty, \quad \text{velocidad adimensional}$$
$$P^* = P/\rho v_\infty^2, \quad \text{presión adimensional}$$
$$t^* = tv_\infty/L, \quad \text{tiempo adimensional}$$
$$x^* = x/L, \quad \text{distancia adimensional}$$

El operador ∇ puede escribirse, entonces, en la forma $\nabla = \nabla^*/L$. Demuéstrese que la ecuación de Navier-Stokes se transforma en:

$$\frac{D\mathbf{v}^*}{Dt^*} = \frac{\mathbf{g}L}{v_\infty^2} - \nabla^* P^* + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^{*2}\mathbf{v}^*$$

11.11 La rapidez con la que se galvanizan los iones metálicos de una solución electrolítica, en un disco giratorio, por lo general depende de la rapidez de difusión de la masa de los iones en el disco. Se cree que el proceso está controlado por las siguientes variables:

	Dimensiones
K = coeficiente de transferencia de masa	L/t
D = coeficiente de difusión	L^2/t
d = diámetro del disco	L
a = velocidad angular	$1/t$
ρ = densidad	M/L^3
μ = viscosidad	M/Lt

Obtenga el conjunto de grupos adimensionales de estas variables, donde κ, μ y D deben encontrarse en grupos separados. ¿Cómo acumularía y presentaría usted los datos experimentales para este sistema?

11.12 El rendimiento de una chumacera que soporta un eje giratorio, está en función de las siguientes variables: Q, la rapidez de flujo del aceite lubricante hacia la chumacera, en volumen por unidad de tiempo: D el

diámetro de la chumacera, N, la velocidad del eje en revoluciones por minuto, μ la viscosidad del lubricante, ρ, la densidad del lubricante y σ, la tensión superficial del aceite lubricante. Sugiera los parámetros apropiados que deben usarse para correlacionar los datos experimentales para un sistema como éste.

11.13 La masa M de las gotas formadas por un líquido que está cayendo por un tubo vertical, debido a la gravedad, es una función del diámetro del tubo, D, de la densidad del líquido, de la tensión superficial y de la aceleración de la gravedad. Determine los grupos adimensionales independientes que sirvan para realizar un análisis del efecto de la tensión superficial. Desprecie los efectos de la viscosidad.

11.14 La frecuencia fundamental, n, de una cuerda tensa, es función de la longitud de la cuerda, L, de su diámetro, D, de la densidad de masa, ρ y de la fuerza de tensión aplicada, T. Sugiera un conjunto de parámetros adimensionales que relacionen a estas variables.

11.15 La potencia, P, que se necesita para hacer funcionar un compresor, varía de acuerdo con el diámetro de éste, D, su velocidad angular, ω, su rapidez de flujo volumétrico, Q, la densidad del fluido, ρ y la viscosidad de fluido, μ. Encuentre una relación entre estas variables por medio del análisis dimensional, en la cual aparezcan la viscosidad del fluido y la velocidad angular, solamente en un parámetro adimensional.

11.16 Se necesita un cálculo de la fuerza ascendente ejercida por la sección del ala de un hidroplano al desplazarse, a 60 mph, en el agua. Existen datos disponibles para este propósito, obtenidos mediante los experimentos realizados en un túnel de viento con un modelo cuya sección de su superficie de sustentación es geométricamente semejante, pero del doble de longitud del hidroplano. Si la fuerza ascendente, F_1, es función de la densidad, ρ, del fluido, de la velocidad, v, del flujo, del ángulo de ataque, θ, de la longitud de la cuerda, D y de la viscosidad μ, ¿qué velocidad de flujo, en el túnel de viento, correspondería a la velocidad del hidroplano para la cual se desea hacer el cálculo? Suponga que el ángulo de ataque es igual en ambos casos, que la densidad del aire dentro del túnel a presión es de 5.0×10^{-3} slugs/ft^3, que su viscosidad cinemática es 8.0×10^{-5} ft^2/seg. y que la viscosidad cinemática del agua es, aproximadamente, de 1.0×10^{-5} ft^2/seg. Tome como valor para la densidad del agua 1.94 slugs/ft^3.

11.17 Se está haciendo el modelo de un puerto con una escala de longitud 360:1. En el rompeolas del prototipo se producen olas, de 2 m de amplitud y cuya velocidad es de 8 m/seg., debidas a una tormenta. Las variables significativas son: la escala de longitud, la velocidad y g, la aceleración de la gravedad. Se puede encontrar una escala apropiada para el tiempo con la ayuda de los factores de las escalas de longitud y velocidad.

(a) Si se desprecia la fricción, ¿cuál deberá ser el tamaño y la velocidad de las olas del modelo?

(b) Si, en el prototipo, el tiempo que transcurre entre mareas es de 12 horas, ¿cuál deberá ser el período correspondiente en el modelo?

11.18 Un modelo, cuya escala es de 10% del tamaño del prototipo, de un avión, va a probarse en condiciones de flujo en las cuales los efectos del flujo variable son importantes. Si el vehículo de tamaño normal experimenta los efectos del flujo variable con un número de Mach de uno a una altitud de 40,000 ft., ¿a qué presión deberá probarse el modelo para producir un número de Reynolds igual? El modelo va a probarse en aire a 70 F ¿En qué proporción estarán las escalas de tiempo de flujo del modelo y del vehículo del tamaño natural?

11.19 Se va a probar un modelo de hélice de barco en agua que se encuentra a la misma temperatura a la que se encuentra el agua dentro de la cual navegará el prototipo. Se supone que, dentro del conjunto de valores de la velocidad que se han estudiado, no existe dependencia alguna de los números de Reynolds y Euler sino solamente del número de Froude (basado en la velocidad, V, hacia adelante y el diámetro, d, de la hélice). Además, se piensa que la proporción entre la velocidad hacia adelante y la velocidad rotacional debe ser constante (la razón V/Nd; donde N es el número de revoluciones por minuto de la hélice).

(a) Con un modelo de 0.41 m de diámetro se registran una velocidad hacia adelante de 2.58 m/seg y una velocidad rotacional de 450 rpm. ¿Cuáles son las velocidades hacia adelante y rotacional que corresponden a un prototipo de 2.45 m. de diámetro?

(b) Para accionar el modelo se requiere un par de 20 N · m y el impulso del modelo es de 245 N. ¿Cuáles son el par y el empuje del prototipo?

12
FLUJO VISCOSO

El concepto de viscosidad de los fluidos se explicó y definió en el capítulo 7. Obviamente, todos los fluidos son viscosos, pero en ciertas situaciones y bajo ciertas condiciones, se puede considerar a un fluido como ideal o no viscoso, y esto hace posible su análisis utilizando los métodos estudiados en el capítulo 10.

En este capítulo, nuestra tarea será la de analizar los fluidos viscosos y la forma en que la viscosidad afecta al flujo. Es de particular interés el caso de los fluidos que pasan alrededor de las superficies sólidas así como las interrelaciones entre las superficies y el flujo.

12.1 EXPERIMENTO DE REYNOLDS

La existencia de dos clases diferentes de flujo viscoso es un fenómeno universalmente aceptado. El humo que emana de un cigarrillo encendido puede verse fluir en forma constante y uniforme a corta distancia de la fuente y después cambiar, abruptamente, para formar un patrón muy irregular e inestable. Se puede observar un comportamiento semejante en el agua que fluye lentamente de un grifo.

El tipo de flujo ordenado ocurre cuando las capas adyacentes de fluido resbalan unas sobre otras, la mezcla entre capas o láminas se presenta, sin dificultad y sólo a nivel molecular. Fue para este tipo de flujo que se obtuvo la relación de Newton para la viscosidad, de manera que, para poder medir la viscosidad, μ, debe existir este flujo *laminar*.

El segundo tipo de flujo, en el cual se transfieren pequeños paquetes de partículas de fluido, de una capa a otra, se llama flujo *turbulento*.

La existencia de los flujos laminar y turbulento, aunque ya había sido descubierta anteriormente, fue descrita cualitativamente por Reynolds en 1883. Su experimento clásico puede apreciarse en la figura 12.1. Se hizo que fluyera agua a través de un tubo transparente, como puede verse, con una rapidez controlada por medio de una válvula. Después, en la abertura del tubo se introdujo un colorante cuya gravedad específica era la misma del agua y se observó el patrón en flujos cada vez mayores de agua. Cuando la rapidez de flujo era pequeña el patrón formado por el colorante era regular y formaba una sola línea de color, como puede apreciarse en la figura 12.1a. Sin embargo, cuando la rapidez de flujo era grande, el patrón se dispersaba en la sección transversal del tubo debido al movimiento irregular del fluido. La diferencia de apariencia de ambos patrones se debía, desde luego, a la naturaleza ordenada del flujo laminar, en el primer caso y al carácter fluctuante del flujo turbulento en el último.

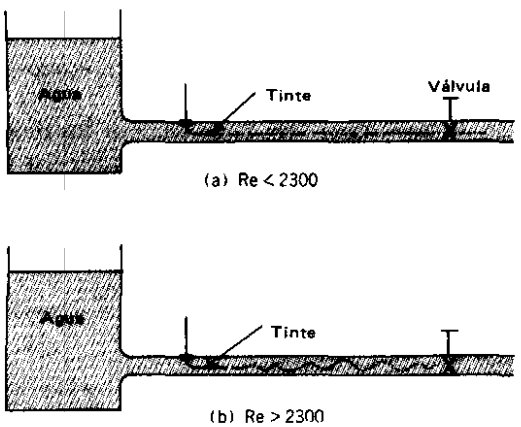


Figura 12.1 Experimento de Reynolds.

La transición de flujo laminar a flujo turbulento en los tubos es, por lo tanto, una función de la velocidad del fluido. Reynolds descubrió que la velocidad del flujo era solamente una de las variables determinantes de la naturaleza del flujo dentro de los tubos, las otras son: el diámetro del tubo, la densidad del fluido y su viscosidad. Estas cuatro variables, combinadas en un solo parámetro adimensional,

$$\mathrm{Re} \equiv \frac{D\rho v}{\mu} \qquad (12\text{-}1)$$

forman el número de Reynolds, cuyo símbolo es Re, en honor de Osborne Reynolds y sus importantes contribuciones a la mecánica de fluidos.

Para el flujo que se lleva a cabo en conductos circulares, se encontró que, debajo del valor de 2,300, para el número de Reynolds, el flujo es *laminar*. Para valores que estén por encima de éste, el flujo también puede ser laminar, de hecho se han observado flujos laminares para un número de Reynolds de 40,000 en experimentos en los que las perturbaciones provenientes del exterior se mantuvieron en un nivel mínimo. Por encima del número de Reynolds de 2,300, las pequeñas perturbaciones ocasionarán la transición al flujo *turbulento*, en tanto que para valores de este número que se encuentren por debajo del anteriormente mencionado, las perturbaciones se amortiguan y prevalece el flujo laminar. El número crítico de Reynolds para el flujo a través de tubos es de 2,300.

12.2 ARRASTRE

El experimento de Reynolds demostró claramente los dos tipos diferentes de flujo: el laminar y el turbulento. Otra forma de mostrar estos dos tipos de flujo y su dependencia del número de Reynolds es el estudio del arrastre. Un caso muy ilustrativo es el del flujo externo (esto es, el flujo alrededor de un cuerpo en contraposición con el flujo dentro de un conducto).

La fuerza de arrastre debida a la fricción es causada por los esfuerzos cortantes que se desarrollan en la superficie de un objeto sólido que se mueve a través de un flujo viscoso. El arrastre de la fricción se calcula usando la expresión:

$$\frac{F}{A} = C_f \frac{\rho v_\infty^2}{2} \tag{12-2}$$

donde F es la fuerza, A es el área de contacto entre el cuerpo sólido y el fluido, C_f es el coeficiente de fricción superficial, ρ es la densidad del fluido y v_∞ es la velocidad libre del fluido.

El coeficiente de fricción superficial C_f, definido por la ecuación (12-2) es adimensional.

El arrastre total que actúa sobre un objeto puede deberse a la presión así como al efecto de la fricción. En esta situación, el coeficiente C_D, se define de la siguiente manera:

$$\frac{F}{A_p} = C_D \frac{\rho v_\infty^2}{2} \tag{12-3}$$

donde F, ρ y v_∞, ya se describieron anteriormente y, además:

C_D = Coeficiente de arrastre

y

$$A_p = \text{Area proyectada de la superficie}$$

El valor de A_p que se utiliza para expresar el arrastre de los cuerpos romos es, por lo general, el área máxima proyectada para el cuerpo.

La cantidad $\rho v_\infty^2/2$ que aparece en las ecuaciones (12-2) y (12-3) se llama, usualmente, *presión dinámica.*

El arrastre de la presión proviene de dos fuentes.* Una es el arrastre inducido, o el que se debe a la sustentación. La otra fuente es el arrastre de estela, que proviene del hecho de que el esfuerzo cortante ocasiona la desviación de las líneas de corriente de sus trayectorias de flujo no viscoso y, en algunos casos, ocasiona su separación total. Esta desviación del patrón de líneas de corriente evita que la presión ejercida sobre el resto del cuerpo llegue al nivel al que llegaría de no ocurrir esto. Como la presión ejercida en la parte anterior del cuerpo es ahora mayor que la ejercida en la parte posterior, se crea una fuerza neta hacia atrás.

En un flujo incompresible, el coeficiente de arrastre depende del número de Reynolds y de la geometría de un cuerpo. Una figura geométrica simple que ejemplifica la dependencia del arrastre, del número de Reynolds es el cilindro circular. El flujo no viscoso alrededor de un cilindro se estudió en el capítulo 10. El flujo no viscoso alrededor de un cilindro no producía ningún arrastre, desde luego, ya que no existía ni arrastre friccional ni arrastre debido a la presión. La variación del coeficiente de arrastre con el número de Reynolds para un cilindro pulido, aparece en la figura 12.2. El patrón de flujo alrededor del cilindro aparece en la figura para los diferentes valores de Re. El patrón de flujo, así como la forma general de la curva sugieren que la variación de arrastre y, por lo tanto, los efectos del esfuerzo cortante en el flujo, se pueden subdividir en cuatro sistemas. Se examinarán las características de cada uno de ellos.

SISTEMA 1

En este sistema todo el flujo es laminar y el número de Reynolds es pequeño, menor de 1. Si se recuerda la importancia física del número de Reynolds en el capítulo 11 como la razón de las fuerzas inerciales a las viscosas, puede decirse que en el sistema 1 predominan las fuerzas viscosas. El patrón del flujo en este caso es casi simétrico, el flujo se adhiere al cuerpo y la estela se ve libre de oscilaciones. En este sistema del llamado *flujo deslizante* predominan y se extienden los efectos viscosos a través del campo de flujo.

*Una tercera fuente de arrastre debido a la presión, el arrastre de onda, está asociada con las ondas de choque.

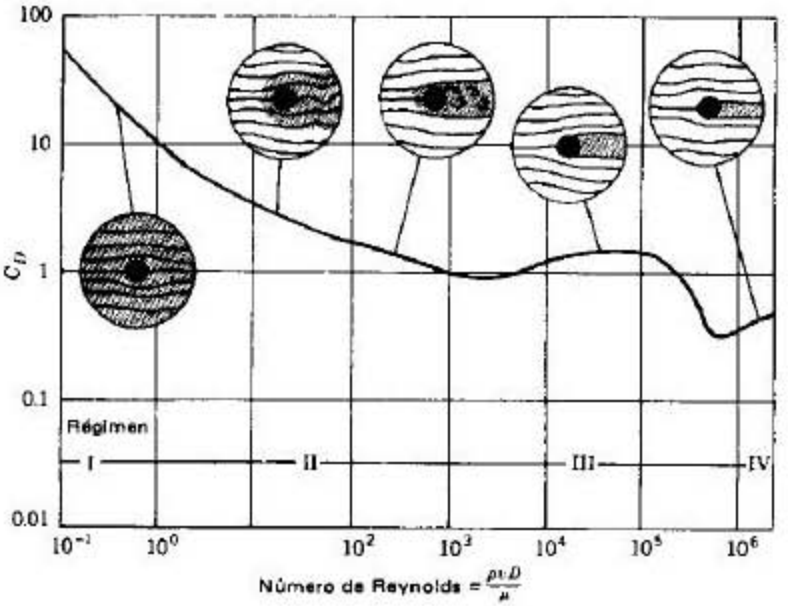


Figura 12.2 Coeficiente de arrastre para los cilindros circulares en función del número de Reynolds. Las regiones sombreadas señalan las áreas donde el esfuerzo cortante ejerce influencia.

SISTEMA 2

En el segundo sistema se pueden apreciar dos ejemplos de patrones de flujo. Al aumentar el número de Reynolds se forman pequeños remolinos en el punto posterior de estancamiento del cilindro. Para valores altos del número de Reynolds estos remolinos crecen en el punto en el que se separan del cuerpo y son barridos por la corriente hasta la estela. El patrón de remolinos que muestra el sistema 2 se llama sendero de vórtices de Von Karman. Este cambio en el carácter de la estela, de una naturaleza constante a una variable está acompañado por un cambio en la pendiente de la curva de arrastre. Las principales características de este sistema son: (a) la naturaleza variable de la estela y (b) la separación del flujo y el cuerpo.

SISTEMA 3

En el tercer sistema el punto de separación de flujo se estabiliza en un punto que se encuentra a unos 80° del punto delantero de estancamiento. La estela ya no se caracteriza por grandes remolinos, aunque sigue siendo variable. El flujo sobre la superficie del cuerpo del punto de estancamiento al punto de separación es laminar y el esfuerzo cortante en este intervalo sólo puede apreciarse en una capa delgada próxima al cuerpo. El coeficiente de arrastre se nivela en el valor casi constante de 1, aproximadamente.

SISTEMA 4

Para un número de Reynolds cercano a 5×10^5 el coeficiente de arrastre disminuye repentinamente a 0.3. Cuando se examina el flujo alrededor de un cuerpo, se observa que el punto de separación se ha movido más de 90°. Además, la distribución de presiones alrededor del cilindro (que aparece en la figura 12.3) hasta el punto de separación es bastante parecida a la distribución de presiones que aparece en la figura 10.5. En la figura se verá que la varición de presión alrededor de la superficie es una función variable del número de Reynolds. Los puntos mínimos de las curvas para números de Reynolds de 10^5 y 6×10^5 están ambos, en el punto de separación de flujo. En esta figura puede apreciarse que la separación ocurre para valores de θ más grandes, para $\mathrm{Re} = 6 \times 10^5$, que para $\mathrm{Re} = 10^5$.

La capa de flujo cercana a la superficie del cilindro es turbulenta en este sistema, sufriendo una transición del flujo laminar próximo al punto delantero de estancamiento. El marcado decremento en el arrastre se debe al cambio en el punto de separación. En general, un flujo turbulento resiste mejor separación de flujo que un flujo laminar. Como en este sistema el número de Reynolds es grande, se puede decir que las fuerzas inerciales predominan sobre las viscosas.

Los cuatro sistemas de flujo alrededor de un cilindro explican la disminución de la influencia de las fuerzas viscosas al aumentar el número de Reynolds. En los sistemas 3 y 4 el patrón de flujo sobre la parte anterior del cilindro concuerda con la teoría del flujo no viscoso. Para otras geometrías se observa una variación semejante en el dominio de influencia de las fuerzas viscosas y, como es de esperarse, la concordancia con las predicciones acerca del flujo no viscoso para un número dado de Reynolds aumenta al aumentar la esbeltez del cuerpo. La mayoría de los casos que son de interés en ingeniería e involucran flujos externos, tienen campos de flujo semejantes a los de los sistemas 3 y 4.

La figura 12.4 muestra la variación del coeficiente de arrastre con el número de Reynolds para una esfera, para placas infinitas y para discos circulares y placas cuadradas. Nótese la semejanza en cuanto a la forma de la curva C_D para la esfera, con la del cilindro, que aparece en la figura 12.2. Específicamente puede observarse la misma disminución marcada en C_D, para un valor mínimo cerca del número de Reynolds de 5×10^5. Esto se debe, de nuevo, al cambio de flujo, de laminar a turbulento, en la capa límite.

12.3 EL CONCEPTO DE CAPA LIMITE

La observación de una región de influencia decreciente de esfuerzo cortante al aumentar el número de Reynolds, llevó a Ludwig Prandtl, en 1904, al concepto de capa límite. De acuerdo con la hipótesis de Prandtl los efectos de la fricción de los fluidos para valores grandes de los números de Reynolds, se

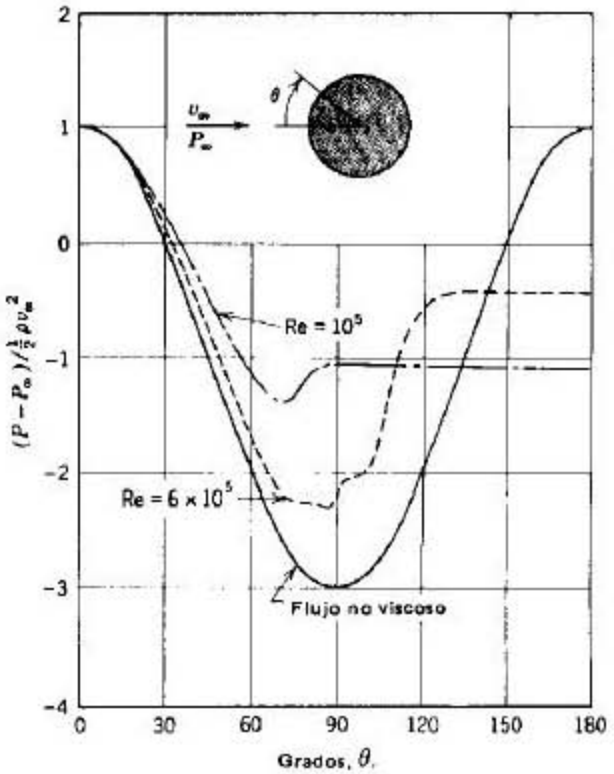


Figura 12.3 Distribución de presiones sobre un cilindro circular para varios valores del número de Reynolds.

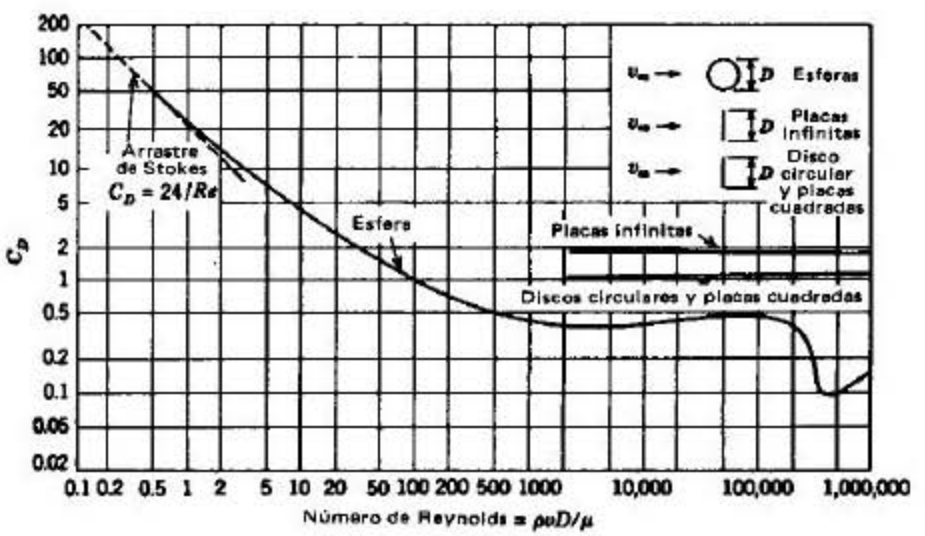


Figura 12.4 Coeficiente de arrastre contra número de Reynolds para diversos objetos.

limitan a una capa delgada próxima a la superficie de un cuerpo, de aquí el término *capa límite*. Más aún, no hay ningún cambio importante de presión a lo largo de la capa límite. Esto significa que la presión en la capa límite es la misma que en el fluido no viscoso que está fuera de la capa límite. La importancia de la teoría de Prandtl está en que permite simplificar el tratamiento analítico de los fluidos viscosos. La presión, por ejemplo, se puede obtener experimentalmente, o a partir de la teoría de los fluidos no viscoso. Por lo tanto, las únicas incógnitas son las componentes de la velocidad.

La capa límite sobre una placa plana puede verse en la figura 12.5. El grosor de la capa límite, δ, se toma arbitrariamente, como la distancia desde la superficie, hasta donde la velocidad alcanza el 99% de la velocidad de la corriente libre. Se ha exagerado el grosor en favor de la claridad.

La figura 12.5 muestra la forma en la que aumenta el grosor de la capa límite con la distancia, x, del borde de ataque. Para valores relativamente pequeños de x, el flujo que tiene lugar dentro de la capa límite es laminar y a esto se le denomina región de la capa límite laminar. Para valores más grandes de x aparece la región de transición donde la fluctuación entre los flujos laminar y turbulento ocurre dentro de la capa límite. Finalmente, para un cierto valor de x, y arriba de éste, la capa límite siempre es turbulenta. En la región en la cual la capa límite es turbulenta, existe, como puede apreciarse, una película muy delgada de fluido, llamada *sub-capa laminar*, en la cual el flujo todavía es laminar y existen gradientes grandes de velocidad.

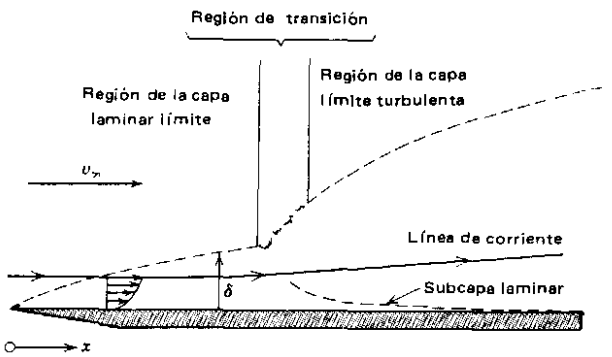


Figura 12.5 Capa límite en una placa plana (Se ha exagerado el grosor en favor de la claridad).

El criterio para saber el tipo de capa límite presente es la magnitud del número de Reynolds, Re_x, conocido como *número local de Reynolds*, basado en la distancia x del borde de ataque. El número local de Reynolds se define como:

$$Re_x \equiv \frac{xvp}{\mu} \tag{12-4}$$

Para un flujo que pasa por una placa plana, como puede apreciarse en la figura 12.5, los datos experimentales indican lo siguiente:

(a) $\mathrm{Re}_x < 2\times10^5$	la capa límite es laminar
(b) $2\times10^5 < \mathrm{Re}_x < 3\times10^6$	la capa límite puede ser laminar o turbulenta
(c) $3\times10^6 < \mathrm{Re}_x$	la capa límite es turbulenta

12.4 LAS ECUACIONES DE CAPA LIMITE

El concepto de una capa límite relativamente delgada para números de Reynolds grandes nos lleva a hacer algunas simplificaciones importantes en las ecuaciones de Naiver-Stokes. Para un flujo bidimensional e incompresible sobre una placa plana, las ecuaciones de Navier-Stokes son:

$$\rho\left\{\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}\right\}=\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \tag{12-5}$$

$$\rho\left\{\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}\right\}=\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \tag{12-6}$$

donde $\tau_{xy}=\tau_{yx}=\mu(\partial v_x/\partial y+\partial v_y/\partial x)$, $\sigma_{xx}=-P+2\mu(\partial v_x/\partial x)$

y $\sigma_{yy}=-P+2\mu(\partial v_y/\partial y)$.

El esfuerzo cortante en una capa delgada es aproximadamente igual a $\mu(\partial v_x/\partial y)$. Esto puede apreciarse tomando las magnitudes relativas de $\partial v_x/\partial y$ y $\partial v_y/\partial x$. Observando la figura 12.5 se puede escribir: $v_x|_\delta/v_y|_\delta \sim \mathrm{O}(x/\delta)$, donde O simboliza el orden de magnitud. Entonces:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y}\sim \mathrm{O}\left(\frac{v_x|_\delta}{\delta}\right) \qquad \frac{\partial v_y}{\partial x}\sim \mathrm{O}\left(\frac{v_y|_\delta}{x}\right)$$

De modo que:

$$\frac{\partial v_x/\partial y}{\partial v_y/\partial x}\sim \mathrm{O}\left(\frac{x}{\delta}\right)^2$$

lo cual, para una capa límite relativamente delgada resulta un número grande y, por ello, $\partial v_x/\partial y \gg \partial v_y/\partial x$. El esfuerzo normal para números grandes de Reynolds es parecido al negativo de la presión, para

$$\mu(\partial v_x/\partial x)\sim \mathrm{O}(\mu v_\infty/x)=\mathrm{O}(\rho v_\infty{}^2/\mathrm{Re}_x);$$

por lo tanto, $\sigma_{xx}\simeq\sigma_{yy}\simeq -P$. Cuando se incorporan estas simplificaciones en lo esfuerzos, las ecuaciones para el flujo sobre una placa plana se convierten en:

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)=-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \tag{12-7}$$

y

$$\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)=-\frac{\partial P}{\partial y}+\mu\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} \tag{12-8}$$

Aún más,* los términos de la segunda ecuación son mucho más pequeños que los de la primera ecuación, por lo cual $\partial P/\partial y \simeq 0$; y por esto $\partial P/\partial x = dP/dx$, lo cual de acuerdo con la ecuación de Bernoulli, es igual a $-\rho v_\infty\, dv_\infty/dx$.

La forma final de la ecuación (12-7) es:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}=v_\infty\frac{dv_\infty}{dx}+\nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \tag{12-9}$$

La ecuación anterior y la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0 \tag{12-10}$$

se conocen como ecuaciones de la capa límite.

12.5 SOLUCION DE BLASIUS PARA LA CAPA LAMINAR LIMITE EN UNA PLACA PLANA

Un caso muy importante en el que se ha logrado encontrar una solución analítica para las ecuaciones del movimiento es el de la capa límite laminar en una placa plana de flujo permanente.

Para un flujo paralelo a una superficie plana, $v_\infty(x) = v_\infty$ y $dP/dx = 0$ de acuerdo con la ecuación de Bernoulli, Las ecuaciones que se van a resolver son las siguientes:

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \tag{12-11a}$$

y

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0 \tag{12-11b}$$

usando las condiciones de frontera: $v_x = v_y$ para $y = 0$ y $v_x = v_\infty$ para $y = \infty$.

*El orden de magnitud de cada uno de los términos se puede analizar como se hizo anteriormente. Por ejemplo: $v_x(\partial v_y/\partial x) \sim O(v_\infty(v_\infty/x)(\delta/x)) = O(v_\infty^2\delta/x^2)$.

Blasius* obtuvo una solución para el conjunto de ecuaciones (12-11) por medio de la introducción de la función de corriente, Ψ tal como se anotó en el capítulo 10, lo cual satisface automáticamente la ecuación bidimensional de continuidad, que es la ecuación (12-11b). Este conjunto de ecuaciones puede reducirse a una sola ecuación diferencial ordinaria transformando a las variables independientes x, y en η y las variables dependientes, de $\Psi(x, y)$ a $f(\eta)$

donde

$$\eta(x, y) = \frac{y}{2}\left(\frac{v_\infty}{\nu x}\right)^{1/2} \tag{12-12}$$

y

$$f(\eta) = \frac{\Psi(x, y)}{(\nu x v_\infty)^{1/2}} \tag{12-13}$$

Los términos apropiados de la ecuación (12-11a) se pueden determinar a partir de las ecuaciones (12-12) y (12-13). Resultarán las expresiones que aparecen a continuación. El lector puede desear verificar el desarrollo matemático.

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{v_\infty}{2} f'(\eta) \tag{12-14}$$

$$v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\nu v_\infty}{x}\right)^{1/2} (\eta f' - f) \tag{12-15}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{v_\infty \eta}{4x} f'' \tag{12-16}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{v_\infty}{4}\left(\frac{v_\infty}{\nu x}\right)^{1/2} f'' \tag{12-17}$$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{v_\infty}{8} \frac{v_\infty}{\nu x} f''' \tag{12-18}$$

La sustitución de las ecuaciones (12-14) a (12-18) en la ecuación (12-11a), así como la cancelación, da la siguiente ecuación diferencial ordinaria,

$$f''' + f f'' = 0 \tag{12-19}$$

Si se establecen las condiciones apropiadas de frontera:

$$f = f' = 0 \qquad \text{at } \eta = 0$$

$$f' = 2 \qquad \text{at } \eta = \infty$$

*H. Blasius, Grenzschichten in Flussigkeiten mit Kleiner Reibung, *Z. Math. U. Phys. Sci.*, 1, 1908.

Observe que esta ecuación diferencial, aunque ordinaria, no es lineal y que, de las condiciones finales impuestas a la variable $f(\eta)$, dos son valores iniciales y el tercero es un valor de frontera. Esta ecuación fue resuelta por primera vez por Blasius, utilizando una expansión en series para expresar la función $f(\eta)$, en el origen y una solución asintótica que corresponda a la condición de frontera en $\eta = \infty$. Howarth* realizó el mismo trabajo, esencialmente pero obtuvo resultados más exactos. La tabla 12.1 muestra los resultados numéricos de Howarth. En la figura 12.6 se incluye una gráfica de estos valores.

Tabla 12.1 Valores de f', v_x/v_∞, y f'' para un flujo laminar paralelo a una placa plana (de Howarth).

$\eta = \frac{y}{2}\sqrt{\frac{v_\infty}{\nu x}}$	f'	$\frac{v_x}{v_\infty}$	f''
0	0	0	1.32824
0.2	0.2655	0.1328	1.3260
0.4	0.5294	0.2647	1.3096
0.6	0.7876	0.3938	1.2664
0.8	1.0336	0.5168	1.1867
1.0	1.2596	0.6298	1.9670
1.2	1.4580	0.7290	0.9124
1.4	1.6230	0.8115	0.7360
1.6	1.7522	0.8761	0.5565
1.8	1.8466	0.9233	0.3924
2.0	1.9110	0.9555	0.2570
2.2	1.9518	0.9759	0.1558
2.4	1.9756	0.9878	0.0875
2.6	1.9885	0.9943	0.0454
2.8	1.9950	0.9962	0.0217
3.0	1.9980	0.9990	0.0096
3.2	1.9992	0.9996	0.0039
3.4	1.9998	0.9999	0.0015
3.6	1.9999	1.0000	0.0005
3.8	2.0000	1.0000	0.0002
4.0	2.0000	1.0000	0.0000
5.0	2.0000	1.0000	0.0000

Goldstein† ha sugerido una forma más sencilla de resolver la ecuación (12-19) y presentó un esquema por medio del cual las condiciones de frontera sobre la función f son valores iniciales.

Si se definen dos nuevas variables en términos de la constante, C, de manera que:

$$\phi = f/C \tag{12-20}$$

*L. Howarth, *"On the Solution of the Laminar Boundary Layer Equations"*, Proc. Rey. Soc. London, A 164, 547 (1938).

†S. Goldsten, *Modern Development in Fluis Dynamics,* Oxford Univ. Pres, London 1938, pág. 135.

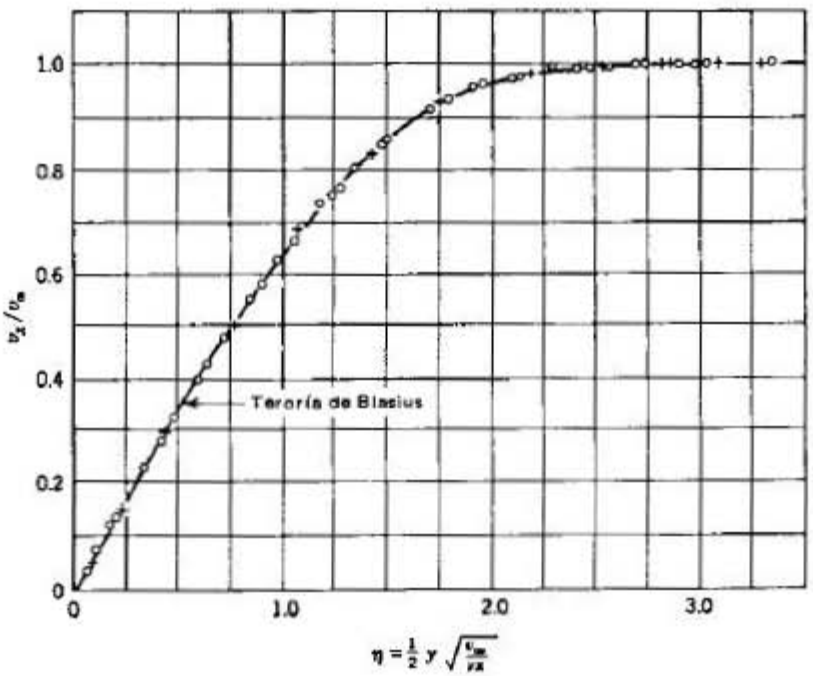


Figura 12.6 La distribución de la velocidad en la capa límite laminar sobre una placa plana. Datos experimentales proporcionados por J. Nikuradse (monograph, Zentrale F. wiss. Berichtswesen, Berlin, 1942) para la magnitud del número de Reynolds de 1.08×10^5 a 7.28×10^5.

y

$$\xi = C\eta \tag{12-21}$$

entonces los términos de la ecuación (12-19) se convierten en:

$$f(\eta) = C\phi(\xi) \tag{12-22}$$

$$f' = C^2\phi' \tag{12-23}$$

$$f'' = C^3\phi'' \tag{12-24}$$

y

$$f''' = C^4\phi''' \tag{12-25}$$

La ecuación diferencial resultante se transforma en:

$$\phi''' + \phi\phi'' = 0 \tag{12-26}$$

y las condiciones iniciales impuestas a ϕ son:

$$\phi = 0 \qquad \phi' = 0 \qquad \phi'' = ? \qquad \text{at } \xi = 0$$

La otra condición de frontera se puede expresar de la siguiente manera:

$$\phi'(\xi) = \frac{f'(\eta)}{C^2} = \frac{2}{C^2} \text{ para } \xi = \infty$$

Se puede hacer corresponder una condición inicial a esta condición de frontera si se hace que $f''(\eta = 0)$ sea igual a una constante A; entonces $\phi''(\xi = 0) = A/C^3$. La constante A debe tener cierto valor para satisfacer la condición original de frontera impuesta sobre f'. Sea $\phi''(\xi = 0) = 2$, dando $A = 2C^3$. Por lo tanto, los valores iniciales de ϕ, ϕ' y ϕ'' ahora están especificados. El cálculo de $\phi''(0)$, requiere que:

$$\phi'(\infty) = \frac{2}{C^2} = \frac{1}{(2A)^{2/3}} \tag{12-27}$$

Así, la ecuación (12-26) se puede resolver como un problema de valores iniciales con una escala de respuestas que van de acuerdo con la ecuación (12-27) para corresponder a la condición de frontera: $\eta = \infty$.

Los resultados importantes del trabajo de Blasius son los siguientes:

(a) El grosor límite, δ, se obtiene de la tabla 12.1. Cuando $\eta = 2.5$, se tendrá $v_x/v_\infty \cong 0.99$. Por lo tanto, haciendo $y = \delta$, en este punto, se tendrá:

$$\eta = \frac{y}{2}\sqrt{\frac{v_\infty}{\nu x}} = \frac{\delta}{2}\sqrt{\frac{v_\infty}{\nu x}} = 2.5$$

y, por esto:

$$\delta = 5\sqrt{\frac{\nu x}{v_\infty}}$$

ó

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{\dfrac{v_\infty x}{\nu}}} = \frac{5}{\sqrt{\text{Re}_x}} \tag{12-28}$$

(b) El gradiente de la velocidad en la superficie está dado por la ecuación (12.17):

$$\left.\frac{\partial v_x}{\partial y}\right|_{y=0} = \frac{v_\infty}{4}\left(\frac{v_\infty}{\nu x}\right)^{1/2} f''(0) = 0.332\, v_\infty \sqrt{\frac{v_\infty}{\nu x}} \tag{12-29}$$

Puesto que la presión no contribuye al arrastre por flujo sobre una placa plana, todo el arrastre es viscoso. El esfuerzo cortante en la superficie se puede calcular así:

$$\tau_0 = \mu \left.\frac{\partial v_x}{\partial y}\right|_{y=0}$$

Sustituyendo la ecuación (12-27) en esta expresión, se obtendrá:

$$\tau_0 = \mu\, 0.332\, v_\infty \sqrt{\frac{v_\infty}{\nu x}} \tag{12-30}$$

El coeficiente de fricción superficial se puede determinar empleando la ecuación (12-2) de la siguiente manera:

$$C_{fx} = \frac{\tau}{\rho v_\infty^2/2} = \frac{F_d/A}{\rho v_\infty^2/2} = \frac{0.332 \mu v_\infty \sqrt{\frac{v_\infty}{\nu x}}}{\rho v_\infty^2/2}$$

$$= 0.664 \sqrt{\frac{\nu}{x v_\infty}}$$

$$C_{fx} = \frac{0.664}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \tag{12-31}$$

La ecuación (12-31) es una expresión simple para el coeficiente de fricción superficial para un valor particular de x. Por esta razón se usa el símbolo C_{fx}; el subíndice x indica que es un *coeficiente local*.

En tanto que es importante conocer los valores de C_{fx}, rara vez es útil un valor local, la mayoría de las veces se desea calcular el arrastre total que resulta del flujo viscoso sobre una superficie de tamaño finito. El coeficiente promedio de la fricción superficial que sirve a este respecto, se puede determinar de manera sencilla a partir de C_{fx} de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$F_d = A C_{fL} \frac{\rho v_\infty^2}{2} = \frac{\rho v_\infty^2}{2} \int_A C_{fx}\, dA$$

o el coeficiente promedio, llamado C_{fL}, se relaciona con C_{fx} por medio de

$$C_{fL} = \frac{1}{A} \int_A C_{fx}\, dA$$

Para el caso resuelto por Blasius, imagínese una placa de ancho uniforme, W y longitud L, para la cual:

$$C_{fL} = \frac{1}{L}\int_0^L C_{fx}\,dx = \frac{1}{L}\int_0^L 0.664\sqrt{\frac{\nu}{v_\infty}}\,x^{-1/2}\,dx$$

$$= 1.328\sqrt{\frac{\nu}{Lv_\infty}}$$

$$C_{fL} = \frac{1.328}{\sqrt{\mathrm{Re}_L}} \qquad (12\text{-}32)$$

12.6 FLUJO CON UN GRADIENTE DE PRESION

En la solución de Blasius para el flujo laminar sobre una placa, el gradiente de la presión fue cero. Una situación de flujo mucho más común incluye al flujo con un gradiente de presión. El gradiente de presión juega un papel muy importante en la separación de flujo, como puede verse con la ayuda de la ecuación de capa límite (12-7). Si se hace uso de las condiciones de frontera en la pared: $v_x = v_y = 0$, para $y = 0$ la ecuación (12-7) se transforma en:

$$\mu\left.\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right|_{y=0} = \frac{dP}{dx} \qquad (12\text{-}33)$$

la cual relaciona la curvatura del perfil de velocidad en la superficie con el gradiente de la presión. La figura 12.7 muestra la variación en v_x, $\partial v_x/\partial y$, y $\partial^2 v_x/\partial y^2$ a través de la capa límite para el caso en que el gradiente de la presión sea cero.

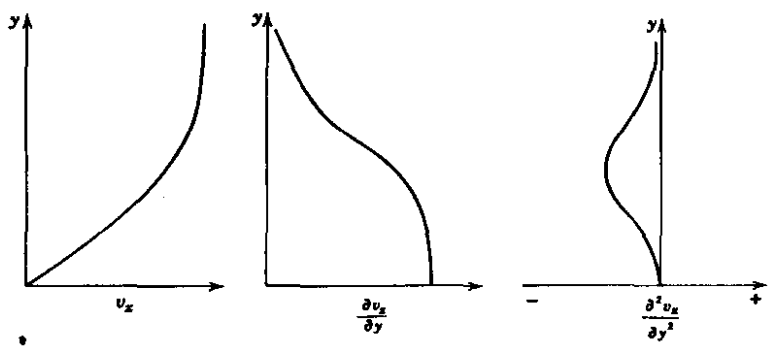


Figura 12.7 Variación de la velocidad y derivadas de la misma a través de la capa laminar cuando $dP/dx = 0$.

Cuando $dP/dx = 0$, la segunda derivada de la velocidad en la pared también debe ser cero, por lo tanto, el perfil de la velocidad es lineal cerca de la pared. Hacia afuera, en la capa límite, el gradiente de la velocidad disminuye y gradualmente tiende a cero. La disminución del gradiente de velocidad significa que la segunda derivada de la velocidad debe ser negativa. Puede verse en la derivada $\partial^2 v_x/\partial y^2$ es cero en la pared, negativa dentro de la capa límite y tiende a cero en el borde exterior de la capa límite. Es importante hacer notar que la segunda derivada debe tender a cero desde el lado negativo cuando $y \to \delta$. Para valores de $dP/dx \neq 0$ la variación en v_x y sus derivadas, pueden verse en la figura 12.8.

Se observará que un gradiente negativo de la presión produce una variación de velocidad semejante al caso en el gradiente de la presión es cero. Sin embargo, si dP/dx es negativa, se requiere que exista un valor positivo de $\partial^2 v_x/\partial y^2$ en la pared. Como esta derivada debe tender a cero desde el lado negativo, en algún punto dentro de la capa límite, la segunda derivada debe ser igual a cero. Debe recordarse que la segunda derivada cuyo valor es cero se asocia con un punto de inflexión. El punto de inflexión puede verse en el perfil de la velocidad de la figura 12.8. Ahora se puede volver la atención al tema de la separación de flujos.

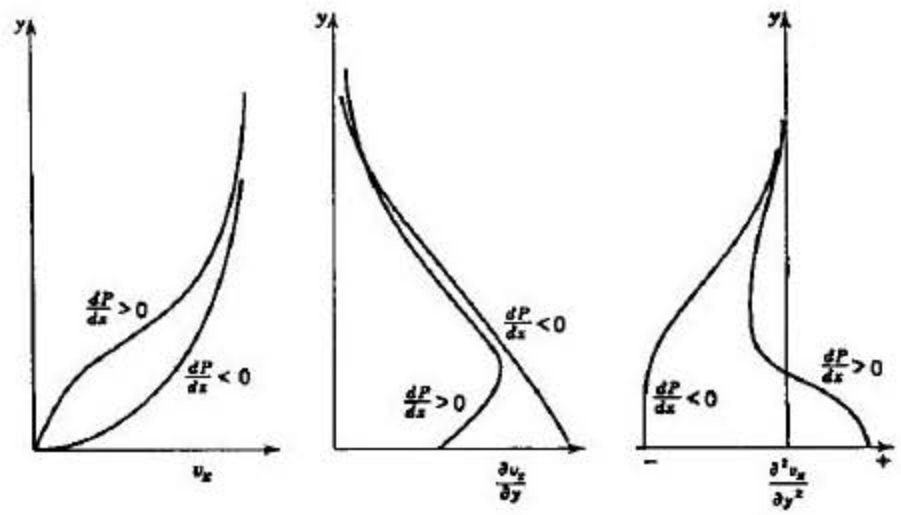


Figura 12.8 Variación de v_x y sus derivadas a través de la capa límite para diversos gradientes de presión.

Para que pueda ocurrir dicha separación, la velocidad en la capa de fluido adyacente a la pared debe ser, o cero, o negativa, como lo muestra la figura 12.9. Debe observarse que este tipo de perfil de velocidad requiere un punto de inflexión. Como el único tipo de flujo de capa límite que tiene un punto de inflexión es el flujo cuyo gradiente de presión es positivo, se deduce que es

necesario que exista un gradiente positivo de la presión para la separación de flujos. Por esta razón un gradiente positivo de presión de llama *gradiente de presión adversa*. El flujo puede permanecer sin separación con un gradiente de presión adversa, por lo cual $dP/dx>0$ es una condición necesaria, más no suficiente para la separación. En contraste con esto, un gradiente negativo de presión, en ausencia de bordes puntiagudos, no puede ocasionar la separación de flujo. Por lo tanto, un gradiente negativo de presión se llama gradiente de presión favorable.

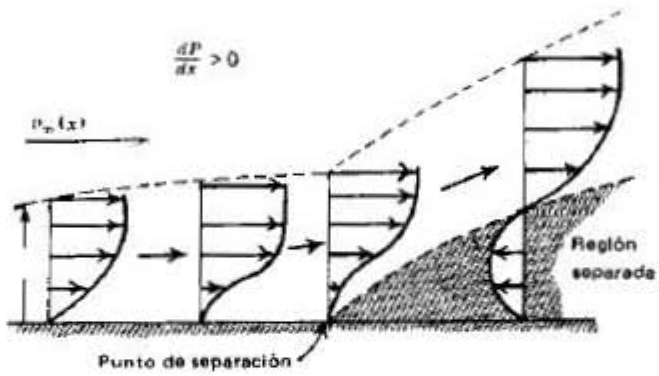


Figura 12.9 Perfiles de la velocidad en una región de flujos separados.

La presencia de un gradiente de presión también afecta la magnitud del coeficiente de fricción superficial, como se puede deducir de la figura 12.8. El gradiente de la velocidad en la pared aumenta cuando el gradiente de la presión se torna más favorable.

12.7 ANALISIS INTEGRAL DE VON KARMAN DEL MOMENTO

La solución de Blasius es obviamente, bastante restrictiva en cuanto a su aplicación, ya que puede usarse solamente en el caso de una capa límite laminar sobre una superficie plana. Cualquier situación de interés práctico más compleja que ésta implica procedimientos analíticos que, hasta ahora, han demostrado ser inferiores a los experimentados. Ahora se estudiará un método aproximado que proporcione información para los sistemas que involucren otro tipo de fluido y tengan otras geometrías.

Analice el volumen de control que aparece en la figura 12.10. El volumen de control que se va a analizar es de profundidad unitaria y está acotado por el eje x en plano xy, el cual es tangente, en este dibujo, a la superficie, en el punto 0; el eje y, el borde de la capa límite y una línea paralela al eje y a una

distancia Δx. Estudiaremos el caso de un flujo bidimensional, incompresible y permanente.

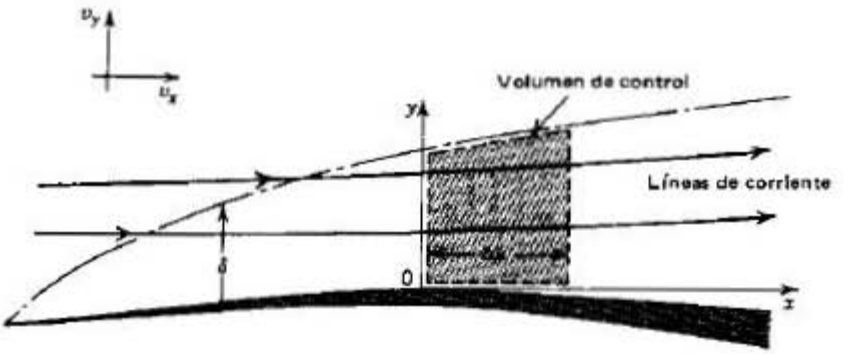


Figura 12.10 Volumen de control para el análisis integral de la capa límite.

Para hacer un análisis del momento del volumen de control se necesita aplicar la forma escalar, en la dirección de x, del teorema del momento:

$$\sum F_x = \int\int_{c.s.} v_x \rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\, dA + \frac{\partial}{\partial t}\int\int\int_{c.v.} v_x \rho\, dV \tag{5-5a}$$

Si se analiza el problema, término por término, se llega al siguiente resultado:

$$\sum F_x = P\delta|_x - P\delta|_{x+\Delta x} + \left(P|_x + \frac{P|_{x+\Delta x} - P|_x}{2}\right)(\delta|_{x+\Delta x} - \delta|_x) - \tau_0\,\Delta x$$

donde δ representa el grosor de la capa límite y las fuerzas del cuerpo se suponen despreciables. Los términos anteriores representan las fuerzas debidas a la presión en la dirección de x en los lados de arriba, a la izquierda y a la derecha del volumen de control, y la fuerza friccional en la parte inferior, respectivamente.

El término correspondiente a la integral de superficie, se transforma en:

$$\int\int_{c.s.} v_x \rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\, dA = \int_0^\delta \rho v_x^2\, dy\Big|_{x+\Delta x} - \int_0^\delta \rho v_x^2\, dy\Big|_x - v_\infty \dot{m}_{top}$$

y el término acumulativo es:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\int\int_{c.v.} v_x \rho\, dV = 0$$

ya que este es un flujo permanente.

Si se aplica la ecuación integral para la conservación de la masa se obtendrá:

$$\int\int_{\text{c.s.}} \rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dA + \frac{\partial}{\partial t}\int\int\int_{\text{c.v.}} \rho\,dV = 0 \tag{4-1}$$

$$\int\int_{\text{c.s.}} \rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dA = \int_0^\delta \rho v_x\,dy\Big|_{x+\Delta x} - \int_0^\delta \rho v_x\,dy\Big|_x - \dot{m}_{\text{superior}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\int\int_{\text{c.v.}} \rho\,dV = 0$$

y se puede evaluar el gasto másico en la parte superior del volumen de control, $\dot{m}_{\text{superior}}$, en la forma siguiente

$$\dot{m}_{\text{superior}} = \int_0^\delta \rho v_x\,dy\Big|_{x+\Delta x} - \int_0^\delta \rho v_x\,dy\Big|_x \tag{12-34}$$

La expresión para el momento, incluyendo a la ecuación (12-34), se transforma ahora en:

$$-(P\delta|_{x+\Delta x} - P\delta|_x) + \left(\frac{P|_{x+\Delta x} - P|_x}{2} + P|_x\right)(\delta|_{x+\Delta x} - \delta|_x) - \tau_0\,\Delta x$$
$$= \int_0^\delta \rho v_x^2\,dy\Big|_{x+\Delta x} - \int_0^\delta \rho v_x^2\,dy\Big|_x - v_\infty\left(\int_0^\delta \rho v_x\,dy\Big|_{x+\Delta x} - \int_0^\delta \rho v_x\,dy\Big|_x\right)$$

Reordenando esta expresión y dividiéndola entre Δx, se obtiene:

$$-\left(\frac{P|_{x+\Delta x} - P|_x}{\Delta x}\right)\delta|_{x+\Delta x} + \left(\frac{P|_{x+\Delta x} - P|_x}{2}\right)\left(\frac{\delta|_{x+\Delta x} - \delta|_x}{\Delta x}\right) + \left(\frac{P\delta|_x - P\delta|_x}{\Delta x}\right)$$
$$= \left(\frac{\int_0^\delta \rho v_x^2\,dy|_{x+\Delta x} - \int_0^\delta \rho v_x^2\,dy|_x}{\Delta x}\right) - v_\infty\left(\frac{\int_0^\delta \rho v_x\,dy|_{x+\Delta x} - \int_0^\delta \rho v_x\,dy|_x}{\Delta x}\right) + \tau_0$$

Tomando el límite cuando $\Delta x \to 0$, se obtiene:

$$-\delta\frac{dP}{dx} = \tau_0 + \frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho v_x^2\,dy - v_\infty\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho v_x\,dy \tag{12-35}$$

El concepto de capa límite supone que hay un flujo no viscoso fuera de la capa límite, para el cual se puede escribir la ecuación de Bernoulli:

$$\frac{dP}{dx} + \rho v_\infty \frac{dv_\infty}{dx} = 0$$

que se puede reordenar en la forma:

$$\frac{\delta}{\rho}\frac{dP}{dx} = \frac{d}{dx}(\delta v_\infty^2) - v_\infty \frac{d}{dx}(\delta v_\infty) \tag{12-36}$$

Note que los lados izquierdos de las ecuaciones (12-35) y (12-36) son semejantes. Por lo tanto, podemos relacionar los lados derechos y, con el reacomodo apropiado, obtener el siguiente resultado:

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \left(\frac{d}{dx} v_\infty\right) \int_0^\delta (v_\infty - v_x)\, dy + \frac{d}{dx} \int_0^\delta v_x (v_\infty - v_x)\, dy \tag{12-37}$$

La ecuación (12-37) es la expresión integral del momento de von Karman, llamada así en honor de Theodore von Karman, quien fue su autor.

La ecuación (12-37) es una expresión general cuya solución requiere un conocimiento de la velocidad v_x, en función de la distancia a la superficie, y.

La exactitud del resultado final dependerá del la aproximación del perfil supuesto de la velocidad al perfil real.

Como ejemplo de la aplicación de la ecuación (12-37), analicemos el caso de un flujo laminar sobre una placa plana, situación para la cual se conoce una respuesta exacta. En este caso la velocidad de corriente libre es constante, por lo tanto, $(d/dx)v_\infty = 0$ y la ecuación (12-36) se simplifica hasta quedar:

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \frac{d}{dx} \int_0^\delta v_x (v_\infty - v_x)\, dy \tag{12-38}$$

Pohlhausen obtuvo una primera solución para la ecuación (12-38), suponiendo, para el perfil de la velocidad la función cúbica:

$$v_x = a + by + cy^2 + dy^3 \tag{12-39}$$

Las constantes a, b, c y d se pueden calcular si conocemos ciertas condiciones de frontera que deben satisfacerse en la capa límite, que son:

(1) $v_x = 0$ a $y = 0$

(2) $v_x = v_\infty$ a $y = \delta$

(3) $\dfrac{\partial v_x}{\partial y} = 0$ a $y = \delta$

y

$$(4)\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}=0 \qquad \text{a } y=0$$

La condición límite (4) resulta de la ecuación (12-33) que establece que la segunda derivada en la pared es igual al gradiente de la presión. Como, en este caso, la presión es constante, $\partial^2 v_x/\partial y^2=0$. Resolviendo esta ecuación para a, b, c y d, se obtiene, a partir de estas condiciones:

$$a=0 \qquad b=\frac{3}{2\delta}v_\infty \qquad c=0 \qquad d=-\frac{v_\infty}{2\delta^3}$$

lo cual, al sustituirse en la ecuación (12-39), da la forma del perfil de velocidad:

$$\frac{v_x}{v_\infty}=\frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \tag{12-40}$$

Sustituyendo la ecuación (12-38) se transforma en:

$$\frac{3\nu}{2}\frac{v_\infty}{\delta}=\frac{d}{dx}\int_0^\delta {v_\infty}^2\left(\frac{3}{2}\frac{y}{\delta}-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right)\left(1-\frac{3}{2}\frac{y}{\delta}+\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right)dy$$

o, después de la integración:

$$\frac{3}{2}\nu\frac{v_\infty}{\delta}=\frac{39}{280}\frac{d}{dx}({v_\infty}^2\delta)$$

Como la velocidad de corriente libre es constante, resulta una ecuación diferencial en δ:

$$\delta\,d\delta=\frac{140}{13}\frac{\nu\,dx}{v_\infty}$$

la cual, después de su integración, queda:

$$\frac{\delta}{x}=\frac{4.64}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \tag{12-41}$$

El coeficiente local de fricción superficial, C_{fx}, está dado por:

$$C_{fx}\equiv\frac{\tau_0}{\frac{1}{2}\rho {v_\infty}^2}=\frac{2\nu}{{v_\infty}^2}\frac{3}{2}\frac{v_\infty}{\delta}=\frac{0.646}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \tag{12-42}$$

La integración del coeficiente de fricción superficial local entre $x = 0$ y $x = L$, como en la ecuación (12-31), da:

$$C_{fL} = \frac{1.292}{\sqrt{\mathrm{Re}_L}} \tag{12-43}$$

Comparando las ecuaciones (12-41), (12-42) y (12-43) con los resultados exactos obtenidos por Blasius para la misma situación que son las ecuaciones (12-29), (12-30) y (12-32), se observa una diferencia aproximada de 7% en δ y 3% en C_f. Esta diferencia podría desde luego haber sido menor si el perfil supuesto de la velocidad hubiera sido una representación más exacta del perfil real.

Esta comparación demuestra la utilidad del método de la integral del momento para la solución de la capa límite e indica el procedimiento que puede utilizarse con un grado razonable de exactitud para obtener los valores del grosor de la capa límite y el coeficiente de la fricción superficial cuando no es posible hacer un análisis exacto. El método de la integral del momento también se puede utilizar para determinar el esfuerzo cortante a partir del perfil de la velocidad.

12.8 CONCLUSION

En este capítulo se ha analizado el flujo viscoso por diversos medios. Se han definido y explicado los coeficientes de arrastre y capa límite; se introdujeron los conceptos de fricción superficial y arrastre de la presión y se estudiaron dos métodos de análisis de la capa límite.

Los conceptos e ideas de este capítulo son fundamentales para la transferencia de calor, masa y momento. La capa límite se analizará de nuevo en los capítulos 19 y 28 y muchos de los resultados obtenidos en este capítulo tendrán la misma importancia para la transferencia de calor convectivo y de masa. La capa límite es uno de los pilares de la estructura de los procesos de transferencia.

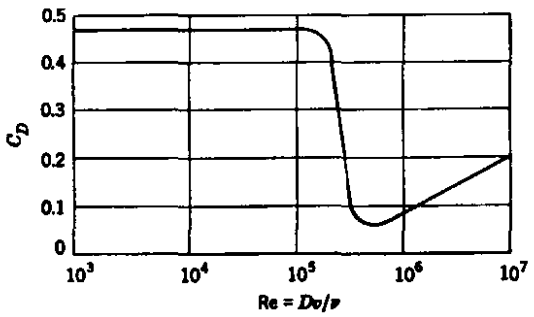
PROBLEMAS

12.1 Si se realizara el experimento de Reynolds con un tubo DI de 30 mm, ¿qué velocidad de flujo ocurriría en la transición?

12.2 Los modernos aviones se han perfeccionado tanto que el 75% del arrastre parasitario (porción del arrastre total del avión que no está directamente asociado con la producción de empuje de sustentación) puede atribuirse a la fricción a lo largo de las superficies externas. Para un avión subsónico de propulsión, el coeficiente de arrastre parasitario

basado en el área del ala es de 0.011. Determine el arrastre de la fricción en un avión como éste.
(a) a 500 mph y a 35,000 ft.
(b) a 200 mph al nivel del mar.
El área del ala es de 2,400 ft^2.

12.3 El coeficiente de arrastre para una esfera lisa aparece a continuación. Determine la velocidad para el número crítico de Reynolds para una esfera de 42 mm de diámetro en el aire.



12.4 Trace una curva de arrastre contra velocidad para una esfera de 1.65 plg de diámetro en el aire, entre las velocidades de 50 fps. y 400 fps.

12.5 Estudie el flujo de aire a 30 m/seg. a lo largo de una placa plana. ¿A qué distancia del borde de ataque ocurrirá la transición?

12.6 Para un flujo de aire a presión atmosférica a 100° F, con una velocidad de 88 fps, determine la magnitud de la componente cruzada en la velocidad, v_y, en los puntos que están a 0.5, 1, 2 y 3 plg del borde de ataque. Grafique los resultados. Efectúe para un valor de $\eta = 5.0$, $f = 8.2792$.

12.7 ¿Es válida la ecuación (12-9) en una región de flujo separado? Explique la respuesta.

12.8 La presencia de una placa plana desplaza el flujo en la dirección de y, como puede apreciarse observando los resultados del problema 12.6. Este desplazamiento se mide en términos del grosor, δ,* del desplazamiento, donde:

$$\rho_\delta v_{x_\delta} \delta^* = \int_0^\infty (\rho_\delta v_{x_\delta} - \rho v_x)\, dy$$

[Flujo de la masa en condiciones fuera de la capa límite en una capa de un grosor δ^*] = [diferencia entre el flujo de masa sin capa límite y flujo de masa con capa límite]

Así que, para un flujo incompresible,

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{v_x}{v_{x_\delta}}\right) dy = 2\left(\frac{\nu x}{v_{x_\delta}}\right)^{1/2} \int_0^{\eta_{máx}} \left(1 - \frac{1}{2}\frac{df}{d\eta}\right) d\eta$$

Encuentre δ^* para la solución de Blasius, usando la información proporcionada en el problema 12.6.

12.9 Encuentre un perfil de velocidad para la capa laminar límite de la forma:

$$\frac{v_x}{v_{x_\delta}} = c_1 + c_2 y + c_3 y^2 + c_4 y^3$$

cuando el gradiente de la presión es diferente a cero.

12.10 Evalúe y compare con la solución exacta, δ, C_{fx} y C_{fL} para la capa límite laminar que se encuentra sobre una placa plana, usando el perfil de velocidad,

$$v_x = a \operatorname{sen} by$$

12.11 Determine el grosor de la capa límite en el punto anterior de estancamiento de un cilindro circular, utilizando la ecuación (10-27) para la distribución de presión alrededor de un cilindro circular y el perfil de la velocidad del problema anterior [Sugerencia: Para $\theta = -x/a$, en el punto de estancamiento, cuando se mide x a lo largo de la superficie del cilindro: $v_\theta = v_\delta = 2v_\infty x/a$.]

12.12 Se está evaporando fluido de una superficie en la cual $v_x|_{y=0} = 0$, pero $v_y|_{y=0} \neq 0$. Obtenga la relación de von Karman para el momento.

12.13 ¿Para qué velocidades del viento estará un cable de 12.7 mm de diámetro en la región de estela variable, en la figura 12.2?

12.14 Calcule la fuerza de arrastre de una antena cuya longitud es de 3 ft y diámetro promedio de 0.2 plg a una velocidad de 60 mph.

12.15 El grosor del momento, θ, se define en la forma siguiente:

$$\rho_\delta (v_{x_\delta})^2 \theta = \int_0^\infty \rho v_x (v_{x_\delta} - v_x)\, dy$$

esto es:

$$\begin{bmatrix} \text{Momento en la capa de grosor } \theta \\ \text{en las condiciones prevalecientes} \\ \text{fuera de la capa límite} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{diferencia entre el flujo de} \\ \text{momento en la capa límite} \\ \text{a velocidad de corriente libre} \\ \text{y momento real de flujo en} \\ \text{la capa límite} \end{bmatrix}$$

De manera que, para un flujo incompresible,

$$\theta = \int_0^\infty \frac{v_x}{v_{x_\delta}}\left(1 - \frac{v_x}{v_{x_\delta}}\right) dy$$

donde $v_{x\delta}$ es la velocidad, en la dirección de x, fuera de la capa límite. Determine la razón del grosor de momento, θ al grosor de la capa límite, δ, para:
(a) una velocidad lineal
(b) el perfil del problema 12.10.

12.16 El grosor del momento, θ, puede determinarse a partir de una integral simple:*

$$\frac{v_{x_\delta}\theta^2}{\nu} = \frac{0.47}{v_{x_\delta}^5}\int_0^\infty v_{x_\delta}^5\, dx$$

en un flujo laminar incompresible. Determine $\theta(x)$
(a) en una placa plana.
(b) para un cilindro circular, donde

$$v_{x_\delta} = 2v_\infty \operatorname{sen}\frac{x}{a}$$

12.17 La frecuencia del desprendimiento de los vórtices para un cilindro puede predecirse por medio de la ecuación: $f = 0.198\ (v_x/D)(1 - 19.7/\mathrm{Re})$, donde f es la frecuencia de los vórtices desprendidos desde un lado del cilindro y Re es el número de Reynolds de corriente libre. Determínese la frecuencia de desprendimiento de vórtices de un alambre de 0.25 plg de diámetro en un viento de 20 mph. ¿Para qué velocidad del viento será cero la frecuencia?

12.18 Un automóvil Ford, tiene un coeficiente de arrastre de 0.5 a velocidad de carretera, usando un área de referencia de 2.29 m^2. Determine la potencia necesaria para vencer al arrastre a una velocidad de 30 m/seg. Compare esta cifra con el caso de los vientos de frente y atrás de 6 m/seg.

12.19 El coeficiente de empuje ascendente se define como $C_L \equiv$ empuje ascendente $/\frac{1}{2}\rho v_x^2 A_r$. Si el coeficiente de empuje ascendente del automóvil del problema anterior es de 0.4, determine la fuerza de empuje a una velocidad de carretera de 100 mph.

12.20 ¿Qué diámetro tendría que tener una placa circular para tener el mismo arrastre que el automóvil del problema 12.18?

12.21 Calcule la fuerza normal ejercida sobre un letrero circular de 8 ft de diámetro durante un huracán (120 mph).

*H. Schlichting, *Boundary Layer Theory*, Fourth Edition, Mc Graw Hil Book Company, Nueva York.

13
EL EFECTO DE LA TURBULENCIA EN LA TRANSFERENCIA DE MOMENTO

El flujo turbulento es el tipo de flujo viscoso que se encuentra con mayor frecuencia; sin embargo, el tratamiento analítico del flujo turbulento no está tan desarrollado como el del flujo laminar. En este capítulo se examinará el flujo turbulento, especialmente con respecto al mecanismo de la transferencia de momento. Se presentará el papel de los datos experimentales en la formulación de un enfoque analítico de flujo turbulento y se hará una comparación de los flujos laminar y turbulento, con la ayuda de la relación integral de von Karman.

13.1 DESCRIPCION DE LA TURBULENCIA

En el flujo turbulento las variables del flujo y del fluido cambian con el tiempo. El vector velocidad instantánea, por ejemplo, diferirá del vector velocidad promedio, tanto en magnitud como en dirección. La figura 13.1 muestra el tipo de dependencia experimentado por la componente axial de la velocidad para un flujo turbulento que ocurre dentro de un tubo. En tanto que, como

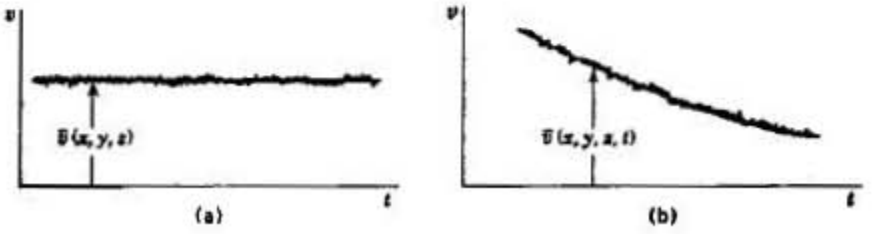


Figura 13.1 Dependencia de la velocidad con respecto al tiempo en un flujo turbulento: (a) flujo medio constante (b) flujo medio variable.

puede observarse en la figura 13.1, la velocidad tiene un valor medio constante, las pequeñas fluctuaciones aleatorias, ocurren alrededor del valor medio. Por esto, podemos expresar las variables del flujo y del fluido en términos de un valor medio y de uno fluctuante. Por ejemplo, la velocidad en la dirección de x se expresa así:

$$v_x = \bar{v}_x(x, y, z) + v_x'(x, y, z, t) \tag{13-1}$$

Aquí $\bar{v}_x(x, y, z)$ representa la velocidad en un promedio de tiempo en el punto (x, y, z):

$$\bar{v}_x \equiv \frac{1}{t_1}\int_0^{t_1} v_x(x, y, z, t)\, dt \tag{13-2}$$

donde t_1, es un tiempo muy grande en comparación con la duración de cualquiera fluctuación. El valor medio de $v_x'(x, y, z, t)$ es cero, tal como se expresa en la siguiente ecuación:

$$\overline{v_x'} = \frac{1}{t_1}\int_0^{t_1} v_x'(x, y, z, t)\, dt = 0 \tag{13-3}$$

De aquí en adelante se usará el símbolo $\bar{Q}$ para designar el promedio, con respecto al tiempo de la propiedad general, Q, de acuerdo con la ecuación $\bar{Q} = 1/t_1 \int_0^{t_1} Q(x, y, z, t)\, dt$. Mientras el valor medio de las fluctuaciones turbulentas es cero, estas fluctuaciones contribuyen al valor medio de ciertas cantidades relacionadas con el flujo. Por ejemplo, la energía cinética media por unidad de volumen es:

$$\overline{KE} = \tfrac{1}{2}\rho[\overline{(\bar{v}_x + v_x')^2} + \overline{(\bar{v}_y + v_y')^2} + \overline{(\bar{v}_z + v_z')^2}]$$

El promedio de una suma es la suma de los promedios, por lo tanto, la energía cinética se convierte en

$$\overline{KE} = \tfrac{1}{2}\rho\{(\overline{\bar{v}_x^2 + 2\bar{v}_x v_x' + v_x'^2}) + (\overline{\bar{v}_y^2 + 2\bar{v}_y v_y' + v_y'^2}) + (\overline{\bar{v}_z^2 + 2\bar{v}_z v_z' + v_z'^2})\}$$

o, como: $\overline{\bar{v}_x v_x'} = \bar{v}_x \overline{v_x'} = 0$,

$$\overline{KE} = \tfrac{1}{2}\rho(\bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2 + \bar{v}_z^2 + \overline{v_x'^2} + \overline{v_y'^2} + \overline{v_z'^2}) \tag{13-4}$$

Una fracción de la energía cinética total de un flujo turbulento está asociada con la magnitud de las fluctuaciones turbulentas. Se puede demostrar que la rcm (raíz cuadrada media) de las fluctuaciones $(\overline{v_x'^2} + \overline{v_y'^2} + \overline{v_z'^2})^{1/2}$ es una cantidad importante. El nivel o *intensidad de turbulencia* se define como:

$$I \equiv \frac{\sqrt{(\overline{v_x'^2} + \overline{v_y'^2} + \overline{v_z'^2})/3}}{v_\infty} \tag{13-5}$$

donde v_∞ es la velocidad media del flujo. La intensidad de turbulencia es un parámetro de gran importancia. Factores tales como la transición de la capa límite, la separación y la rapidez de transferencia de calor y masa, se ha encontrado que dependen de la intensidad de la turbulencia. En la prueba de modelos, la simulación de flujos turbulentos no solamente requiere de la duplicación del número de Reynolds sino también de la duplicación de la intensidad de turbulencia. Por lo tanto, se observa que la medición de la turbulencia es una necesidad en muchas aplicaciones.

Uno de los distintos métodos propuestos para la medición de la turbulencia, que es el del anemómetro de hilo caliente, ha demostrado ser muy satisfactorio. Este instrumento utiliza un alambre corto y muy delgado, colocado perpendicularmente a la componente de la velocidad que se va a medir. El alambre se calienta aproximadamente 200° F más arriba de la temperatura de corriente debida al calentamiento de la resistencia. La temperatura y, por lo tanto, la resistencia del alambre, son proporcionales a la velocidad perpendicular a la primera. Cuando fluctúa la velocidad, la temperatura del alambre cambia, la cual a su vez, altera la caída de voltaje a lo largo del alambre. El alambre, que aparece esquemáticamente en la figura 13.2, siendo un elemento del puente de Wheatstone, se puede calibrar para indicar el valor rcm de la componente de la velocidad normal a él.

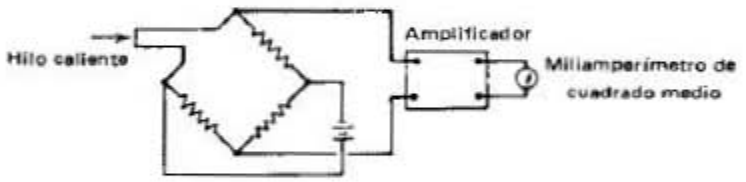


Figura 13.2 Esquema simplificado del circuito de un anemómetro de hilo caliente.

El estudio general que se ha realizado hasta ahora, ha indicado la naturaleza variable de la turbulencia. La naturaleza fluctuante de la turbulencia se presta para realizar un análisis estadístico de ésta. Ahora se atenderá al efecto de las fluctuaciones turbulentas acerca de la transferencia de momento.

13.2 ESFUERZOS CORTANTES TURBULENTOS

En el capítulo 7 se demostró que el movimiento aleatorio de las moléculas originaba una transferencia neta de momento entre dos capas adyacentes de fluido. Si los movimientos (moleculares) realizados al azar originan una transferencia de momento, parece razonable esperar que las fluctuaciones a gran escala, tales como las que están presentes en un flujo turbulento, también darán como resultado una transferencia neta de momento. Se estudiará la

transferencia de momento del flujo turbulento que aparece en la figura 13.3, usando un criterio semejante al de la fracción 7.3.

La relación entre el flujo macroscópico de momento debido a las fluctuaciones turbulentas, y el esfuerzo cortante, se pueden encontrar a partir de la expresión del volumen de control para el momento lineal:

$$\sum \mathbf{F} = \iint_{\text{c.s.}} \mathbf{v}\rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dA + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\text{c.v}} \mathbf{v}\rho\,dV \tag{5-4}$$

El flujo de momento, en la dirección de x, a través de la parte superior de la superficie de control, es:

$$\iint_{\text{top}} \mathbf{v}\rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dA = \iint_{\text{top}} v_y'\,\rho(\bar{v}_x + v_x')\,dA \tag{13-6}$$

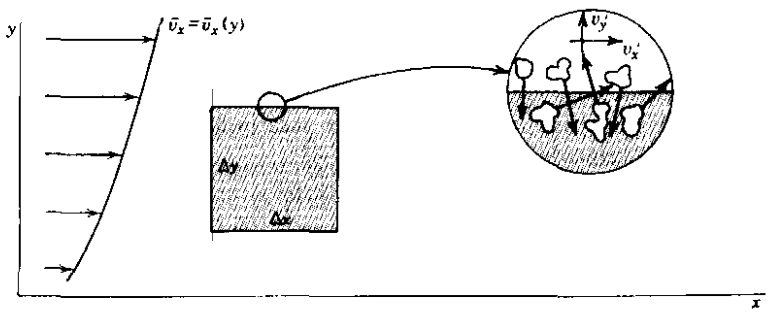


Figura 13.3 Movimiento turbulento en la superficie de un volumen de control.

Si se calcula el valor medio del flujo de momento en un periodo de tiempo, para el caso del flujo medio constante, la derivada de la ecuación (5-4) es cero, entonces:

$$\overline{\sum F_x} = \iint \overline{v_y'\rho(\bar{v}_x + v_x')}\,dA = \iint \overbrace{\overline{v_y'\rho\bar{v}_x}}^{0}\,dA + \iint \overline{\rho v_y' v_x'}\,dA \tag{13-7}$$

Se observa que la presencia de las fluctuaciones turbulentas contribuyen a un flujo promedio de momento en la dirección de x, de $\rho\overline{v_x' v_y'}$ por unidad de área. Aunque las fluctuaciones turbulentas son funciones de la posición y del tiempo, su descripción analítica no se ha logrado aún, ni siquiera para el caso más sencillo. La analogía más cercana entre el intercambio molecular de momento en el flujo laminar y el intercambio macroscópico de momento en el flujo turbulento sugiere que se tome el término $\rho\overline{v_x' v_y'}$ como esfuerzo cortante. Pasando este término al lado izquierdo de la ecuación (5-4) e incorporándolo al esfuerzo cortante debido a la transferencia molecular de momento, se observa que el esfuerzo cortante total se convierte en:

$$\tau_{yx} = \mu \frac{d\bar{v}_x}{dy} - \rho \overline{v_x' v_y'} \tag{13-8}$$

La contribución turbulenta al esfuerzo cortante se llama *esfuerzo de Reynolds*. En los flujos turbulentos, se encuentra que la magnitud del *esfuerzo de Reynolds* es mucho mayor que la contribución molecular, excepto en la proximidad de las paredes. Por lo tanto, $\rho \overline{v_x' v_y'}$ es una buena aproximación del esfuerzo cortante excepto en la proximidad inmediata de una frontera sólida.

Existe una importante diferencia entre las contribuciones molecular y turbulenta. En tanto que la contribución molecular se expresa en términos de una propiedad del fluido y una derivada del flujo promedio, la contribución turbulenta se expresa únicamente en términos de las propiedades variables del flujo. Más aún, estas propiedades del flujo no pueden expresarse en términos analíticos. En tanto que los esfuerzos de Reynolds existen para los flujos multidimensionales,* las dificultades encontradas para predecir aún el caso unidimensional han demostrado ser insalvables sin la ayuda de datos experimentales. La razón de estos problemas se puede encontrar analizando el número de ecuaciones y el número de incógnitas implicados. En la capa límite turbulenta e incompresible, por ejemplo, hay dos ecuaciones apropiadas, la de momento y la de continuidad y cuatro incógnitas $\bar{v}_x$, $\bar{v}_y$, v_x', y v_y'.

Boussinesq† fue quien trató primero de formular una teoría del esfuerzo turbulento constante. Por analogía con la forma de la relación de Newton para la viscosidad, Boussinesq introdujo un concepto que relaciona el esfuerzo cortante turbulento con la rapidez de deformación cortante. El esfuerzo cortante en el flujo laminar es: $\tau_{yx} = \mu(dv_x/dy)$, así que, por analogía, el esfuerzo de Reynolds se transforma en:

$$(\tau_{yx})_{turb} = A_t \frac{d\bar{v}_x}{dy}$$

donde A_t es la viscosidad de remolino. Los refinamientos subsecuentes han dado lugar a la *difusividad de remolino de momento*, $\epsilon_M = A_t/\rho$ por lo tanto:

$$(\tau_{yx})_{turb} = \rho \epsilon_M \frac{d\bar{v}_x}{dy} \tag{13-9}$$

Aun existen las dificultades en cuanto al tratamiento analítico; sin embargo, al igual que la difusividad de remolino, ϵ_M, es una propiedad del flujo y no del fluido. Por analogía con la viscosidad cinemática en un flujo laminar, se puede observar que las unidades de la difusividad de remolino son: L^2/t.

*La existencia de los esfuerzos de Reynolds también se puede demostrar tomando el promedio respecto al tiempo de las ecuaciones de Navier-Stokes.

†J. Bousinessq, *Mem. Pre. par div. Sav.*, XXIII, Paris (1877).

13.3 HIPOTESIS DE LA LONGITUD DE MEZCLADO

La semejanza general entre los mecanismos de transferencia de momento en el flujo turbulento y en el laminar, permiten que se haga una analogía para el esfuerzo cortante turbulento. El análogo de la trayectoria media libre en el intercambio molecular de momento, para el caso turbulento es la longitud de mezclado propuesta por Prandtl‡ en 1925. Analicemos el flujo turbulento simple que se puede apreciar en la figura 13.4.

Se supone que la fluctuación de la velocidad v_x' se debe al movimiento de una masa de fluido en la dirección de y, a través de una distancia L. Al sufrir una traslación, esta masa de fluido mantiene su velocidad media desde su punto de origen. Al llegar a cierto lugar, que se encuentra a una distancia L del punto de origen, la masa de fluido diferirá en velocidad media de la del fluido adyacente en una cantidad $\bar{v}_x|_{y-L} - \bar{v}_x|_y$. Si la masa de fluido es originada en $y+L$, la diferencia de velocidad será $\bar{v}_x|_{y+L} - \bar{v}_x|_y$. El valor instantáneo de

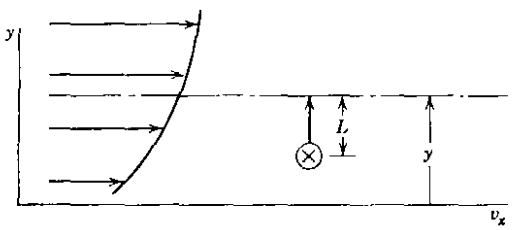


Figura 13.4 La longitud de mezclado de Prandtl.

$v_x'|_y$ será entonces $\bar{v}_x|_{y\pm L} - \bar{v}_x|_y$, donde el signo de L, depende, desde luego, del punto de origen con respecto a y. Más aún, la longitud de mezclado, aunque finita, se supone lo suficientemente pequeña para permitir que la diferencia de velocidades pueda escribirse de la manera siguiente:

$$\bar{v}_x|_{\pm L} - \bar{v}_x|_y = \pm L \frac{d\bar{v}_x}{dy}$$

y, por lo tanto,

$$v_x' = \pm L \frac{d\bar{v}_x}{dy} \tag{13-10}$$

El concepto de longitud de mezclado está relacionado con el de la trayectoria media libre de una molécula de gas. Las diferencias importantes son: su magnitud y su dependencia de las propiedades de flujo en lugar de su dependencia de las propiedades del fluido. Si se tiene a la mano una expresión para v_x', se

‡L. Prandtl *ZAMM*, 5, 136 (1925).

necesita una expresión para v_y', para determinar el esfuerzo cortante turbulento, $-\rho v_x' v_y'$.

Prandtl supuso que v_x' debía ser proporcional a v_y'. Si v_x' y v_y' fueran totalmente independientes, entonces el promedio de su producto con respecto al tiempo, sería cero. Tanto la ecuación de continuidad como los datos experimentales demuestran que existe cierto grado de proporcionalidad entre v_x' y v_y'. Prandtl expresó el promedio de tiempo $v_x' v_y'$, usando el hecho de que $v_y' \sim v_x'$, de la manera siguiente:

$$\overline{v_x' v_y'} = -(\text{constante}) L^2 \left|\frac{d\bar{v}_x}{dy}\right| \frac{d\bar{v}_x}{dy} \tag{13-11}$$

La constante representa la proporcionalidad desconocida que existe entre v_x' y v_y' así como su correlación en cuanto al tiempo promedio. El signo menos y el valor absoluto se introdujeron para que la cantidad $v_x' v_y'$ concuerde con las observaciones experimentales. La constante de la ecuación (13-11), que se desconoce, puede incorporarse a la longitud de mezclado, que también se desconoce, dando

$$\overline{v_x' v_y'} = -L^2 \left|\frac{d\bar{v}_x}{dy}\right| \frac{d\bar{v}_x}{dy} \tag{13-12}$$

Si se compara esta ecuación con la de Boussinesq, para la difusividad de remolino, se obtendrá

$$\epsilon_M = L^2 \left|\frac{d\bar{v}_x}{dy}\right| \tag{13-13}$$

A primera vista parece que se ha ganado poco al ir de la viscosidad de remolino a la longitud de mezclado. Sin embargo, existe una ventaja, que las suposiciones que se refieren a la naturaleza y variación de la longitud de mezclado se pueden hacer sobre una base más simple que las suposiciones relativas a la viscosidad de remolino.

13.4 DISTRIBUCION DE LA VELOCIDAD A PARTIR DE LA TEORIA DE LA LONGITUD DE MEZCLADO

Una de las contribuciones importantes de la teoría de longitud de mezclado es su uso para relacionar perfiles de velocidad para números grandes de Reynolds. Analice el flujo turbulento que aparece en la figura 13.4. En la vecindad de la pared se supone que la longitud de mezclado varía directamente con y y por lo tanto, $L = Ky$, donde K sigue siendo una constante adimensional que se va a determinar por medio del experimento. El esfuerzo cortante se supone que se debe únicamente a la turbulencia y que permanece constante en

la región que nos ocupa. Se supone que la velocidad $\bar{v}_x$ aumenta en la dirección de y, por lo cual, $d\bar{v}_x/dy = |d\bar{v}_x/dy|$. Se puede escribir la expresión que aparece a continuación para el esfuerzo cortante turbulento, utilizando estas suposiciones:

$$\tau_{yx} = \rho K^2 y^2 \left(\frac{d\bar{v}}{dy}\right)^2 = \tau_0 (\text{a constante})$$

o

$$\frac{d\bar{v}_x}{dy} = \frac{\sqrt{\tau_0/\rho}}{Ky}$$

La cantidad $\sqrt{\tau_0/\rho}$ tiene las unidades de la velocidad, como puede verse. La integración de la ecuación anterior da

$$\bar{v}_x = \frac{\sqrt{\tau_0/\rho}}{K} \ln y + C \tag{13-14}$$

donde C es una constante de integración que puede evaluarse haciendo $\bar{v}_x = \bar{v}_{x\,\text{máx}}$ para $y = h$, de donde:

$$\frac{\bar{v}_{x\,\max} - \bar{v}_x}{\sqrt{\tau_0/\rho}} = -\frac{1}{K}\left[\ln \frac{y}{h}\right] \tag{13-15}$$

Prandtl* y Nikuradse† calcularon la constante K a partir de datos acerca de flujos turbulentos dentro de tubos y encontraron que su valor es de 0.4. La concordancia de los datos experimentales obtenidos en flujos turbulentos dentro de tubos pulidos, con la ecuación (13-15) es bastante buena, como puede verse en la figura 13.5.

La naturaleza empírica del estudio anterior no se puede pasar por alto. Se sabe que diversas suposiciones acerca del flujo son incorrectas para los flujos dentro de los tubos, o sea que el esfuerzo cortante no es constante y que la geometría se manejó desde un punto de vista bidimensional en lugar de hacerlo desde un punto de vista de simetría axial. En vista de estas dificultades obvias, es notable que la ecuación (13-15) describa tan acertadamente el perfil de velocidad.

13.5 DISTRIBUCION UNIVERSAL DE VELOCIDADES

Para el flujo turbulento dentro de tubos pulidos, se puede tomar la ecuación (13-15) como base para un desarrollo más general. Si se recuerda que el término $\sqrt{\tau_0/\rho}$ tiene las mismas unidades que la velocidad, podrá introducirse una velocidad adimensional $\bar{v}_x/\sqrt{\tau_0/\rho}$. Si se define:

*L. Prandtl, *Proc. Intern. Congr. Appl. Mech*, 2nd Congr. Zurich (1927), 62.
†J. Nikuradse, *VDI-Forschungsheft*, 356, 1932.

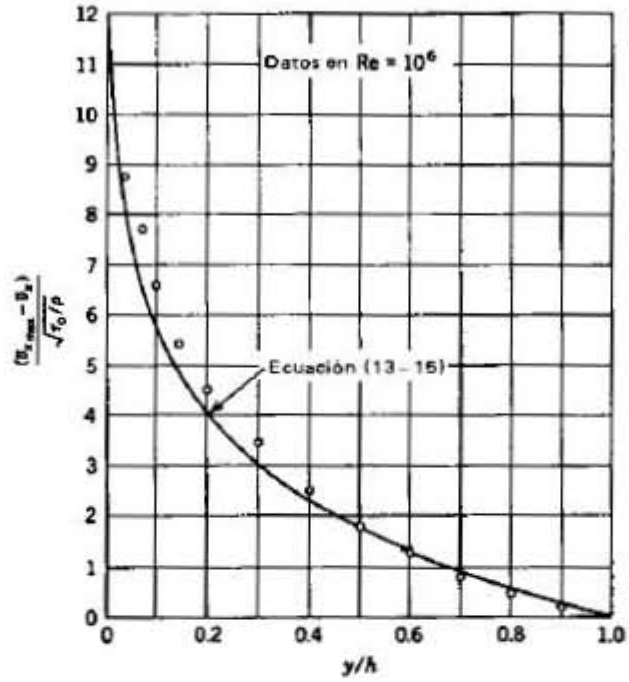


Figura 13.5 Comparación de los datos para el flujo dentro de un tubo liso, con la ecuación (13-15).

$$v^+ \equiv \frac{\bar{v}_x}{\sqrt{\tau_0/\rho}} \tag{13-16}$$

la ecuación (13-14) se puede escribir en la forma:

$$v^+ = \frac{1}{K}[\ln y] + C \tag{13-17}$$

El lado izquierdo de la ecuación (13-17) es, desde luego, adimensional, por lo tanto el lado derecho de la misma debe ser también adimensional. A este respecto, se ha encontrado la utilidad de un pseudo número de Reynolds. Al definir

$$y^+ \equiv \frac{\sqrt{\tau_0/\rho}}{\nu} y \tag{13-18}$$

se encuentra que la ecuación (13-17) se transforma en

$$v^+ = \frac{1}{K}\ln\frac{\nu y^+}{\sqrt{\tau_0/\rho}} + C = \frac{1}{K}(\ln y^+ + \ln \beta) \tag{13-19}$$

donde la constante β es adimensional.

La ecuación (13-19) indica que, para los flujos que ocurren en los tubos lisos: $v^+ = f(y^+)$ o:

$$v^+ \equiv \frac{\bar{v}_x}{\sqrt{\tau_0/\rho}} = f\left\{\ln \frac{y\sqrt{\tau_0/\rho}}{\nu}\right\} \tag{13-20}$$

La región de validez de la ecuación (13-19) se puede observar en una gráfica (ver la figura 13.6) de v^+ contra en y^+, usando los datos de Nikuradse y Reichardt.

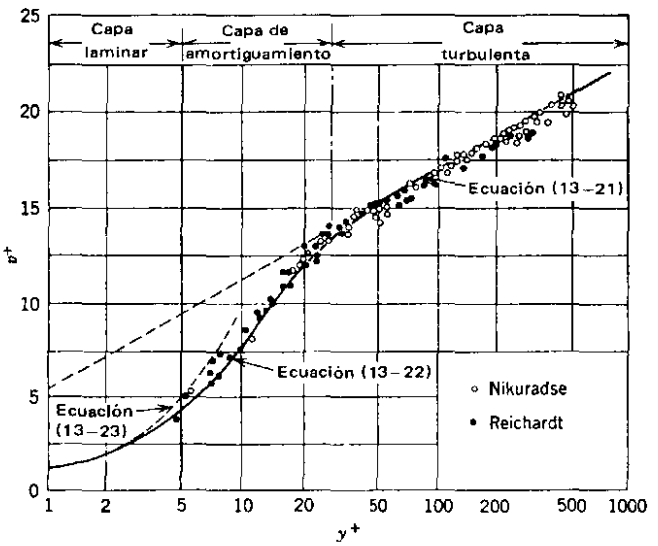


Figura 13.6 Correlación de la velocidad para el flujo que ocurre en unos tubos circulares lisos para un número de Reynolds grande. (H. Reichardt, NACA TM1047, 1943).

Se observan tres regiones diferentes: un núcleo turbulento, una capa amortiguadora y una capa sublaminar. La velocidad está correlacionada en la forma siguiente:

para el núcleo turbulento, $y^+ \geq 30$,

$$v^+ = 5.5 + 2.5 \ln y^+ \tag{13-21}$$

para la capa amortiguadora, $30 \geq y^+ \geq 5$,

$$v^+ = -3.05 + 5 \ln y^+ \tag{13-22}$$

para la subcapa laminar, $5 > y^+ > 0$,

$$v^+ = y^+ \tag{13-23}$$

Las ecuaciones (13-21) a (13-23) definen la *distribución universal de velocidades*. A causa de la naturaleza empírica de estas ecuaciones, existen, desde luego, algunas inconsistencias. Por ejemplo, el gradiente de la velocidad en el centro del tubo, que predice la ecuación (13-21) no es igual a cero. A pesar de esta y otras inconsistencias, estas ecuaciones son extremadamente útiles para describir los flujos que ocurren en el interior de los tubos pulidos.

En los tubos rugosos, se ha encontrado que la escala de rugosidad, e afecta el flujo en el núcleo turbulento, pero no en la subcapa laminar. La constante β, que aparece en la ecuación (13-19) se transforma en

$$\ln \beta = 3.4 \quad -\ln [(e\sqrt{\tau_0/\rho})/\nu]$$

para los tubos rugosos. Como el esfuerzo cortante sobre la pared aparece en la expresión vista para ln β, es importante hacer notar que la rugosidad de la pared afecta la magnitud del esfuerzo cortante en un flujo turbulento.

13.6 RELACIONES EMPIRICAS ADICIONALES PARA UN FLUJO TURBULENTO

Hay dos resultados experimentales que son de utilidad en el estudio de los flujos turbulentos. Ellos son: la relación para la ley de las potencias para los perfiles de velocidad y una relación de Blasius de flujo turbulento a esfuerzo cortante. Ambas relaciones son válidas para flujos en superficies lisas.

Para los flujos que ocurren en tubos circulares lisos, se encontró que en una gran parte de la sección transversal se puede correlacionar el perfil de la velocidad por medio de la siguiente ecuación:

$$\frac{\bar{v}_x}{\bar{v}_{x\,\text{máx}}} = \left(\frac{y}{R}\right)^{1/n} \tag{13-24}$$

donde R es el radio del tubo y n es una función del número de Reynolds que varía lentamente. Se ha encontrado que el exponente n varía de un valor de 6 para Re = 4,000 hasta un valor de 10 para Re = 3,200,000. Para números de Reynolds de 10^5 el exponente es 7. Esto conduce a la ley, frecuentemente utilizada, de la séptima potencia, $\bar{v}_x/\bar{v}_{x\,\text{máx}} = (y/R)^{1/7}$. El perfil de la ley de potencias también se ha visto que representa la distribución de velocidades en las capas límite. Para las capas límite la ley de potencias se escribe en la forma siguiente:

$$\frac{\bar{v}_x}{\bar{v}_{x\,\text{máx}}} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/n} \tag{13-25}$$

El perfil de la ley de potencias tiene dos dificultades obvias: los gradientes de velocidad en la pared, así como los de δ, son incorrectos. Esta expresión indica que el gradiente de la velocidad en la pared es infinito y que el gradiente de la velocidad en δ es diferente a cero.

A pesar de estas inconsistencias, la ley de las potencias es muy útil en conexión con la relación integral de von Karman, como veremos en la sección 13.7.

Otra relación útil es la correlación de Blasius para el esfuerzo cortante. Para números de Reynolds hasta de 10^5, de flujo en tubos y para números de Reynolds hasta de 10^7 de placa plana, el esfuerzo cortante sobre la pared, en un flujo turbulento, está dado por:

$$\tau_0 = 0.0225\rho\bar{v}_{x\,\max}^2\left(\frac{\nu}{\bar{v}_{x\,\max}y_{\max}}\right)^{1/4} \tag{13-26}$$

donde $y_{\text{máx}} = R$ en tubos y $y_{\text{máx}} = \delta$ en superficies planas.

13.7 LA CAPA LIMITE TURBULENTA EN UNA PLACA PLANA

La variación en el grosor de la capa límite para el flujo turbulento en una placa plana puede obtenerse a partir de la integral de von Karman del momento. La forma de atacar este problema de análisis turbulento difiere de la utilizada previamente. Para un flujo laminar se supuso que un polinomio simple representaba el perfil de la velocidad. En un flujo turbulento hemos visto que el perfil de la velocidad depende del esfuerzo cortante sobre la pared y que no existe ninguna función que represente adecuadamente el perfil de la velocidad en toda la región. El procedimiento que seguiremos al usar la relación integral de von Karman en un flujo turbulento será el de utilizar un perfil simple para la integración, junto con la correlación de Blasius para el flujo cortante. Para un gradiente de presión igual a cero, la relación integral de von Karman es:

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \frac{d}{dx}\int_0^{\delta} v_x(v_\infty - v_x)\,dy \tag{12-38}$$

Si se emplea la ley de la potencia en séptimo para v_x, la relación de Blasius, ecuación (13.26), para τ_0, se verá que la ecuación (12-38) se convierte en:

$$0.0225v_\infty{}^2\left(\frac{\nu}{v_\infty\delta}\right)^{1/4} = \frac{d}{dx}\int_0^{\delta} v_\infty{}^2\left\{\left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{2/7}\right\}dy \tag{13-27}$$

donde la velocidad de corrientes libre, v_∞, se escribe en lugar de $\bar{v}_{x\,\text{máx}}$. Haciendo las operaciones indicadas de diferenciación e integración, se obtiene

$$0.0225\left(\frac{\nu}{v_\infty\delta}\right)^{1/4} = \frac{7}{72}\frac{d\delta}{dx} \tag{13-28}$$

la cual, después de integrarla, se transforma en:

$$\left(\frac{\nu}{v_\infty}\right)^{1/4} x = 3.45\delta^{5/4} + C \tag{13-29}$$

Si la capa límite se supone turbulenta desde el borde de ataque, $x = 0$ (una suposición inadecuada), la ecuación anterior puede reordenarse para dar la siguiente:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{0.376}{\mathrm{Re}_x^{1/5}} \tag{13-30}$$

Se puede calcular el coeficiente de fricción superficial local a partir de la relación de Blasius para el esfuerzo cortante:

$$C_{fx} = \frac{0.0576}{Re_x^{1/5}} \tag{13-31}$$

Deben notarse varias cosas acerca de estas expresiones. Primera: están limitadas a valores de $\mathrm{Re}_x < 10^7$, en virtud de la relación de Blasius. Segunda: pueden usarse solamente para placas planas lisas, y, por último, se ha hecho una suposición muy importante, la de que la capa límite es turbulenta desde el borde de ataque. Se sabe que la capa límite es, inicialmente, laminar y que sufre la transición a turbulenta para un valor de Re_x, aproximado, de 2×10^5. Seguiremos suponiendo que la capa límite es totalmente turbulenta, por la simplicidad que permite; sin embargo, hay que reconocer que esta suposición introduce algún error en el caso de la capa límite que no es completamente turbulenta.

Se puede hacer una comparación de capas límite laminar y turbulenta, a partir de la solución de flujo laminar de Blasius y de las ecuaciones (12-38), (13-30) y (13-31). Para el mismo número de Reynolds, la capa límite turbu-

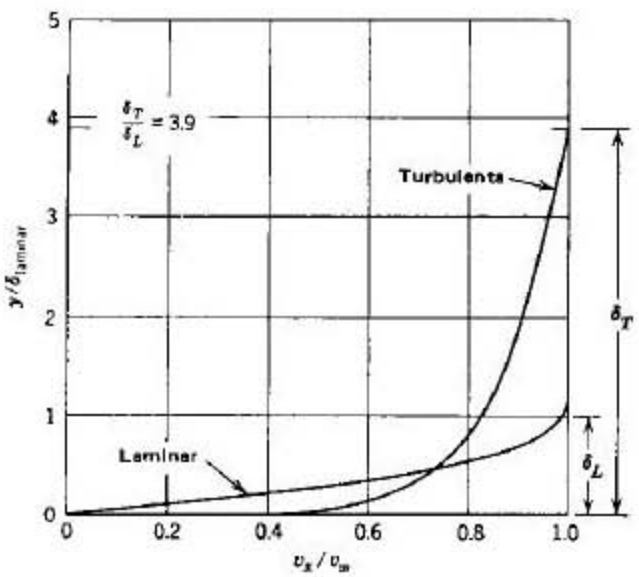


Figura 13.7 Comparación de perfiles de velocidad en las capas límite laminar y turbulenta. Número de Reynolds: $\mathrm{Re}_x = 500{,}000$.

lenta es más gruesa y está asociada con un coeficiente de fricción superficial mayor. Puede parecer que es más deseable una capa límite laminar, pero el inverso es el que generalmente es cierto. En la mayoría de los casos de interés en ingeniería se desea una capa límite turbulenta porque resiste la separación mayor que una capa límite laminar. Los perfiles de la velocidad en las capas límite laminar y turbulenta aparecen en la figura 13.7, comparados cualitativamente.

Puede verse que la capa límite turbulenta tiene una velocidad media mayor, por lo tanto mayor momento, energía que la capa límite laminar. El momento y la energía mayores permiten que la capa límite turbulenta permanezca sin separarse durante una mayor distancia en la presencia de un gradiente de presión adversa, que sería el caso para una capa límite laminar.

13.8 FACTORES QUE AFECTAN LA TRANSICION DE FLUJO LAMINAR A TURBULENTO

Los perfiles de velocidad y los mecanismos de transferencia de momento se han examinado, tanto para flujos laminares como para flujos turbulentos y se ha descubierto que son muy diferentes. También se ha visto que el flujo laminar sufre una transición a flujo turbulento para ciertos números de Reynolds.

Hasta ahora se ha expresado la ocurrencia de la transición únicamente en términos del número de Reynolds; sin embargo, existe una variedad de factores además de Re que influyen realmente en la transición. El número de Reynolds, sin embargo, sigue siendo el parámetro principal para predecir la transición.

La tabla 13.1 indica la influencia de algunos de estos factores en el número de Reynolds de transición.

Tabla 13.1 Factores que afectan al número de Reynolds de transición de flujo laminar a turbulento

Factor	*Influencia*
Gradiente de presión	Un gradiente favorable de presión retrasa la transición, uno desfavorable la apresura.
Turbulencia de corriente libre	La turbulencia de corriente libre disminuye la transición del número de Reynolds.
Rugosidad	No tiene efecto en los tubos, disminuye la transición en flujos externos.
Succión	La succión aumenta mucho al Re de transición.
Curvatura de las paredes	La curvatura convexa aumenta el Re de transición. La cóncava la disminuye.
Temperatura de las paredes	Las paredes frías aumentan el Re de transición. Las paredes calientes lo disminuyen.

13.9 CONCLUSION

En la formulación analítica de la transferencia de momento en un flujo turbulento, se ha visto que el número de incógnitas excede al número de ecuaciones. El resultado es un enfoque semi-empírico a la predicción de un flujo turbulento en el cual los datos experimentales juegan el papel principal. Solamente se ha expuesto aquí una pequeña fracción de la información experimental disponible; sin embargo, para el ingeniero, estos datos son la clave para poder lograr un diseño satisfactorio. Por lo general el estudiante experimenta una fuerte tentación de tratar los flujos como laminares a causa de la simplicidad de los cálculos. La rápida determinación del dominio del flujo, laminar o turbulento, así como el uso de datos experimentales, es de suma importancia a este respecto.

PROBLEMAS

13.1 El esfuerzo cortante turbulento en un flujo bidimensional, está dado por:

$$(\tau_{yx})_{turb} = \rho\epsilon_M \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} = -\rho\overline{v_x' v_y'}$$

Expanda v_x' y v_y' en una serie de Taylor en y, cerca de la pared con la ayuda de la ecuación de continuidad,

$$\frac{\partial v_x'}{\partial x} + \frac{\partial v_y'}{\partial y} = 0$$

demuestre que, cerca de la pared, $\epsilon_M \sim y^3 +$ términos de orden más alto en y. Compare este resultado con la teoría de longitud de mezclado.

13.2 Evalúe la derivada de la velocidad, $\partial\bar{v}_x/\partial y$, para la ley de potencias del perfil de velocidades en $y = 0$ y en $y = R$.

13.3 Determine el grosor de la capa límite en una placa plana en función del número de Reynolds y el exponente n, utilizando la relación de Blasius del esfuerzo cortante (13-26) y la ley de las potencias para el perfil de velocidad.

13.4 Grafique el grosor de la capa límite a lo largo de una placa plana para un flujo de aire a 30 m/seg., suponiendo:
(a) un flujo laminar
(b) un flujo turbulento
Indique el punto probable de transición.

13.5 Calcule la fuerza de fricción del aire, a una velocidad de 40 fps, para una placa delgada de 6 in. de ancho y 3 ft de largo, suponiendo:

a) que el flujo es turbulento
b) que el flujo es laminar
El flujo es paralelo a la dimensión de 6 in.

13.6 Encuentre una expresión para el grosor de desplazamiento, δ^*, sobre una placa plana delgada en un flujo turbulento (véase el problema 12.8).

13.7 Para un flujo totalmente desarrollado de agua dentro de un tubo liso de 0.15 m, a un gasto de 0.006 m^3/seg., determine el grosor de
a) la subcapa laminar
b) la capa amortiguadora
c) el núcleo turbulento

13.8 Trace una gráfica adimensional de los perfiles de momento y energía cinética en la capa límite para un número de Reynolds de 10^5, usando un perfil senoidal para flujo laminar y la ley de la potencia un séptimo para flujo turbulento.

13.9 Calcule el arrastre debido a la fricción ejercido sobre un ala, por medio de la siguiente idealización: tome el ala como rectangular y plana, de 7 ft por 40 ft su superficie, lisa. El ala vuela a 140 mph y a 5000 ft de altitud. Determine el arrastre, suponiendo que:
a) la capa límite es laminar
b) la capa límite es turbulenta

13.10 Compare los grosores de las capas límite y los coeficientes superficiales de fricción de una capa límite laminar y de una turbulenta sobre una placa plana, para un número de Reynolds de 10^6. Suponga que ambas se originan en el borde anterior de la placa plana.

13.11 Use el perfil de la raíz séptima y calcule la fuerza de arrastre y el grosor de la capa límite sobre una placa de 20 ft de longitud y 10 ft de ancho (para un lado) si ésta se encuentra sumergida en un flujo de agua que tiene una velocidad de 20 ft/seg. Suponga que existe un flujo turbulento en toda la longitud de la placa. ¿Cuál sería el arrastre si se pudiera mantener un flujo laminar en toda la superficie?

14
FLUJO EN CONDUCTOS CERRADOS

Muchas de las relaciones teóricas que se han estudiado en capítulos anteriores se pueden emplear en situaciones especiales tales como flujos no viscosos, incompresibles y otros semejantes. En los capítulos 12 y 13 se introdujeron algunas relaciones experimentales para flujos turbulentos en, o pasando por, superficies de geometría sencilla. En este capítulo se estudiará la aplicación del material que se ha obtenido hasta aquí, con respecto a una situación de considerable importancia en ingeniería, que es el flujo de fluidos tanto laminar como turbulento, a través de conductos cerrados.

14.1 ANALISIS DIMENSIONAL DEL FLUJO EN LOS CONDUCTOS

Se utilizará el análisis dimensional como tratamiento inicial al flujo a través de los conductos, para obtener los parámetros importantes del flujo de un fluido incompresible en un tubo recto, horizontal, circular, de sección transversal constante.

Las variables importantes, así como sus expresiones dimensionales, aparecen en la tabla que se presenta a continuación:

Variable	*Símbolo*	*Dimensión*
Caída de presión	ΔP	M/Lt^2
Velocidad	v	L/t
Diámetro del tubo	D	L
Longitud del tubo	L	L
Rugosidad del tubo	e	L
Viscosidad del fluido	μ	M/Lt
Densidad del fluido	ρ	M/L^3

Cada una de estas variables es familiar al lector, con excepción de la rugosidad del tubo, cuyo símbolo es e. La rugosidad se incluye para representar la condición de la superficie del tubo y puede pensarse en ella como en una característica de la altura de las proyecciones desde la pared del tubo, de ahí le viene la dimensión de longitud.

De acuerdo con el teorema pi de Buckingham, el número de grupos adimensionales independientes consiste en las variables, v, D y ρ, entonces los grupos a formar serán los siguientes:

$$\pi_1 = v^a D^b \rho^c \Delta P$$

$$\pi_2 = v^d D^e \rho^f L$$

$$\pi_3 = v^g D^h \rho^i e$$

y

$$\pi_4 = v^j D^k \rho^l \mu$$

Si se lleva a cabo el procedimiento descrito en el capítulo 11 para resolver los exponentes desconocidos de cada grupo, se verá que los parámetros adimensionales se convierten en:

$$\pi_1 = \frac{\Delta P}{\rho v^2}$$

$$\pi_2 = \frac{L}{D}$$

$$\pi_3 = \frac{e}{D}$$

y

$$\pi_4 = \frac{vD\rho}{\mu}$$

El primer grupo π es el número de Euler. Como la caída de presión se debe a la fricción del fluido, este parámetro se escribe, a menudo reemplazando a $\Delta P/\rho$ por gh donde h_L es la "pérdida de carga", por lo cual, π, se transforma en

$$\frac{h_L}{v^2/g}$$

El tercer grupo π, la razón de la rugosidad del tubo al diámetro del mismo es la llamada rugosidad relativa. El cuarto grupo π es el número de Reynolds, Re.

Una expresión funcional resultante del análisis dimensional se puede escribir en la forma siguiente:

$$\frac{h_L}{v^2/g} = \phi_1\left(\frac{L}{D}, \frac{e}{D}, \mathrm{Re}\right) \tag{14-1}$$

Los datos experimentales han demostrado que la pérdida de carga en flujos totalmente desarrollados es directamente proporcional a la relación L/D. Entonces, esta relación puede omitirse en la expresión funcional, dando como resultado:

$$\frac{h_L}{v^2/g} = \frac{L}{D}\phi_2\left(\frac{e}{D}, \mathrm{Re}\right) \tag{14-2}$$

La función ϕ_2, que varía con la rugosidad relativa y con el número de Reynolds, se designa por medio de f, el factor de fricción. Si se expresa la pérdida de carga por medio de la ecuación (14-2), en términos de f, se tendrá:

$$h_L = 2f_f\frac{L}{D}\frac{v^2}{g} \tag{14-3}$$

Con el factor 2 del lado derecho, la ecuación (14-3) es la relación que define al f_f, o sea el *factor de fricción de Fanning*. Otro factor de fricción de uso común es el *factor de fricción de Darcy*, f_D, definido por la ecuación (14-4)

$$h_L = f_D\frac{L}{D}\frac{v^2}{2g} \tag{14-4}$$

Resulta obvio que $f_D = 4f_f$. El estudiante debe fijarse bien en cuál factor de fricción está utilizando para calcular en forma correcta la pérdida de carga friccional, ya sea por medio de la ecuación (14-3) o de la (14-4). El factor de fricción de Fanning será el que se use exclusivamente en este texto. El estudiante puede verificar fácilmente que el factor de fricción de Fanning es el mismo que el coeficiente de fricción superficial, C_f.

Ahora nuestra tarea consiste en encontrar las relaciones convenientes para f_f a partir de la teoría y de los datos experimentales.

14.2 FACTORES DE FRICCION PARA FLUJOS LAMINAR, TURBULENTO Y DE TRANSICION TOTALMENTE DESARROLLADOS EN CONDUCTOS CIRCULARES

A. FLUJO LAMINAR

Ya se ha analizado el flujo laminar incompresible. Ya que el comportamiento de los fluidos se puede describir muy bien en este sistema, de acuerdo con la relación de Newton para la viscosidad, no tendremos dificultad para obtener una relación funcional para f_f en el caso del flujo laminar. Recuerde

que para los conductos cerrados, el flujo puede considerarse laminar para valores del número de Reynolds menores de 2,300.

En el capítulo 8 se obtuvo la ecuación de Hagen-Poiseuille para un flujo incompresible, laminar, en un conducto,

$$-\frac{dP}{dx} = 32\frac{\mu v_{\text{prom}}}{D^2} \tag{8-9}$$

Si se separan las variables y se integra esta expresión a lo largo de la longitud L, del ducto, se obtiene:

$$-\int_{P_0}^{P} dP = 32\frac{\mu v_{\text{prom}}}{D^2}\int_0^L dx$$

y

$$\Delta P = 32\frac{\mu v_{\text{prom}} L}{D^2} \tag{14-5}$$

Recuerde que la ecuación (8-9) era adecuada para el caso de un flujo totalmente desarrollado, por lo tanto, v_{prom} no varía a lo largo de la longitud del conducto.

La expresión en la pérdida friccional de carga puede obtenerse de la ecuación (14-5) y es la siguiente:

$$h_L = \frac{\Delta P}{\rho} = 32\frac{\mu v_{\text{prom}} L}{g\rho D^2} \tag{14-6}$$

Al combinar esta ecuación con la (14-3), se obtiene la relación que define a f_f:

$$h_L = 32\frac{\mu v_{\text{prom}} L}{g\rho D^2} = 2f_f\frac{L}{D}\frac{v^2}{g}$$

y, si se resuelve la ecuación para f_f se obtiene:

$$f_f = 16\frac{\mu}{Dv_{\text{prom}}\rho} = \frac{16}{\text{Re}} \tag{14-7}$$

Este resultado sencillo indica que f_f es inversamente proporcional a Re en la región del flujo laminar; el factor de fricción *no* es función de la rugosidad del tubo para valores de Re<2,300, sino que sólo varía de acuerdo con el número de Reynolds.

Este resultado se ha verificado experimentalmente y es la manifestación de los efectos viscosos en el fluido y disminuye las irregularidades del flujo causadas por las protuberancias de la superficie rugosa.

B. FLUJO TURBULENTO

En el caso del flujo turbulento en conductos cerrados la relación para f_f no se obtiene ni se expresa de manera tan sencilla como en el caso laminar. No existe ninguna relación adecuada, tal como la ley de Hagen-Poiseuille; sin embargo, se pueden usar en cierto grado, los perfiles de la velocidad estudiados en el capítulo 13, para flujos turbulentos. Todo el desarrollo estará basado en conductos circulares, por lo tanto nos interesan, principalmente, los conductos o tubos. En los flujos turbulentos debe hacerse una distinción entre tubos lisos y tubos rugosos.

Tubos lisos. El perfil de velocidad en el núcleo turbulento, se ha expresado en la forma:

$$v^+ = 5.5 + 2.5 \ln y^+ \tag{13-21}$$

donde las variables v^+ e y^+ se definen de acuerdo con las relaciones

$$v^+ \equiv \frac{\bar{v}}{\sqrt{\tau_0/\rho}} \tag{13-16}$$

y

$$y^+ \equiv \frac{\sqrt{\tau_0/\rho}}{\nu} y \tag{13-18}$$

La velocidad promedio en el núcleo turbulento, para el flujo que ocurre en un tubo de radio R, puede evaluarse a partir de la ecuación (13-21), en la forma siguiente:

$$v_{\text{prom}} = \frac{\int_0^A \bar{v}\, dA}{A}$$

$$= \frac{\sqrt{\tau_0/\rho} \int_0^R \left(2.5 \ln \left\{\frac{\sqrt{\tau_0/\rho}\, y}{\nu}\right\} + 5.5\right) 2\pi r\, dr}{\pi R^2}$$

Igualando $y = R - r$, se obtiene:

$$v_{\text{prom}} = 2.5\sqrt{\tau_0/\rho} \ln \left\{\frac{\sqrt{\tau_0/\rho}\, R}{\nu}\right\} + 1.75\sqrt{\tau_0/\rho} \tag{14-8}$$

Las funciones $\sqrt{\tau_0/\rho}$ y C_f, están relacionadas de acuerdo con la ecuación (12-2). Como C_f y f_f son equivalentes, puede escribirse:

$$\frac{v_{\text{prom}}}{\sqrt{\tau_0/\rho}} = \frac{1}{\sqrt{f_f/2}} \tag{14-9}$$

Si se sustituye la ecuación (14-9) en la (14-8) se obtiene:

$$\frac{1}{\sqrt{f_f/2}} = 2.5 \ln \left\{ \frac{R}{\nu} v_{\text{prom}} \sqrt{f_f/2} \right\} + 1.75 \tag{14-10}$$

Recordando el argumento del logaritmo de manera que tenga la misma forma que el número de Reynolds y cambiando a log 10, puede verse que la ecuación (14-10) se reduce a:

$$\frac{1}{\sqrt{f_f}} = 4.06 \log_{10}\{\text{Re}\sqrt{f_f}\} - 0.60 \tag{14-11}$$

Esta expresión nos da la relación del factor de fricción en función del número de Reynolds correspondiente a los flujos turbulentos que ocurren en tubos circulares lisos. El desarrollo anterior fue realizado por primera vez por von Karman,* Nikuradse,† quien a partir de datos experimentales obtuvo la ecuación:

$$\frac{1}{\sqrt{f_f}} = 4.0 \log_{10}\{\text{Re}\sqrt{f_f}\} - 0.40 \tag{14-12}$$

que es muy semejante a la (14-11).

Tubos rugosos. Por medio de un análisis semejante al utilizado en el caso de los tubos lisos, von Karman encontró la ecuación (14-13) aplicable a los flujos turbulentos en tubos rugosos,

$$\frac{1}{\sqrt{f_f}} = 4.06 \log_{10} \frac{D}{e} + 2.16 \tag{14-13}$$

que es muy semejante a la ecuación que obtuvo Nikuradse a partir de datos experimentales

$$\frac{1}{\sqrt{f_f}} = 4.0 \log_{10} \frac{D}{e} + 2.28 \tag{14-14}$$

Los resultados que obtuvo Nikuradse al estudiar los flujos totalmente desarrollados en los tubos, indican que las condiciones de la superficie, esto es, la rugosidad, no tienen nada que ver con la transición de flujo laminar a turbulento. Cuando el número de Reynolds crece tanto que el flujo se vuelve totalmente turbulento, debe usarse la ecuación (14-12) o la (14-14) para obtener el valor correcto de f. Estas dos ecuaciones difieren en lo siguiente: la ecuación

*T. von Karman, NACA TM 611, 1931.
† J. Nikuradse, VDI-*Forschungsheft*, 356, 1932.

(14-12) expresa a f_f como función de Re solamente y la ecuación (14-14) expresa a f_f en función de la rugosidad relativa solamente. Desde luego, la diferencia es que la primera de estas dos ecuaciones se emplea en tubos lisos y la segunda en tubos rugosos. La pregunta que surge, naturalmente es "¿qué superficie es rugosa?"

Se ha observado experimentalmente que la ecuación (14-12) describe la variación de f_f en un conjunto de valores de Re, aún para los tubos rugosos. Más allá de cierto valor de Re, esta variación difiere de la ecuación correspondiente a los tubos lisos y toma un valor constante determinado por la rugosidad del tubo, tal como lo expresa la ecuación (14-14). La región en la cual f_f varía tanto con Re como con e/D se llama *región de transición*. Colebrook* ha propuesto una ecuación empírica que describe la variación de f_f en la región de transición:

$$\frac{1}{\sqrt{f_f}} = 4 \log_{10} \frac{D}{e} + 2.28 - 4 \log_{10} \left(4.67 \frac{D/e}{\mathrm{Re}\sqrt{f_f}} + 1 \right) \qquad (14\text{-}15)$$

La ecuación (14-15) puede aplicarse a la región de transición para valores superiores al de $(D/e)/(\mathrm{Re}\sqrt{f_f}) = 0.01$. Para valores inferiores a éste, el factor de fricción es independiente del número de Reynolds y se dice que el flujo es *totalmente turbulento*.

En resumen, las expresiones que aparecen a continuación, expresan la variación del factor de fricción de acuerdo con las condiciones de superficie y flujo especificadas:

Para los flujos laminares (Re<2300)

$$f_f = \frac{16}{\mathrm{Re}} \qquad (14\text{-}7)$$

Para los flujos turbulentos (tubo liso, Re>3000),

$$\frac{1}{\sqrt{f_f}} = 4.0 \log_{10} \{\mathrm{Re}\sqrt{f_f}\} - 0.40 \qquad (14\text{-}12)$$

Para los flujos turbulentos (tubo rugoso, $(D/e)/(\mathrm{Re}\sqrt{f_f}) < 0.01$),

$$\frac{1}{\sqrt{f_f}} = 4.0 \log_{10} \frac{D}{e} + 2.28 \qquad (14\text{-}14)$$

Y para los flujos de transición

$$\frac{1}{\sqrt{f_f}} = 4 \log_{10} \frac{D}{e} + 2.28 - 4 \log_{10} \left(4.67 \frac{D/e}{\mathrm{Re}\sqrt{f_f}} + 1 \right) \qquad (14\text{-}15)$$

*C. F. Colebrook, *J. Inst. Civil Engr.* (London) II, 133 (1938-39).

14.3 FACTOR DE FRICCION Y DETERMINACION DE LA PERDIDA DE CARGA EN EL FLUJO DE UN TUBO

A. GRAFICA DEL FACTOR DE FRICCION

Moody* ha presentado ya una gráfica de un solo factor de fricción basada en las ecuaciones (14-7), (14-12), (14-14) y (14-15). La figura 14.1 es una gráfica del factor de fricción de Fanning contra el número de Reynolds en un conjunto de valores del parámetro de rugosidad e/D.

Cuando se usa la gráfica del factor de fricción, figura 14.1, es necesario conocer el valor del parámetro de rugosidad que puede utilizarse en un tubo de un tamaño y material dados. Después de que una tubería o cañería ha estado en servicio durante cierto tiempo, su rugosidad puede cambiar considerablemente, haciendo muy difícil la determinación de e/D. Moody hizo una gráfica, que se encuentra reproducida en la figura 14.2 por medio de la cual se puede determinar el valor de e/D para un tamaño dado en tubería o cañería de un material particular.

La combinación de estas dos gráficas permite la evaluación de la pérdida friccional de carga que sufre un tubo de longitud L y diámetro D, por medio de la relación

$$h_L = 2f_f \frac{L}{D} \frac{v^2}{g} \tag{14-3}$$

B. PERDIDA DE CARGA DEBIDA A ACCESORIOS

La pérdida de carga debida a la fricción, calculada a partir de la ecuación (14-3) es solamente una parte de la pérdida total de carga que debe vencerse en las tuberías y otros conductos que transporten fluidos. Pueden ocurrir otras pérdidas debido a la presencia de válvulas, codos y otros accesorios que impliquen un cambio, ya sea de dirección del flujo o de tamaño del conducto. las pérdidas de carga debidas a estos accesorios son funciones de la geometría del accesorio, del número de Reynolds y de la rugosidad. Como se ha encontrado que las pérdidas en los accesorios, en primera aproximación, son independientes del número de Reynolds, se puede calcular la pérdida de carga de la siguiente manera:

$$h_L = \frac{\Delta P}{\rho} = K \frac{v^2}{2g} \tag{14-16}$$

donde K es un coeficiente que depende del accesorio.

Un método equivalente de determinación de la pérdida de carga en los accesorios es el de introducir una *longitud equivalente*, L_{eq}, tal que

$$h_L = 2f_f \frac{L_{eq}}{D} \frac{v^2}{g} \tag{14-17}$$

*L. F. Moody, *Trans.* ASME, 66, 671 (1944).

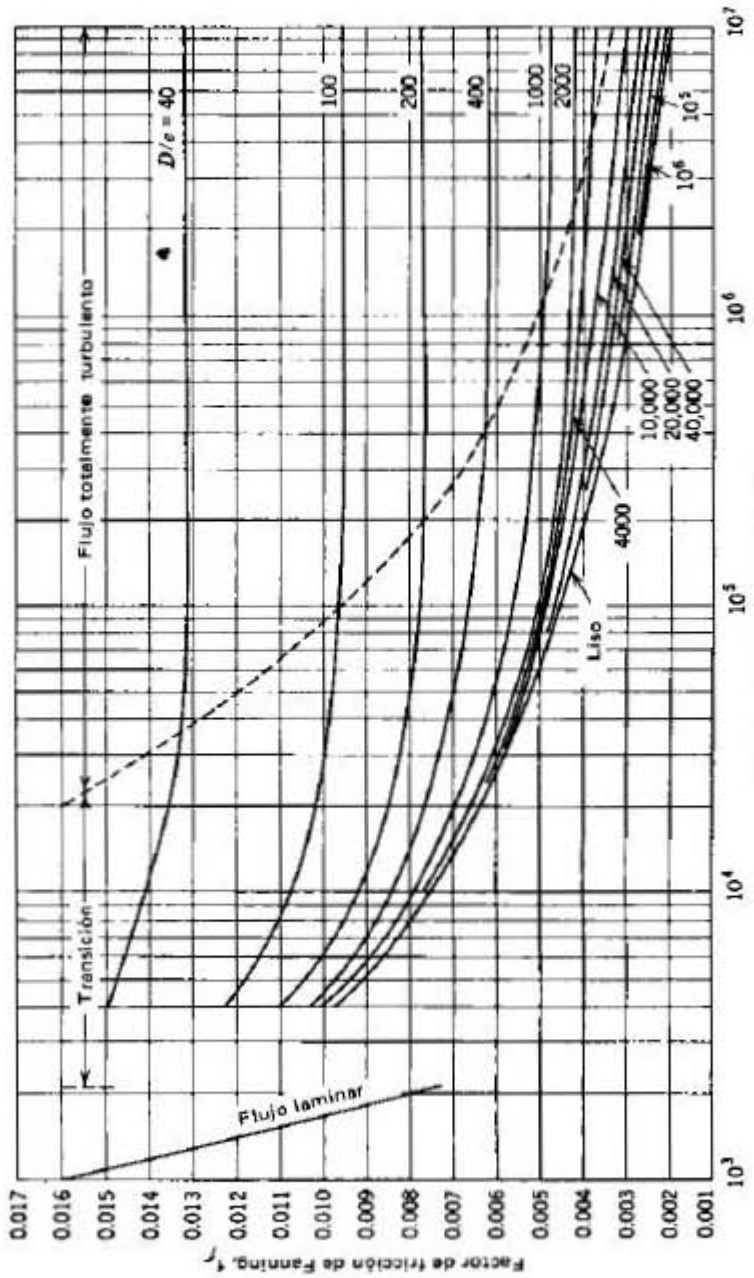


Figura 14.1 El factor de fricción de Fanning en función de Re y D/e.

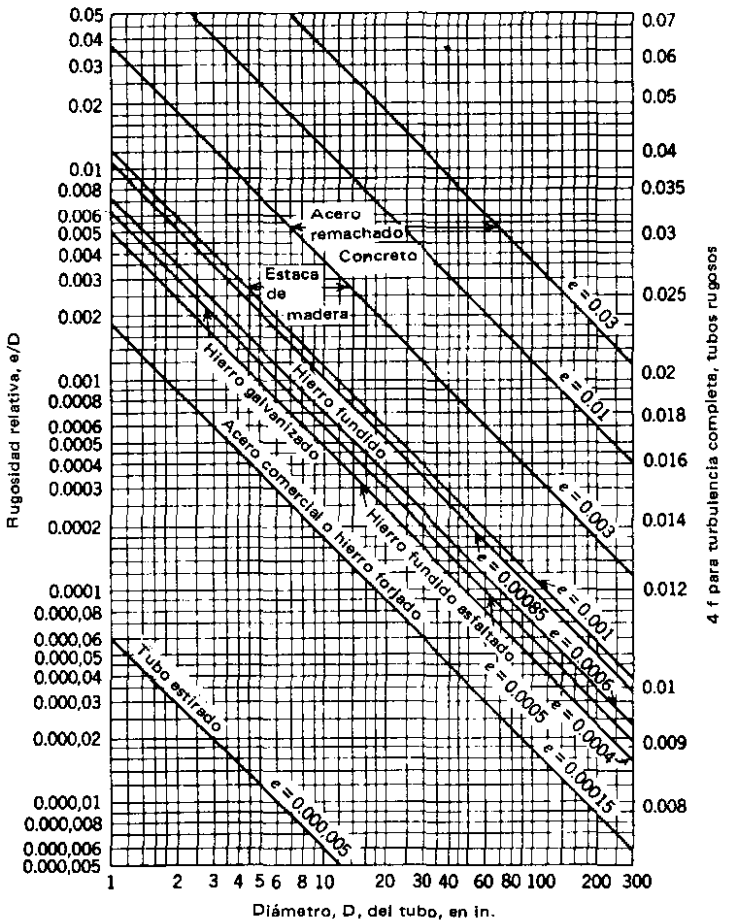


Figura 14.2 Parámetros de rugosidad de conductos y tubos (DE L. F. Moddy, *Trans.* ASME, (1944). Los valores de e están dados en ft).

donde L_{eq} es la longitud del tubo que produce una pérdida de carga equivalente a la que ocurre en un accesorio particular. Se observa que la ecuación (14-17) está en la misma forma que la (14-3), por lo cual, la pérdida total de carga que sufre un sistema de tubos se puede determinar sumando las longitudes equivalentes de los accesorios a la longitud del tubo para obtener la longitud efectiva total del tubo.

Al comparar las ecuaciones (14-16) y (14-17) se observa que la constante K debe ser igual a $4\, f_f L_{eq}/D$. Aunque la ecuación (14-17) aparentemente depende del número de Reynolds a causa de la apariencia del factor de Fanning de fricción, no depende de él. La suposición que se hace en las ecuaciones (14-16) y (14-17) es que el número de Reynolds es lo suficientemente grande

como para que el flujo sea totalmente turbulento. Entonces, el coeficiente de fricción para un accesorio dado depende solamente de la rugosidad del accesorio. En la tabla 14.1 aparecen los valores típicos de K y L_{eq}/D.

Tabla 14.1 Factores de pérdidas debidas a la fricción, de varios accesorios para tubos

Accesorio	K	L_{eq}/D
Válvula del globo, totalmente abierta	7.5	350
Válvula de cuña, totalmente abierta	3.8	170
Válvula de compuerta, totalmente abierta	0.15	7
Válvula de compuerta, abierta 3/4	0.85	40
Válvula de compuerta, abierta 1/2	4.4	200
Válvula de compuerta, abierta 1/4	20	900
Codo a 90°, estándar	0.7	32
Codo a 90°, de radio corto	0.9	41
Codo a 90°, de radio largo	0.4	20
Codo a 45°, estándar	0.35	15
Tubo en T, conducto con salida lateral	1.5	67
Tubo en T, conducto recto	0.4	20
	1.6	75

Recuerde que la pérdida de carga debida a una expansión ya se calculó en el capítulo 6 y su resultado aparece en la ecuación (6-13).

C. DIAMETRO EQUIVALENTE

Las ecuaciones (14-16) y (14-17) se basan en un conducto circular de flujo. Estas ecuaciones pueden usarse para calcular la pérdida de carga en un conducto cerrado de cualquier configuración si se utiliza un "diámetro equivalente" para un conducto no circular de flujo. El diámetro equivalente se calcula de acuerdo con la fórmula:

$$D_{eq} = 4 \frac{\text{sección transversal del área de flujo}}{\text{perímetro transversal}} \tag{14-18}$$

La razón de la sección transversal del área al perímetro mojado se llama radio hidráulico.

El lector puede verificar que D_{eq} corresponde a D en un conducto circular de flujo. A menudo, en los procesos de transferencia aparece un tipo de conducto no circular de flujo, que es el área anular que se encuentra entre dos tubos concéntricos. El diámetro equivalente para esta configuración se calcula de la manera siguiente:

$$\text{Area de la sección transversal} = \frac{\pi}{4}(D_o^2 - D_i^2)$$

$$\text{Perímetro mojado} = \pi(D_0 + D_i)$$

$$D_{eq} = 4\frac{\pi/4}{\pi}\frac{(D_0^2 - D_i^2)}{(D_0 + D_i)} = D_0 - D_i \tag{14-19}$$

Este valor de D_{eq} puede usarse ahora, para calcular el número de Reynolds, el factor de fricción y la pérdida de carga debida a la fricción, utilizando los métodos y las relaciones que se estudiaron anteriormente para los conductos cerrados.

14.4 ANALISIS DEL FLUJO EN UN TUBO

La aplicación de las ecuaciones y métodos estudiados en las secciones anteriores es común en la ingeniería relacionada con sistemas de tubos. Estos análisis siempre son directos pero varían en su complejidad. Los tres problemas siguientes, que se presentan a manera de ejemplo, son típicos aunque de ninguna manera incluyen todos los tipos de problemas que pueden encontrarse en la práctica de la ingeniería.

EJEMPLO 1

Fluye agua a 59° F a través de la sección recta de un tubo de 6 in de diámetro de hierro colado, con una velocidad de 4 fps. El tubo tiene una longitud de 120 ft y existe un aumento de altura de 2 ft entre la entrada y la salida del tubo.

Encuentre la potencia requerida para producir este gasto en las condiciones especificadas anteriormente.

En este caso el volumen de control es el tubo, junto con el agua que contiene. Si se aplica a este volumen de control la ecuación de la energía, se obtiene

$$\frac{\delta Q}{dt} - \frac{\delta W_s}{dt} - \frac{\delta W_\mu}{dt} = \iint_{c.s.} \rho\left(e + \frac{P}{\rho}\right)(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dA + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{c.v.} \rho e\,dV \tag{6-10}$$

Si se calcula cada término se obtiene:

$$\frac{\delta Q}{dt} = 0 \qquad \frac{\delta W_s}{dt} = \dot{W}$$

$$\iint_{c.s.} \rho\left(e + \frac{P}{\rho}\right)(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dA = \rho A v_{avg}\left(\frac{v_2^2}{2} + gy_2 + \frac{P_2}{\rho} + u_2 - \frac{v_1^2}{2} - gy_1 - \frac{P_1}{\rho} - u_1\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{c.v.} \rho e\,dV = 0$$

y

$$\frac{\delta W_\mu}{dt} = 0$$

La forma correcta de la ecuación de la energía escrita sobre la base de la masa unitaria, se ha convertido, ahora, en:

$$w = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2} + g(y_1 - y_2) + \frac{P_1 - P_2}{\rho} + u_1 - u_2$$

y como el cambio de energía interna puede escribirse: gh_L, que es la pérdida de carga debida a la fricción, la expresión que corresponde a w se transforma en

$$w = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2} + g(y_1 - y_2) + \frac{P_1 - P_2}{\rho} - h_L g$$

Supongamos que el fluido que se encuentra en ambos extremos del volumen de control está a la presión atmosférica, $(P_1 - P_2)/\rho = 0$, y que el tubo tiene una sección transversal constante $(v_1^2 - v_2^2)/2 = 0$, se obtiene, para w,

$$w = g(y_1 - y_2) - h_L g$$

y calculando h_L se tiene:

$$\mathrm{Re} = \frac{(\frac{1}{2})(4)}{1.22 \times 10^{-5}} = 164\,000$$

$$\frac{e}{D} = 0.0017 \quad \text{(de la figura 14.2)}$$

$$f_f = 0.006 \quad \text{(de la figura 14.1)}$$

resultando:

$$h_L = \frac{2(0.006)(120\ \mathrm{ft})(16\ \mathrm{ft^2/s^2})}{(0.5\ \mathrm{ft})(32.2\ \mathrm{ft/s^2})} = 1.432\ \mathrm{ft}$$

Entonces, la potencia requerida para producir las condiciones especificadas de flujo es:

$$\frac{\delta w}{dt} = \frac{-g((-2\ \mathrm{ft}) - 1.432\ \mathrm{ft})}{550\ \mathrm{ft\ lb_f/hp\text{-}s}} \left[\frac{62.3\ \mathrm{lb_m/ft^3}}{32.2\ \mathrm{lb_m\ ft/s^2\ lb_f}} \left(\frac{\pi}{4}\right) \left(\frac{1}{2}\ \mathrm{ft}\right)^2 \left(4\ \frac{\mathrm{ft}}{\mathrm{s}}\right) \right]$$

$$= 0.306\ \mathrm{hp}$$

EJEMPLO 2

Se necesita un cambiador de calor que pueda operar con 0.0567 m^3/s de agua que pase a través de un tubo liso cuya longitud equivalente sea de 122 m. La caída total de presión es de 103,000 Pa. ¿Qué tamaño de tubo se necesita?

De nuevo, aplicando la ecuación (6-10) se observa que una evaluación hecha término por término, da:

$$\frac{\delta Q}{dt} = 0 \qquad \frac{\delta W_s}{dt} = 0 \qquad \frac{\delta W_\mu}{dt} = 0$$

$$\iint_{c.s.} \rho \left(e + \frac{P}{\rho}\right)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, dA = \rho A v_{avg} \left(\frac{v_2^2}{2} + gy_2 + \frac{P_2}{\rho} + u_2 - \frac{v_1^2}{2} - gy_1 - \frac{P_1}{\rho} - u_1 \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{c.v.} \rho e\, dV = 0$$

y la ecuación pertinente en el problema que estamos resolviendo es:

$$0 = \frac{P_2 - P_1}{\rho} + h_L g$$

La cantidad deseada, que es el diámetro, está incluida en el término correspondiente a la pérdida de carga pero no puede despejarse directamente, ya que el factor de fricción también depende de D. Si se insertan valores numéricos a la ecuación anterior y se resuelve ésta, se obtendrá:

$$0 = -\frac{103\,000\ \text{Pa}}{1000\ \text{kg/m}^3} + 2f_f\left(\frac{0.0567}{\pi D^2/4}\right)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \cdot \frac{122}{D}\,\frac{\text{m}}{\text{m}}\,\frac{g}{g}$$

ó

$$0 = -103 + 1.27\frac{f_f}{D^5}$$

La solución a este problema debe obtenerse por el método de prueba y error. El siguiente procedimiento es uno de los posibles:

1. Suponga un valor de f_f.
2. Usando este valor de f_f, resuelva la ecuación anterior para D.
3. Calcule Re con esta D.
4. Verifique el supuesto valor de f_f utilizando e/D y la Re que se calculó.
5. Repita este procedimiento hasta que concuerden los valores supuesto y calculado del factor de fricción.

Si, en el presente problema, se llevan a cabo los pasos anteriores, el resultado será 0.132 m (5.2 pulg).

EJEMPLO 3

Un cambiador de calor, ya existente, tiene una sección transversal como la de la figura 14.3, con nueve tubos de 1 in de diámetro exterior, dentro de un tubo de 5 in de diámetro interior. ¿Qué rapidez de flujo de agua se puede lograr del lado de la coraza de esta unidad si hay una caída de presión de 3 psi, en una longitud de 5 ft del cambiador de calor?

Si se lleva a cabo un análisis de la ecuación de la energía utilizando la ecuación (6-10), deberán seguirse los mismos pasos que en el ejemplo 14.2, dando como resultado la ecuación principal:

$$0 = \frac{P_2 - P_1}{\rho} + h_L g$$

El diámetro equivalente de la coraza, se calcula de la siguiente manera:

$$\text{área de flujo} = \frac{\pi}{4}(25 - 9) = 4\pi\ \text{in.}^2$$

$$\text{perímetro mojado} = \pi(5 + 9) = 14\pi\ \text{in.}$$

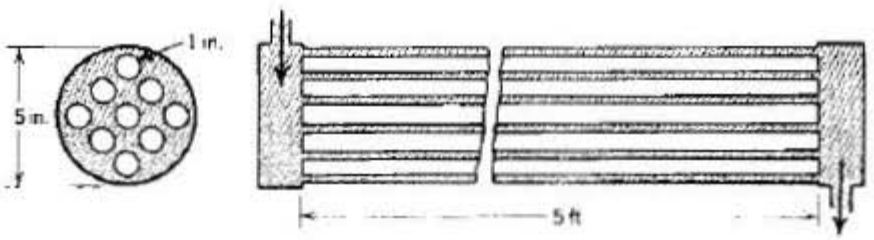


Figura 14.3 Configuración de un cambiador de calor de tubo y coraza.

Por lo cual:

$$D_{eq} = 4\frac{4\pi}{14\pi} = 1.142 \text{ in.}$$

Si se sustituyen valores numéricos adecuados a este problema en la ecuación de energía, ésta se transforma en:

$$0 = -\frac{3 \text{ lb}_f/\text{in.}^2(144 \text{ in.}^2/\text{ft}^2)}{62.4 \text{ lb}_m/\text{ft}^3} + 2f_f v_{\text{prom}}^2 \text{ ft}^2/\text{s}^2 \frac{10 \text{ ft}}{(1.142/12) \text{ ft}} \frac{\text{s}^2 \text{ lb}_f}{32.2 \text{ lb}_m \text{ ft}} \frac{32.2 \text{ ft}}{\text{s}^2}$$

ó

$$0 = -6.93 + 6.52 f_f v_{\text{prom}}^2$$

Como f_f no se puede determinar sin tener un valor de Re, que es función de v_{prom} puede emplearse algún método de prueba sencillo y error como el siguiente:

1. Escoja un valor de f_f.
2. Calcule v_{prom} a partir de la expresión anterior.
3. Calcule Re a partir de este valor de v_{prom}.
4. Verifique el valor escogido de f_f, usando la figura 14.1.
5. Si el valor escogido de f_f no concuerda con el calculado, repita el procedimiento hasta que concuerden.

Si se emplea este método se encontrará que la velocidad es de 15.9 fps y el gasto es de 83.3 ft^3/min (0.0393 m/seg.).

Note que en cada uno de los dos últimos ejemplos en los que se utilizó el método de prueba y error, inicialmente se escogió f_f. Este, desde luego, no es el único método de resolver estos problemas, sin embargo, en ambos casos, se puede escoger el valor de f_f con mayor aproximación de la que se podría lograr para D o v_{prom}.

14.5 FACTORES DE FRICCION CORRESPONDIENTES A UN FLUJO A LA ENTRADA DE UN CONDUCTO CIRCULAR

El desarrollo y los problemas de la sección anterior se han relacionado con las condiciones de flujo que no cambian a lo largo del eje de flujo. A menudo se encuentra esta condición y los métodos anteriormente descritos resultan adecuados para evaluar los parámetros importantes del flujo.

En muchos sistemas reales de flujo esta condición nunca ocurre. Se forma una capa límite en la superficie del tubo y su grosor aumenta en forma semejante a aquella en que aumenta la capa límite en la placa plana que se describe en el capítulo 12. La acumulación de la capa límite en el flujo a través de un tubo, puede verse en la figura 14.4.

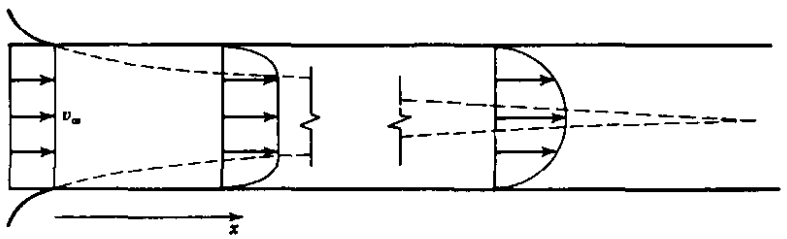


Figura 14.4 Acumulación de capa límite en un tubo.

Se forma una capa límite en la superficie interior, la cual ocupa una cantidad mayor del área de flujo cuando aumenta el valor de x, que es la distancia medida a partir de la entrada, en dirección del flujo. Al llegar x a un valor determinado, la capa límite ocupa toda el área de flujo. El perfil de la velocidad no cambiará en la dirección del flujo, a partir de este punto y el flujo se transformará en *totalmente desarrollado*. La distancia, en la dirección del flujo, desde la entrada del tubo hasta donde el flujo se transforma en flujo totalmente desarrollado, se llama longitud de entrada, y para ella se utiliza el símbolo L_e. Observe que la velocidad del flujo fuera de la capa límite aumenta con x, lo cual requiere para satisfacer la condición de continuidad. En el centro del tubo, la velocidad llega finalmente a un cierto valor de 2 v_∞ correspondiente a un flujo laminar totalmente desarrollado.

La longitud de entrada que se requiere para que se forme en un flujo laminar un perfil de velocidad totalmente desarrollado, la ha expresado Langhaar* en la forma siguiente:

$$\frac{L_e}{D} = 0.0575 \text{ Re} \tag{14-20}$$

en la cual D representa el diámetro interior del tubo.

Esta relación, obtenida de manera analítica, está de acuerdo con el experimento.

No existe ninguna relación para predecir la longitud de entrada en un perfil totalmente desarrollado de velocidad turbulenta. Un factor adicional que afecta la longitud de entrada en el flujo turbulento es la naturaleza misma

*H. L. Langhaar, *Trans.* ASME, 64, A-55 (1942).

de la entrada. Se sugiere al lector que estudie la obra de Deissler† acerca de perfiles de velocidad turbulenta obtenidos experimentalmente en la región de entrada de los tubos circulares. Después de una distancia mínima, a partir de la entrada, equivalente a 50 diámetros en la dirección de flujo, la conclusión general de los resultados de Dreissler y otros es que el perfil de la velocidad turbulenta se transforma en totalmente desarrollado.

El lector debe darse cuenta de que la longitud de entrada correspondiente al perfil de velocidad, difiere considerablemente del gradiente de la velocidad en la pared. Como el factor de fricción está en función de dv/dy en la superficie del tubo, también nos interesa esta longitud inicial.

Existen dos condiciones en la región de entrada que hacen que el factor de fricción sea mayor que cuando el flujo está totalmente desarrollado. La primera de estas condiciones es el enorme gradiente de velocidad en la pared, justamente a la entrada. Este gradiente disminuye en la dirección del flujo, tornándose constante antes de que el perfil de la velocidad se transforme en totalmente desarrollado. El otro factor es la existencia de un "núcleo" de fluido fuera de la capa viscosa, cuya velocidad debe aumentar de acuerdo con la condición de continuidad. El fluido que se encuentra en el núcleo está, por consiguiente, siendo acelerado, produciendo así una fuerza adicional de arrastre cuyo efecto está incorporado al factor de fricción.

El factor de fricción correspondiente al flujo laminar en la entrada a un tubo fue estudiado por Langhaar.* Sus resultados indicaron que el factor de fricción más alto ocurría en la vecindad de la entrada, para luego decrecer en forma continua hasta llegar al valor del flujo totalmente desarrollado. La figura 14.5 es una representación cualitativa de esta variación. La tabla 14.2 muestra los resultados que Langhaar encontró del factor de fricción promedio entre la entrada y un punto a una distancia x de la misma.

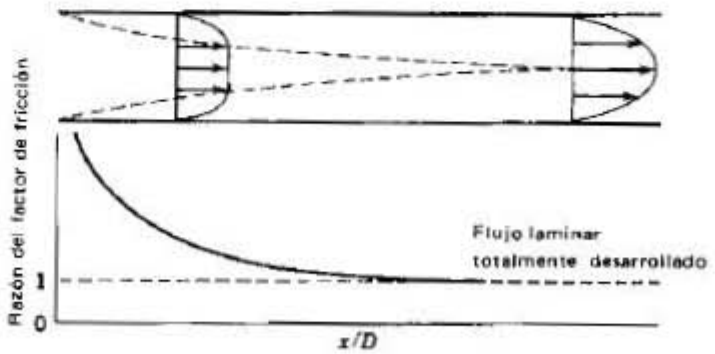


Figura 14.5 Perfil de velocidad y variación del factor de fricción del flujo laminar en la región de entrada de un tubo.

† R. G. Deissler, NACA TN 2138 (1950).
*Anteriormente citado.

El factor de fricción, así como el perfil de velocidad correspondientes a un flujo turbulento existente en la región de entrada, son difíciles de expresar. Deissler† analizó esta situación, presentando sus resultados en forma gráfica.

Aun para velocidades de corriente libre muy altas habrá una porción de la entrada sobre la cual la capa límite será laminar. La configuración de entrada así como el número de Reynolds, afectan la longitud del tubo sobre la cual existe la capa laminar antes de transformarse en turbulenta. En la figura 14.6 aparece una gráfica de factores de fricción de flujo turbulento en la región de entrada semejante a la de la figura 14.5. La descripción anterior de la región de entrada se ha hecho en forma cualitativa. Si se desea analizar los resultados de Deissler, que consisten en un estudio analítico exacto de un sistema incluyendo a los fenómenos de longitud de entrada, puede utilizarse la figura 14.7, donde aparecen dichos resultados.

Tabla 14.2 Factor de fricción promedio de flujo laminar a la entrada de un tubo circular

$\frac{x/D}{\mathrm{Re}}$	$f_f\left(\frac{x}{D}\right)$
0.000205	0.0530
0.000830	0.0965
0.001805	0.1413
0.003575	0.2075
0.00535	0.2605
0.00838	0.340
0.01373	0.461
0.01788	0.547
0.02368	0.659
0.0341	0.845
0.0449	1.028
0.0620	1.308
0.0760	1.538

Es importante percatarse de que en muchas situaciones el flujo nunca es totalmente desarrollado, por lo que el factor de fricción será más alto que el predicho a partir de las ecuaciones correspondientes al flujo totalmente desarrollado o a la gráfica de factores de fricción.

† R. G. Deissler, NACA TN 3016 (1953).

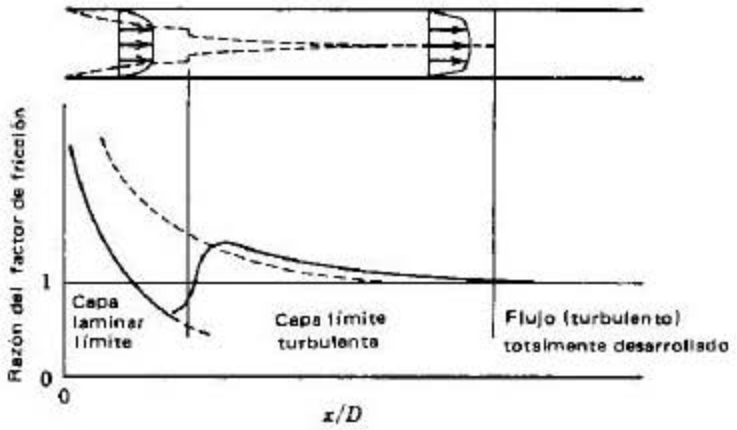


Figura 14.6 Perfil de velocidad y variación del factor de fricción en el flujo turbulento de la región cercana a la entrada de un tubo.

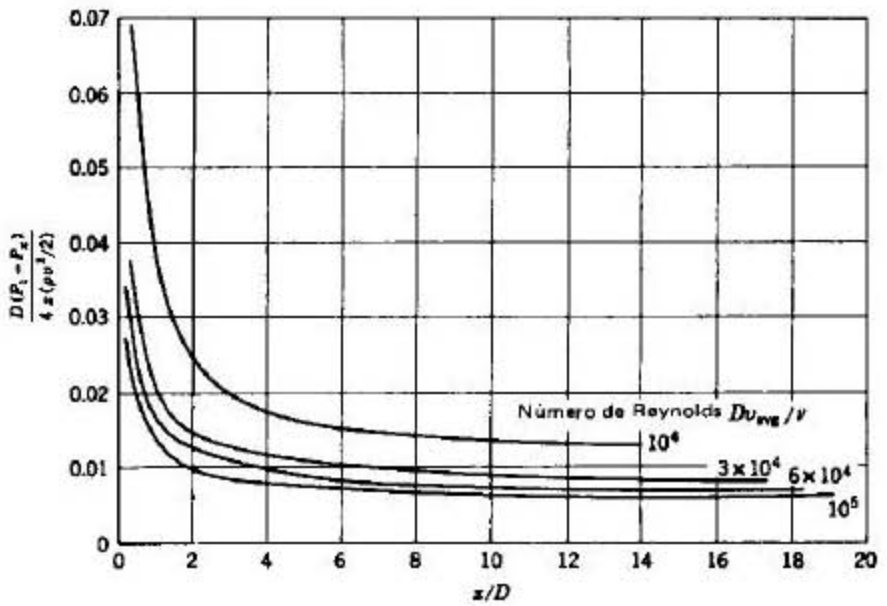


Figura 14.7 Caída de presión estática debida a la fricción y al cambio de momento a la entrada de un tubo liso, horizontal y circular (Deissler).

14.6 CONCLUSION

La información, así como las técnicas presentadas en este capítulo, constan de aplicaciones de la teoría estudiadas en capítulos anteriores y basadas en datos experimentales.

Los siguientes capítulos estarán dedicados a la transferencia de calor y masa. Hasta aquí se ha estudiado un tipo específico de transferencia, la transferencia de momento. El lector encontrará que puede aplicar una gran parte de la información aprendida acerca de la transferencia de momento, a las áreas similares de la transferencia de calor y masa.

PROBLEMAS

14.1 Un aceite, cuya viscosidad cinemática es de 0.08×10^{-3} ft^2/seg, y una densidad de 57 lb_m/ft^3 fluye a través de un tubo horizontal de 0.24 in de diámetro con una rapidez de 10 gal/h. Determine la caída de presión en 50 ft de tubo.

14.2 Una tubería de lubricación tiene un diámetro interior de 0.1 in y una longitud de 30 in. Si la caída de presión es de 15 psi, determine el gasto del aceite. Utilice las propiedades citadas en el problema 14.1.

14.3 Un oleoducto de 230 km de longitud une a dos estaciones de bombeo. Si se van a bombear 0.56 m^3/seg. a través de un conducto de 0.62 m de diámetro, la estación de descarga se encuentra a 250 m más abajo de la estación aguas arriba y debe mantenerse la presión de descarga a 300,000 Pa. Determine la potencia requerida para bombear el petróleo. Este último tiene una viscosidad cinemática de 4.5×10^{-6} m^2/seg. y una densidad de 810 kg/m^3. El oleoducto es de acero comercial. La presión de entrada es la atmosférica.

14.4 La caída de presión en una sección de tubería se determina a partir de pruebas, utilizando agua. Una caída de presión de 13 psi se obtiene para un gasto másico de 28.3 lb_m/seg. Si el flujo es totalmente turbulento, ¿Cuál será la caída de presión cuando fluya a través del tubo oxígeno líquido ($\rho = 70$ lb/ft^3) con un gasto de 35 lb_m/seg?

14.5 Se bombea petróleo, cuya viscosidad cinemática es de 6.7×10^{-6} m^2/seg. y cuya densidad es de 22.7 kg/m^3, a través de un tubo de 0.71 m de diámetro con una velocidad promedio de 1.1 m/seg. La rugosidad del tubo equivale a la del tubo de "acero comercial". Si las estaciones de bombeo se encuentran a 320 km. una de otra, encuentre la pérdida de carga (en metros de aceite) entre las estaciones de bombeo, así como la potencia requerida.

14.6 La llave del agua fría de una casa se alimenta del agua que llega a través del sistema simplificado siguiente de tubería:

a) Un tubo galvanizado de 150 ft de longitud y 3/4 in de diámetro inferior, que conecta al tubo principal con la base del lavabo.

b) Cuatro codos estándar a 90°

c) Una válvula de ángulo abierto (sin obstrucción).

d) La llave. Suponga que ésta está compuesta de 2 partes:

1) una válvula convencional de globo y
2) una boquilla cuya sección transversal sea de 0.10 in^2.

La presión en la tubería principal es de 60 psig (virtualmente independiente del flujo) y la velocidad ahí es despreciable. Encuentre el gasto máximo de descarga de la llave. Como primer intento, suponga que el tubo tiene una $f_f = 0.007$. Haga caso omiso de los cambios de elevación a lo largo del sistema.

14.7 Fluye agua con un gasto de 118 ft^3/min a través de un tubo horizontal liso de 250 ft de longitud. La caída de presión es de 4.55 psi. Determine el diámetro del tubo.

14.8 Determine el gasto a través de una válvula de paso con una presión agua arriba de 236 kPa cuando la válvula está:

a) abierta
b) cerrada 1/4
c) cerrada 1/2
d) cerrada 3/4

14.9 Calcule la presión de entrada a una bomba que está a 3 ft sobre el nivel del sumidero. La tubería tiene 6 in de diámetro, 6 ft de longitud y está hecha de acero comercial. El gasto a través de la bomba es de 500 gal/min. Use la suposición (errónea) de que el flujo es desarrollado.

14.10 El tubo del problema 6.20 es de 35 mm. de diámetro y está hecho de acero comercial. Determine el gasto.

14.11 El sifón del problema 6.17 está hecho con una manguera lisa de hule, y tiene 23 ft. de longitud. Determine el gasto y la presión en el punto B.

14.12 Un conducto rectangular galvanizado de 8 in por lado tiene 25 ft de longitud y transporta 600 ft^3/min de aire estándar. Determine la caída de presión en pulgadas de agua.

14.13 Se necesita un conducto de hierro colado de 2 millas de longitud para transportar 3 millones de galones de agua al día. La salida del conducto se encuentra 175 pies más arriba que la entrada. Los costos de tres tamaños de tubos colocados, son los siguientes:

10 in de diámetro $11.40 el ft.
12 in de diámetro $14.70 el ft.
14 in de diámetro $16.80 el ft.

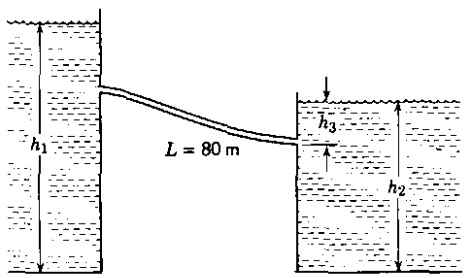
Los costos de energía se calcula que son de $0.024 por kilowatt hora durante los 20 años de vida del conducto. Si puede financiarse el conducto con un interés anual de 6.5%, ¿cuál de los tres diferentes diámetros de tubo será el más económico? La eficiencia de la bomba es del 80% y la temperatura del agua que entra se espera que se mantenga constante, a 42° F.

14.14 Fluye agua con una rapidez de 500 gal/min a través de un acueducto de 400 ft de longitud. Los primeros y los últimos 100 ft del acueducto están hechos de tubo de hierro colado de 6 in de diámetro, en tanto que los 200 ft de enmedio consisten en dos tubos de hierro colado de 4.24 in de diámetro. Encuentre:
a) la velocidad promedio en cada una de las secciones del tubo,
b) la caída de presión en cada uno de los tubos,
c) la caída total de presión.

14.15 Un tubo de hierro colado de 0.2 m de diámetro y otro tubo de acero comercial de 67 mm de diámetro están colados paralelamente entre sí y ambos van desde la misma bomba hasta un depósito. La caída de presión es de 210 kPa y las tuberías son de 150 m de longitud. Determine el gasto en cada una de las tuberías.

14.16 Calcule el gasto a través de una manguera de jardinería desde una fuente de 40 psig, en:
a) Una manguera de 1/2 in DI.
b) Una manguera de 3/4 in DI.

14.17 Dos depósitos de agua cuyas alturas son de : $h_1 = 60$ m y $h_2 = 30$ m están conectados por medio de un tubo de 0.35 m de diámetro. La salida del tubo se encuentra sumergida a una distancia $h_3 = 8$ m de la superficie del depósito.



a) Determine el gasto a través del tubo si éste es de 80 m de longitud y el factor de fricción es $f_f = 0.004$. La entrada del tubo se coloca al ras de la pared.
b) Si la rugosidad relativa $e/D = 0.004$, determine el factor de fricción y la rapidez de flujo.

CONCLUSION ACERCA DE LA TRANSFERENCIA DE MOMENTO

En este punto se termina el estudio específico de la transferencia de momento. Los conceptos, descripciones de los mecanismos de transferencia y medios analíticos de descripción de la transferencia de momento se encontrarán, *todos ellos*, en los ocho capítulos siguientes. Los flujos, propiedades

de transferencia y fuerzas motrices serán nuevas, pero el papel que cada uno juega en la transferencia de energía tiene su parte correspondiente en la transferencia de momento. Donde haya semejanzas, éstas se señalarán. Se hace notar al estudiante que es importante que haga aquellas asociaciones que refuercen su conocimiento del material estudiado anteriormente y ayuden a la comprensión del nuevo. Muchos de los desarrollos y ecuaciones ya estudiados se usarán sin mayor explicación; en tales casos puede resultar útil regresar ocasionalmente a la sección adecuada de los capítulos anteriores.

15
FUNDAMENTOS DE LA TRANSFERENCIA DE CALOR

Los siguientes nueve capítulos tratarán de la transferencia de energía. Las cantidades brutas de calor que gana o pierde un sistema se pueden evaluar aplicando la expresión correspondiente al volumen de control, a la primera ley de la termodinámica, tal como se estudió en el capítulo 6. El resultado de un análisis de la primera ley es sólo una parte de la información necesaria para la evaluación total de un proceso o situación que esté relacionado con la transferencia de energía. La principal consideración en muchos casos, es la rapidez con la que tiene lugar la transferencia de energía. Realmente, al diseñar una planta en la cual deba haber un intercambio de calor con el medio circundante, tanto el tamaño del equipo usado en la transferencia de calor y los materiales de los que esté construida, como el equipo auxiliar requerido para su uso, son consideraciones muy importantes para el ingeniero. El equipo no debe solamente cumplir su misión sino también debe ser económico en su adquisición y diseño.

Las reflexiones de naturaleza ingenieril, tales como las anteriormente citadas, requieren de un conocimiento de los mecanismos básicos de transferencia de energía y de la habilidad para evaluar, de manera cuantitativa estas cantidades, así como otras de importancia, relacionadas con ellas.

Nuestra meta inmediata es examinar los mecanismos básicos que intervienen en la transferencia de energía y estudiar las ecuaciones fundamentales para calcular la rapidez de transferencia de la energía.

Hay tres formas de transferencia de energía: conducción, convección y radiación.

Todos los procesos de transferencia de energía comprenden una de estas tres formas. En el resto de este capítulo se hara una descripción introductoria así como un estudio de estas formas de transferencia.

15.1 CONDUCCION

La transferencia de energía por conducción se realiza de dos maneras. El primer mecanismo es el de la interacción molecular, en el cual el aumento del movimiento de una partícula a un nivel de energía (temperatura), más alto imparte energía a las moléculas adyacentes que se encuentran en niveles de energía más bajos. Este tipo de transferencia está presente, en ciertos grado, en todos los sistemas de los cuales exista un gradiente de temperatura y en los que se encuentren presentes moléculas de sólido, líquido o gas.

El segundo mecanismo es el de transferencia de calor de conducción por medio de electrones "libres". El mecanismo de los electrones libres es importante, principalmente en los sólidos puramente metálicos; la concentración de electrones libres varía considerablemente en las aleaciones y baja mucho en los sólidos no metálicos.

La capacidad que tienen los sólidos de conducir el calor varía en proporción a la concentración de electrones libres, por lo que no es extraño que los metales puros sean los mejores conductores del calor, como sabemos por experiencia.

Como la conducción de calor es un fenómeno molecular, es de esperarse que la ecuación básica que sirva para describir este proceso sea semejante a la utilizada en la transferencia molecular de momento, ecuación (7-4). Esta ecuación fue establecida por primera vez, 1822, por Fourier, en la siguiente forma:

$$\frac{q_x}{A} = -k\frac{dT}{dx} \tag{15-1}$$

donde q_x es la rapidez de transferencia de calor en la dirección de x en watts o en Btu/h; A es el área *normal* a la dirección de flujo de calor en m^2 o en ft^2; dt/dx es el gradiente de temperatura en la dirección de x, en k/m o en °F/ft y k es la conductividad térmica en W/(m;K) o en Dtu/h ft °F. La razón q_x/A, cuyas dimensiones son W/m^2 o Btu/h ft^2, se llama flujo de calor en la dirección de x.

Una relación más general correspondiente al flujo de calor es la ecuación (15-2),

$$\frac{\mathbf{q}}{A} = -k\nabla T \tag{15-2}$$

que expresa el flujo de calor en proporción al gradiente de temperatura. Se observa que la constante de proporcionalidad es la conductividad térmica, la cual juega un papel semejante al de la viscosidad en la transferencia de momento. El signo negativo que aparece en la ecuación (15-2) indica que el flujo de calor ocurre en la dirección de un gradiente negativo de temperatura. La ecuación (15-2) es la forma vectorial de la *ecuación de Fourier de la rapidez*,

a la cual a menudo se hace referencia como primera ley de Fourier de la conducción de calor.

La conductividad térmica K, definida por la ecuación (15-1) se supone independiente de la dirección en la ecuación (15-2), por ello esta expresión es aplicable solamente a un medio *istrópico.* La conductividad térmica es una propiedad de los medios conductores y, al igual que la viscosidad, está principalmente en función de la temperatura y varía de manera significativa con la presión solamente en el caso de los gases sujetos a presiones altas.

15.2 CONDUCTIVIDAD TERMICA

Como el mecanismo de transferencia de calor de conducción es un mecanismo de interacción molecular, es conveniente analizar el movimiento de las moléculas de gas desde un punto de vista semejante al de la sección 7.3.

Si se estudia el volumen de control que aparece en la figura 15.1 en el cual la transferencia de energía en la dirección de y se realiza únicamente a escala molecular, se puede utilizar el análisis de la primera ley

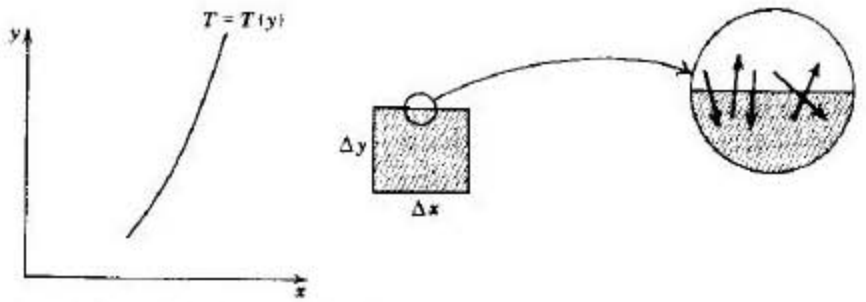


Figura 15.1 Movimiento molecular en la superficie de un volumen de control.

que aparece en el capítulo 6, de la manera que a continuación se indica.

La transferencia de masa sobre la parte superior de este volumen de control se considera que ocurre solamente a escala molecular. Este es el criterio que rige el flujo laminar de un gas.

Si se utiliza la ecuación (6-10) y se supone que la transferencia ocurre solamente a través de la parte superior de la superficie del elemento que se está estudiando,

$$\frac{\delta Q}{dt} - \frac{\delta W_s}{dt} - \frac{\delta W_\mu}{dt} = \iint_{c.s.} \left(e + \frac{P}{\rho}\right)\rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dA + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{c.v.} e\rho\,dV \qquad (6\text{-}10)$$

Si Z moléculas cruzan el plano $\Delta x\ \Delta z$ por unidad de tiempo, esta ecuación se reduce a:

$$q_y = \sum_{n=1}^{Z} m_n c_v (T|_{y-} - T|_{y+})\,\Delta x\,\Delta z \qquad (15\text{-}3)$$

donde m_n es la masa existente en cada molécula, c_v es la capacidad calorífica molecular del gas, Z es la frecuencia con la que las moléculas cruzan el área $\Delta x\ \Delta z$ y $T|_{y-}$, $T|_{y+}$ son las temperaturas del gas ligeramente debajo y ligeramente encima, respectivamente, del plano estudiado.

El término del lado derecho es la sumatoria del flujo de energía asociado con las moléculas que cruzan la superficie de control. Si se observa, ahora, que $T|_{y-} = T - \partial T/\partial y|_{y_0}\,\delta$, donde $y- = y_0 - \delta$, y que se puede escribir una expresión similar correspondiente a $T|_{y+}$, la ecuación (15-3) se puede reescribir en la forma:

$$\frac{q_y}{A} = -2\sum_{n=1}^{Z} m_n c_v \delta \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y_0} \tag{15-4}$$

donde δ representa la componente en la dirección de y de la distancia entre colisiones.

Note como se hizo en el capítulo 7, que $\delta = \frac{2}{3}\lambda$, donde λ es la trayectoria media libre de una molécula. Si se utiliza esta realción y se suma sobre Z moléculas, se tiene:

$$\frac{q_y}{A} = -\tfrac{4}{3}\rho c_v Z\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y_0} \tag{15-5}$$

Al comparar la ecuación (15-5) con la componente de la ecuación (15-2), a lo largo de y, resulta

$$\frac{q_y}{A} = -k\frac{\partial T}{\partial y}$$

es obvio que la conductividad térmica, k, se transforma en:

$$k = \tfrac{4}{3}\rho c_v Z\lambda$$

Haciendo un mayor uso de los resultados de la teoría cinética de los gases, se pueden hacer las siguientes sustituciones:

$$Z = \frac{N\bar{C}}{4}$$

donde C es el promedio de la velocidad molecular aleatoria, $\bar{C} = \sqrt{8\kappa T/\pi m}$ (donde k es la constante de Boltzman);

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi N d^2}$$

donde d es el dámetro molecular y

$$c_v = \frac{3}{2}\frac{\kappa}{N}$$

donde como resultado, finalmente

$$k = \frac{1}{\pi^{3/2} d^2} \sqrt{\kappa^3 T/m} \tag{15-6}$$

Este procedimiento, aplicable a gases monoatómicos específicamente, es importante porque demuestra que la conductividad térmica de un gas es independiente de la presión y que varía proporcionalmente a la potencia 1/2 de la temperatura absoluta. El significado de este resultado no debe pasarse por alto, aunque en este desarrollo se simplificó demasiado.

En las obras de Bird, Stewart y Lightfoot* pueden encontrarse algunas relaciones que pueden usarse en la conductividad térmica de los gases, basadas en modelos moleculares más sofisticados.

La teoría de Chapman y Enskog, usada en el capítulo 7 para predecir la viscosidad de los gases a bajas presiones, tiene un equivalente en la teoría de la transferencia de calor.

La ecuación adecuada para usarse en un gas monoatómico es:

$$k = 0.0829\sqrt{(T/M)}/\sigma^2\Omega_k \tag{15-7}$$

donde k está dada en W/m.K, σ está dada en Angstroms, M es el peso molecular y Ω_k es la integral de colisión de Lennard-Jones, identica a Ω como se puede calcular a partir de los apéndices J y K.

La conductividad térmica de un líquido no está supeditada al desarrollo de ninguna teoría cinética simplificada, ya que el comportamiento molecular de la fase líquida no ha sido claramente comprendido y a la fecha no existe un modelo matemático universal exacto. Algunas relaciones empíricas han tenido un éxito razonable, pero son tan especializadas que no se incluyen en este libro. Si el estudiante desea hacer un estudio de las teorías moleculares relacionadas con la fase líquida así como de algunas relaciones empíricas de la conductividad térmica de ciertos líquidos, deberá leer la obra de Reid y Sherwood*. Una observación general acerca de la conductividad térmica de los líquidos es la siguiente: varía sólo ligeramente y es relativamente independiente de la presión. Uno de los problemas que surgen al hacer una determinación experimental de los valores de la conductividad térmica en los líquidos es el de asegurarse de que el líquido se encuentra libre de corrientes de convección.

En la fase sólida, la conductividad térmica se atribuye, tanto a la interacción molecular, como en otras fases, como a los electrones libres que se encuentran presentes principalmente en los metales puros. La fase sólida es susceptible de mediciones muy precisas de la conductividad térmica ya que en

*R. B. Bird, W. E. Stewart y E. N. Lightfoot, *Transport Phenomena*, Wiley, Nueva York, 1960, capítulo 8.

*Reid y Sherwood, *The Properties of Gases and Liquids*, Mac Graw-Hill Book Company, Nueva York, 1958, capítulo 7.

esta fase no existe ningún problema con las corrientes de convección. Se han evaluado las propiedades térmicas de la mayoría de los sólidos que son de interés para el ingeniero y están disponibles las tablas y cuadros de estas propiedades, incluyendo a la conductividad térmica.

El mecanismo del electrón libre en la conducción del calor es análoga al mecanismo de la conducción eléctrica. Cuando Wiedemann y Franz, en 1853, se dieron cuenta de ello, este conocimiento los llevó a relacionar las dos conductividades en forma aproximada y en 1872 Lorenz† publicó la siguiente relación, conocida como la ecuación de Wiedemann, Franz y Lorenz:

$$L = \frac{k}{k_e T} = \text{constante} \tag{15-8}$$

donde k es la conductividad térmica, k_e, la conductividad eléctrica, T, la temperatura absoluta y L, en número de Lorenz.

Los valores numéricos de las cantidades que aparecen en la ecuación (15-8) tienen una importancia secundaria en este momento. El punto importante que debe hacerse notar aquí es la relación simple que existe entre las conductividades eléctrica y térmica y, específicamente, que los materiales que son buenos conductores de la electricidad lo son también del calor y viceversa.

La figura 15.2 muestra la variación de la conductividad térmica con la temperatura de diversas substancias especiales en sus fases líquida, sólida y gaseosa.

En los Apéndices H e I podrá encontranse una tabulación más completa de la conductividad térmica.

Los siguientes dos ejemplos muestran el uso de la ecuación de Fourier de rapidez en la solución de problemas de conducción simple de calor.

Ejemplo 1

Un tubo de acero cuyo diámetro interior es de 0.742 in y cuyo grosor de su pared es de 0.15 in está sujeto a una temperatura interior de 200° y a una exterior de 160°F.

Encuentre la rapidez de flujo de calor por pie de longitud del tubo y también el flujo de calor basado en el interior y en el área superficial exterior.

La primera ley de la termodinámica aplicada a este problema se reduce a la forma $\delta Q/dt = 0$, la cual indica que la cantidad de calor transferido hacia el volumen de control es igual a la cantidad que sale de él.

Como el flujo de calor se lleva a cabo en dirección radial, la variable independiente es r y la forma aplicable de la ecuación de rapidez de Fourier es:

$$q_r = -kA\frac{dT}{dr}$$

† L. Lorenz, Ann Physik und Chemie (Poggendorffs), 147, 429 (1872).

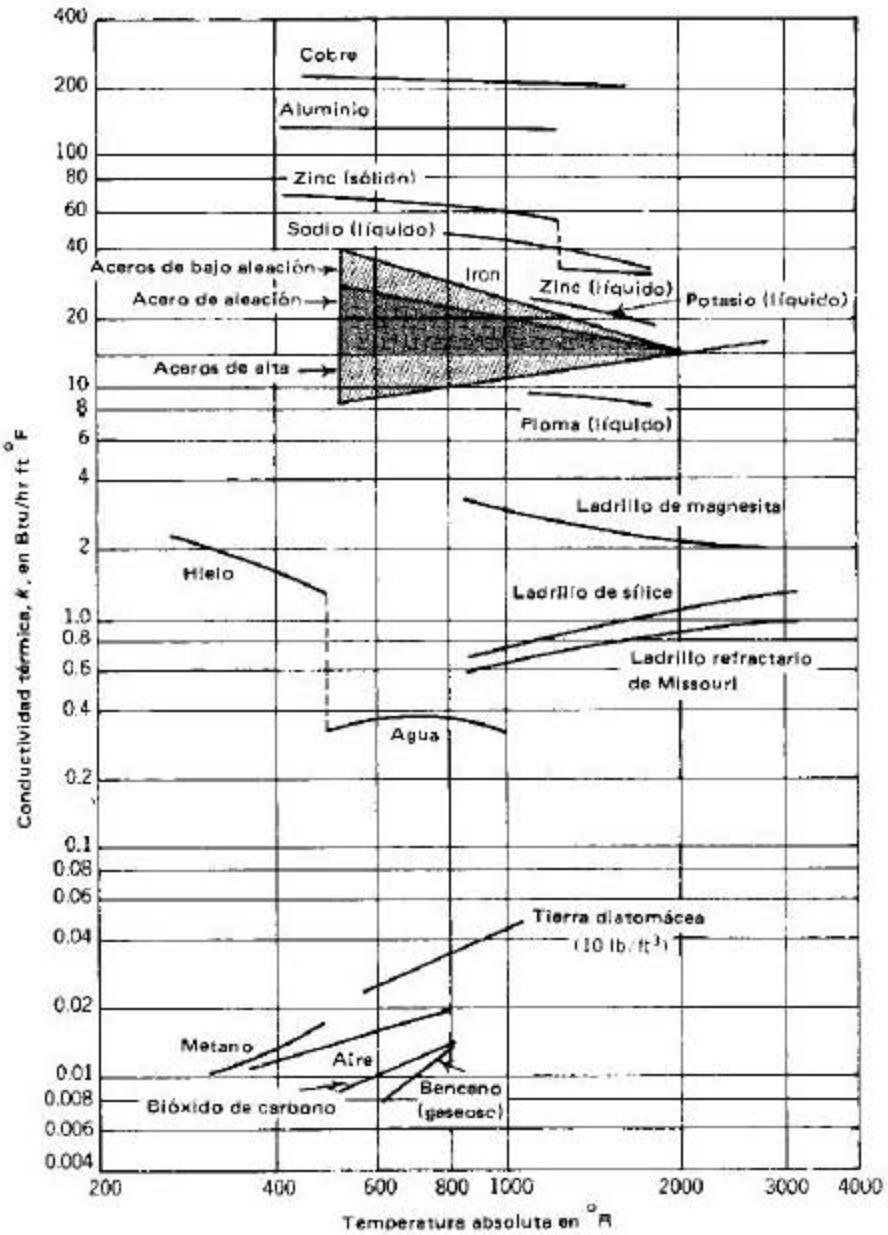


Figura 15.2 Conductividad térmica de varios materiales a diversas temperaturas (De M. Jacob y G. A. Hawkins, *Elements of Heat Transfer*, Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1957, pág. 23. Con licencia de los editores).

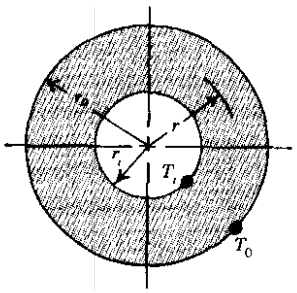


Figura 15.3 Conducción de calor en dirección radial con temperaturas superficiales uniformes.

Si se iguala $A = 2\pi rL$, podrá observarse que la ecuación se tranforma en :

$$q_r = -k(2\pi rL)\frac{dT}{dr}$$

donde q_r es constante y la ecuación puede separarse y resolverse en la forma siguiente:

$$q_r \int_{r_i}^{r_o} \frac{dr}{r} = -2\pi kL \int_{T_i}^{T_o} dT = 2\pi kL \int_{T_o}^{T_i} dT$$

$$q_r \ln \frac{r_o}{r_i} = 2\pi kL(T_i - T_o)$$

$$q_r = \frac{2\pi kL}{\ln r_o/r_i}(T_i - T_o) \qquad (15\text{-}9)$$

Sustituyendo los valores numéricos dados, se obtiene:

$$q_r = \frac{2\pi(24.8 \text{ Btu/hr ft °F})(200-160)°\text{F}}{\ln(1.050/0.742)}$$

$$= 17\,950 \text{ Btu/hr ft} \qquad (17\,250 \text{ W/m})$$

Las áreas superficiales interior y exterior por unidad de longitud de tubo son:

$$A_i = \pi\left(\frac{0.742}{12}\right)(1) = 0.194 \text{ ft}^2 \qquad (0.0180 \text{ m}^2)$$

$$A_o = \pi\left(\frac{1.050}{12}\right)(1) = 0.275 \text{ ft}^2 \qquad (0.0255 \text{ m}^2)$$

dando

$$q_r/A_i = \frac{17\,950}{0.194} = 92\,500 \text{ Btu/hr ft}^2 \qquad (291\,000 \text{ W/m}^2)$$

y

$$q_o/A_o = \frac{17\,950}{0.275} = 65\,300 \text{ Btu/hr ft}^2 \qquad (206\,000 \text{ W/m}^2)$$

Un punto muy importante que debe tomarse en cuenta en los resultados obtenidos en este ejemplo es la necesidad de especificar el área sobre la cual se basa el valor del flujo de calor. Note que para la misma cantidad de flujo de calor, los flujos basados en las áreas interior y exterior difieren, aproximadamente, en un 42%.

Ejemplo 2

Examine un medio de transferencia de calor consistente en un cilindro hueco cuyos radios interior y exterior son, respectivamente, r_i y r_0, que se encuentran a las temperaturas T_i y T_0. Si la variación de la conductividad térmica puede describirse como una función lineal de la temperatura, de acuerdo con la ecuación:

$$k = k_o(1 + \beta T)$$

calcule la rapidez de transferencia de calor en estado permanente, en la dirección radial, usando la relación anterior para la conductividad térmica y compare el resultado con el obtenido al usar el valor de k calculado usando la media aritmética de la temperatura.

La figura 15.3 es adecuada a este propósito. La ecuación a resolver, ahora, es:

$$q_r = -[k_o(1 + \beta T)](2\pi rL)\frac{dT}{dr}$$

la cual, después de la separación e integración se transforma en:

$$q_r \int_{r_i}^{r_o} \frac{dr}{r} = -2\pi k_o L \int_{T_i}^{T_o} (1 + \beta T)\, dT$$

$$= 2\pi k_o L \int_{T_o}^{T_i} (1 + \beta T)\, dT$$

$$q_r = \frac{2\pi k_o L}{\ln r_o/r_i}\left[T + \frac{\beta T^2}{2}\right]_{T_o}^{T_i}$$

$$q_r = \frac{2\pi k_o L}{\ln r_o/r_i}\left[1 + \frac{\beta}{2}(T_i + T_o)\right](T_i - T_o) \qquad (15\text{-}10)$$

Si se observa que el valor aritmético promedio de k es:

$$k_{\text{prom}} = k_o\left[1 + \frac{\beta}{2}(T_i + T_o)\right]$$

se verá que la ecuación (15-10) también podría escribirse así

$$q_r = \frac{2\pi k_{\text{prom}} L}{\ln r_o/r_i}(T_i - T_o)$$

Por lo tanto, ambos métodos producen resultados idénticos.

El estudiante puede encontrar que es útil determinar qué parte del enunciado del problema es responsable de este interesante resultado, esto es, si los resultados de los dos tipos de solución serían diferentes si fueran distintas la configuración geométrica o la expresión conrrespondiente a la conductividad térmica.

15.3 CONVECCION

La transferencia de calor debida a la convección se relaciona con el cambio de energía que ocurre entre una superficie y un fluido adyacente. Debe hacerse una distinción entre *convección forzada*, en la cual se hace pasar un flujo por una superficie sólida usando un medio externo, tal como un ventilador o una bomba y la *convección libre* o *natural*, en la que un fluido más caliente (o más frío), que se encuentra próximo a la frontera sólida, ocasiona la circulación a causa de la diferencia de densidades que resulta de la variación de temperatura en una región de fluido.

Fue Newton quien en 1701 expresó por primera vez la ecuación correspondiente a la rapidez de transferencia de calor convectivo, por lo que se le denomina *ecuación de Newton de la rapidez* o "ley" de Newton del enfriamiento.

Esta ecuación es:

$$q/A = h\,\Delta T \tag{15-11}$$

donde q es la rapidez de transferencia de calor convectivo, expresada en Btu/h, A es el área normal a la dirección de flujo de calor, en m^2 o en ft^2, ΔT es la diferencia de temperatura que existe entre la superficie y el fluido, en K o en °F y h es el coeficiente de transferencia de calor convectivo, expresado en W/m^2. K o en Btu/h ft^2 °F. La ecuación (15-11) no es una ley sino una definición del coeficiente h. Gran parte de las siguientes secciones estará dedicada a la determinación de este coeficiente. En general, es una función de la geometría del sistema, de las propiedades del fluido y del flujo y de la magnitud de ΔT.

Ya que las propiedades del flujo son tan importantes para la evaluación del coeficiente de transferencia del calor convectivo, es de esperarse que muchos de los métodos y conceptos de análisis introducidos en capítulos anteriores sean de importancia en el análisis de la transferencia de calor convectivo.

Debe recordarse, del material previamente expuesto, que aun cuando un fluido fluya de manera turbulenta alrededor de una superficie, queda, sin embargo, una capa, algunas veces extremadamente delgada, próxima a la superficie, en la que el flujo es laminar. También debe tenerse en cuenta que las partículas de flujo próximas a la frontera sólida están en reposo. Como esto es siempre válido, el mecanismo de transferencia de calor entre una superfi-

cie sólida y un fluido debe incluir la conducción a través de las capas de fluido cercanas a la superificie.

Esta "película" de fluido presenta, a menudo, la principal resistencia a la transferencia de calor convectivo y al coeficiente h se le llama a menudo, *coeficiente de película.*

Dos clases de transferencia de calor que difieren un tanto de la convección libre o forzada, pero que sin embargo, pueden evaluarse cuantitativamente por medio de la ecuación (15-11) son los fenómenos de ebullición y condensación. Los coeficientes de película asociados a estas dos clases de transferencia son bastante grandes. La tabla 15-1 representa algunos valores del orden de magnitud de h en diferentes mecanismos convectivos.

También es necesario distinguir entre coeficientes locales de calor, o sea, aquéllos que se aplican en un punto y valores totales o promedio de h aplicables en un área dada.

Designaremos al coeficiente local por medio del símbolo h_x , de acuerdo con la ecuación (15-11)

$$dq = h_x \, \Delta T \, dA \tag{15-11}$$

TABLA 15.1 VALORES APROXIMADOS DEL COEFICIENTE DE TRANSFERENCIA DE CALOR CONVECTIVO

Mecanismo	h, Btu/hr ft² °F	h, W/(m² · K)
Convección libre, aire	1–10	5–50
Convección forzada, aire	5–50	25–250
Convección forzada, agua	50–3000	250–15 000
Agua en ebullición	500–5000	2500–25 000
Vapor de agua en condensación	1000–20 000	5000–100 000

así, el coeficiente promedio, h, se relaciona con h_x, por medio de la ecuación:

$$q = \int_A h_x \, \Delta T \, dA = hA \, \Delta T \tag{15-12}$$

Los valores dados en la tabla 15-1 son coeficientes promedio de transferencia de *calor convectivo.*

15.4 RADIACION

La transferencia de calor radiante difiere de la conducción y de la convección en que no se necesita un medio para su propagación, de hecho, la transferencia de energía por radiación es máxima cuando las dos superficies que están intercambiando energía están separadas por un vacío perfecto.

El mecanismo exacto de la transferencia de energía radiante no ha quedado totalmente aclarado. Existe evidencia, tanto para respaldar el argumento ondulatorio como el corpuscular. Sin embargo, es un hecho notable que un proceso relativamente complicado como la transferencia de energía radiante, pueda describirse por medio de una expresión analítica razonablemente sencilla.

La rapidez de emisión de energía desde un radiador perfecto o *cuerpo negro* está dada por:

$$\frac{q}{A} = \sigma T^4 \tag{15-13}$$

donde q es la rapidez de emisión de energía radiante en W o en Btu/h; A es el área de la superficie emisora en m^2 o ft^2; T es la temperatura absoluta en K o °R y σ es la constante de Stefan-Boltzman, cuyo valor es 5.672×10^{-8} $W/m^2 \cdot K^4$ o 0.1714×10^{-8} Btu/h ft^2 $°R^4$. La constante de proporcionalidad que relaciona el flujo de energía radiante con la cuarta potencia de la temperatura absoluta tomó su nombre de Stefan quien, a partir de observaciones experimentales, propuso la ecuación (15-13) en 1879 y de Boltzman quien obtuvo esta relación, de manera teórica, en 1884. La ecuación (15-13) se conoce comúnmente como ley de Stefan-Boltzmann de la radiación térmica.

Se harán ciertas modificaciones a la ecuación (15-13) para que sea válida para la transferencia neta de energía entre dos superficies, para el grado de desviación de las superficies emisora y receptora, en el comportamiento del cuerpo negro y para los factores geométricos asociados con el intercambio de energía radiante entre una superficie y sus alrededores. Todo esto se estudiará en el capítulo 23.

15.5 MECANISMOS COMBINADOS DE TRANSFERENCIA DE CALOR

Las tres clases de transferencia de calor se han estudiado separadamente en la sección 15.4. Es poco frecuente, en circunstancias reales, que sea un solo mecanismo el que contribuya a la transferencia de energía. Será de utilidad estudiar algunas situaciones en las que la transferencia de calor se logra por medio de una combinación de estos mecanismos.

Examinemos el caso de la figura 15.4, que consiste en la conducción en estado permanente, a través de una pared plana cuyas superficies mantienen temperaturas constantes de T_1 y T_2.

Si se escribe la ecuación de Fourier de rapidez, se tendrá, en la dirección de x:

$$\frac{q_x}{A} = -k\frac{dT}{dx} \tag{15-1}$$

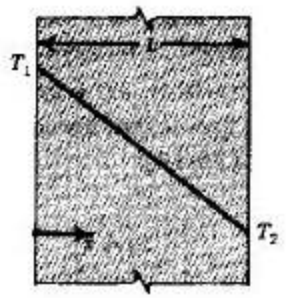


Figura 15.4 Conducción en estado permanente a través de una pared plana.

y resolviendo esta ecuación para q_x, sujeta a las condiciones de frontera: $T = T_1$ en $x = 0$ y $T = T_2$ en $x = L$, se obtiene

$$\frac{q_x}{A}\int_0^L dx = -k\int_{T_1}^{T_2} dT = k\int_{T_2}^{T_1} dT$$

ó

$$q_x = \frac{kA}{L}(T_1 - T_2) \tag{15-14}$$

La ecuación (15-14) guarda una semejanza obvia con la ecuación de Newton de la rapidez

$$q_x = hA\,\Delta T \tag{15-11}$$

Esta semejanza de forma se puede utilizar en un problema en el que existan ambas clases de transferencia de energía.

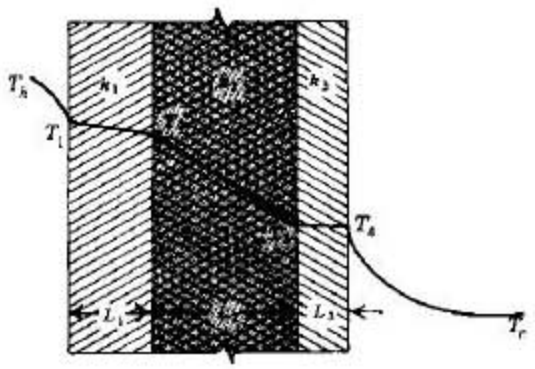


Figura 15.5 Transferencia de calor en el estado constante a través de una pared compuesta

Estudie la pared plana compuesta, construida con tres materiales en capas, cuyas dimensiones aparecen el la figura 15.5. Se desea expresar la rapidez de transferencia de calor en estado permanente por unidad de área, entre un

gas caliente que se encuentra a una temperatura T_h de un lado de la pared y un gas frío a una temperatura T_c del otro lado de la pared. La forma en que se ha disignado a las temperaturas, así como sus dimensiones, aparecen en la figura. Las relaciones de q_x que se dan a continuación, surgen de la aplicación de las ecuaciones (15-11) y (15-14):

$$q_x = h_h A(T_h - T_1) = \frac{k_1 A}{L_1}(T_1 - T_2) = \frac{k_2 A}{L_2}(T_2 - T_3)$$
$$= \frac{k_3 A}{L_3}(T_3 - T_4) = h_c A(T_4 - T_c)$$

Cada una de las diferencias de temperatura está expresada en términos de q_x, de la siguiente manera:

$$T_h - T_1 = q_x(1/h_h A)$$
$$T_1 - T_2 = q_x(L_1/k_1 A)$$
$$T_2 - T_3 = q_x(L_2/k_2 A)$$
$$T_3 - T_4 = q_x(L_3/k_3 A)$$
$$T_4 - T_c = q_x(1/h_c A)$$

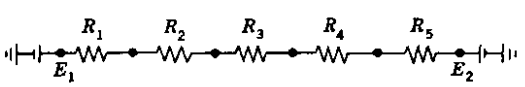
Sumando estas ecuaciones se obtiene:

$$T_h - T_c = q_x\left(\frac{1}{h_h A} + \frac{L_1}{k_1 A} + \frac{L_2}{k_2 A} + \frac{L_3}{k_3 A} + \frac{1}{h_c A}\right)$$

y finalmente, resolviendo para q_x, se obtiene

$$q_x = \frac{T_h - T_c}{1/h_h A + L_1/k_1 A + L_2/k_2 A + L_3/k_3 A + 1/h_c A} \qquad (15\text{-}15)$$

Note que la rapidez de transferencia está expresada en términos de la diferencia total de temperatura. Si se examina un circuito eléctrico en serie,



se puede escribir:

$$I = \frac{\Delta E}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5} = \frac{\Delta E}{\sum R_i}$$

Las cantidades análogas que aparecen en las expresiones correspondientes al flujo de calor y a la corriente eléctrica, son obvias:

$$\Delta E \rightarrow \Delta T$$

$$I \rightarrow q_x$$

$$R_i \rightarrow 1/hA,\ L/kA$$

y cada uno de los téminos del denominador de la ecuación (15-15) se puede considerar como una resistencia térmica debida a convección o a conducción. Por lo tanto, la ecuación (15-15) se convierte en una transferencia de calor análoga a la ley de Ohm, que relaciona al flujo de calor con la diferencia total de presión dividida entre la resistencia térmica total entre los puntos cuyas temperaturas son conocidas. La ecuación (15-15) se puede escribir, sencillamente, en la forma

$$q = \frac{\Delta T}{\sum R_{\text{térmica}}} \tag{15-16}$$

Esta relación es aplicable también a la transferencia de calor en estado permanente de otras geometrías diferentes. Los términos que corresponden a la resistencia térmica cambiarán de forma en los sistemas cilíndricos o esféricos, pero una vez calculados, se podrán usar en la forma indicada por la ecuación (15-16). Con referencia específica a la ecuación (15-9), debe notarse que la resistencia térmica de un conductor cilíndrico es:

$$\frac{\ln (r_o/r_i)}{2\pi kL}$$

Otra forma comúnmente utilizada para expresar la rapidez de transferencia de calor para situaciones en las que aparezca un material compuesto o una combinación de mecanismo es la de definir el *coeficiente total de transferencia de calor* en la forma

$$U = \frac{q_x}{A\,\Delta T} \tag{15-17}$$

donde U es el coeficiente total de transferencia de calor y tiene las mismas unidades que h, en $W/m^2 . K$ o en $Btu/h\ ft^2\ ^\circ F$.

El siguiente ejemplo demuestra la utilidad de evaluar la rapidez de transferencia de calor por medio de una diferencia total de temperatura.

EJEMPLO 3

Fluye vapor saturado a 1915 Pa dentro de una tubería cuyo diámetro interior es de 2.09 cm. y cuyo diámetro exterior es de 2.67 cm. Para dos coeficientes de convección en las superficies interior y exterior de la tubería, se pueden tomar los valores: 5680 $W/m^2 . K$ 22.7 $W/m^2 .K$, respectivamente. El aire circundante está a 294 K. Encuentre la pérdida

de calor por metro de tubería simple y también en una tubería que cuenta con una capa de 3.8 cm de grueso de aislante de magnesio en el 85% de su superficie exterior.

En el caso de tubo sin aislamiento, tienen que evaluarse tres resistencias térmicas:

$$R = R_{\text{convección interior}} = 1/h_i A_i$$
$$R = R_{\text{convección exterior}} = 1/h_0 A_0$$
$$R = R_{\text{conducción}} = \ln(r_0/r_i)/2\pi kL$$

Para las condiciones de este problema, estas resistencias tienen los valores:

$$R_1 = 1/[(5680\ \text{W/m}^2 \cdot \text{K})(\pi)(0.0209\ \text{m})(1\ \text{m})]$$
$$= 0.00268\ \text{K/W} \qquad \left(0.00141\ \frac{\text{hr °R}}{\text{Btu}}\right)$$

$$R_2 = 1/[(22.7\ \text{W/m}^2 \cdot \text{K})(\pi)(0.267\ \text{m})(1\ \text{m})]$$
$$= 0.525\ \text{K/W} \qquad \left(0.277\ \frac{\text{hr °R}}{\text{Btu}}\right)$$

y

$$R_3 = \frac{\ln(2.67/2.09)}{2\pi(42.9\ \text{W/m} \cdot \text{K})(1\ \text{m})}$$
$$= 0.00091\ \text{K/W} \qquad \left(0.000267\ \frac{\text{hr °R}}{\text{Btu}}\right)$$

La temperatura interior es la correspondiente a la de vapor saturado, de 1915 Pa a 276° F o 404 K. La rapidez de transferencia de calor por metro de tubería se pueden calcular, ahora, de la siguiente manera:

$$q = \frac{\Delta T}{\sum R} = \frac{404\text{–}294\ \text{K}}{0.528\ \text{K/W}}$$
$$= 208\ \text{W} \qquad \left(711\ \frac{\text{Btu}}{\text{hr}}\right)$$

En el caso de una tubería aislada, la resistencia térmica total incluirá a R_1 y R_3, calculados anteriormente, además de las resistencias adicionales debidas al aislamiento. Para el aislamiento se tiene:

$$R_4 = \frac{\ln(10.29/2.67)}{2\pi(0.0675\ \text{W/m} \cdot \text{K})(1\ \text{m})}$$
$$= 3.181\ \text{K/W} \qquad \left(1.678\ \frac{\text{hr °R}}{\text{Btu}}\right)$$

y el valor correspodiente a la superficie exterior del aislamiento:

$$R_5 = 1/[(22.7\ \text{W/m}^2 \cdot \text{K})(\pi)(0.1029\ \text{m})(1\ \text{m})]$$
$$= 0.1363\ \text{K/W} \qquad \left(0.0719\ \frac{\text{hr °R}}{\text{Btu}}\right)$$

por lo tanto, la pérdida de calor en el tubo aislado será:

$$q = \frac{\Delta T}{\sum R} = \frac{404 - 294 \text{ K}}{3.321 \text{ K/W}}$$

$$= 33.1 \text{ W} \qquad \left(113 \frac{\text{Btu}}{\text{hr}}\right)$$

Una reducción aproximada del 85%.

En este ejemplo es obvio que ciertas partes de la trayectoria de transferencia de calor ofrecen una resistencia despreciable. Si, por ejemplo, en el caso del tubo sin recubrimiento, se deseara aumentar la rapidez de transferencia de calor, la acción obvia sería la de alterar la resistencia exterior de convección que es unas 200 veces mayor que la magnitud del valor más alto siguiente de resistencia térmica.

El ejemplo 3 también podría haber sido útil, usando un coeficiente total de transferencia de calor, el cual, en general, sería:

$$U = \frac{q_x}{A \Delta T} = \frac{\Delta T / \sum R}{A \Delta T} = \frac{1}{A \sum R}$$

o para el caso específico que se está estudiando:

$$U = \frac{1}{A\{1/A_i h_i + [\ln (r_o/r_i)]/2\pi kL + 1/A_o h_o\}} \tag{15-18}$$

La ecuación 15-18 indica que el coeficiente total de transferencia de calor, U, puede tener valor numérico diferente, dependiendo del área en la cual esté basado. Si, por ejemplo, U está basado en el área exterior de la tubería, A_o, se tendrá:

$$U_o = \frac{1}{A_o/A_i h_i + [A_o \ln (r_o/r_i)]/2\pi kL + 1/h_o}$$

por lo tanto, cuando se especifique un coeficiente total será necesario relacionarlo con un área específica.

Otro medio de evaluar la rapidez de transferencia de calor es el de utilizar el *factor de forma*, para el que se usará el símbolo S.

Teniendo en cuenta las relaciones encontradas en los casos de formas cilíndricas y planas,

$$q = \frac{kA}{L} \Delta T \tag{15-14}$$

y

$$q = \frac{2\pi kL}{\ln (r_o/r_i)} \Delta T \tag{15-9}$$

si la parte de la expresión, que se relaciona con la geometría se separa de los términos restantes, se tendrá, en una pared plana:

$$q = k\left(\frac{A}{L}\right)\Delta T$$

y un cilindro:

$$q = k\left(\frac{2\pi L}{\ln (r_o/r_i)}\right)\Delta T$$

Cada uno de los términos que se encuentran entre paréntesis es el factor de forma correspondiente a la geometría del problema. La ecuación general de esta forma es la siguiente:

$$q = kS\,\Delta T \tag{15-19}$$

La ecuación (15-19) ofrece algunas ventajas cuando se requiere una geometría específica debido a las limitaciones en cuanto a espacio y configuración.

Si este es el caso, se puede calcular el factor de forma y puede determinarse el valor de q de diversos materiales que exhiben un conjunto de valores de K.

15.6 CONCLUSION

En este capítulo se han introducido las formas básicas de transferencia de energía: conducción, convección y radiación, así como las relaciones sencillas que expresan la rapidez de transferencia de energía asociada a éstas. Se estudió la propiedad de transporte, o sea la conductividad térmica y se analizó la transferencia de energía en un gas monoatómico a baja presión.

Las ecuaciones de rapidez de transferencia de energía son la siguientes:

Conducción: Ecuación de Fourier de rapidez,

$$\frac{\mathbf{q}}{A} = -k\nabla T$$

Convección: ecuación de Newton de rapidez

$$\frac{q_x}{A} = h\,\Delta T$$

Radiación: ley de Stefan-Boltzmann de la energía emitida por una superficie negra,

$$\frac{q}{A} = \sigma T^4$$

Se estudiaron las formas combinadas de transferencia de calor, específicamente, con respecto a los medios para calcular la rapidez de transferencia de calor tomaban parte diversas formas de transferencia.

Las tres formas de calcular la rapidez de transferencia de calor en estado constante están representadas por las ecuaciones:

$$q_x = \frac{\Delta T}{\sum R_T} \qquad 15\text{-}16)$$

donde $\Sigma\ R_T$ es la resistencia térmica total a lo largo de la trayectoria de transferencia

$$q_x = UA\ \Delta T \qquad (15\text{-}17)$$

donde U es el coeficiente global de transferencia de calor y

$$q_x = kS\ \Delta T \qquad (15\text{-}19)$$

donde S es el factor de forma.

Las ecuaciones que se han introducido se usarán en los siguientes capítulos que traten acerca de la transferencia de energía. El objeto principal de los capítulos siguientes será la evaluación de la rapidez de transferencia de calor para geometrías o condiciones de flujo especiales, o ambas.

PROBLEMAS

15.1 Las paredes exteriores de una casa están construidas de una capa de 4 in de ladrillo, 1/2 in de celotex, un espacio de aire de 3 5/8 de grosor y una cobertura de madera de 1/4 in. Si la superficie externa del ladrillo está a 30° F y la superficie interior de la cobertura de madera, a 75° F, ¿cuál es el flujo de calor si:

a) se supone que el espacio de aire transfiere calor solamente por conducción?

b) la conductancia equivalente del espacio de aire es de 1.8 Btu/h ft° F?

c) el espacio de aire está lleno de lana de vidrio?

$$k_{ladrillo} = 0.38 \text{ Btu/hr ft °F}$$

$$k_{celotex} = 0.028 \text{ Btu/hr ft °F}$$

$$k_{aire\ x} = 0.015 \text{ Btu/hr ft °F}$$

$$k_{madera} = 0.12 \text{ Btu/hr ft °F}$$

$$k_{lana} = 0.025 \text{ Btu/hr ft °F}$$

15.2 Resuelva el problema 15.1 si, en lugar de conocerse las temperaturas superficiales, las temperaturas del aire fuera y dentro son de 30° F y 75° F y los coeficientes de calor convectivo son de 7 Btu/h ft °F, respectivamente.

15.3 Determine la rapidez de transferecia de calor por metro cuadrado de área de pared en el caso de un horno en el que el aire del interior está a 1340 K. La pared del horno está compuesta por una capa de 0.106 m de ladrillo refractario y un grosor de 0.635 cm de acero blando en su superficie exterior. Los coeficientes de transferencia de calor en las superficies de las paredes interiores y exteriores son de 5110 W/m^2. K y 45 W/m^2. K, respectivamente. El aire de exterior se encuentra a 295 K. ¿Cuáles serán las temperaturas de cada una de las superficies del espacio intermedio?

15.4 Dadas la pared del horno y otras condiciones especificadas en el problema 15.3, ¿cuál deberá ser el grosor del celotex (k =0.069 W/m.K) que se agregue a la pared del horno para que la temperatura de la superficie exterior de la pared aislada no exceda los 340 K?

15.5 Sea una pared plana de grosor L cuyas dos superficies se mantienen a las temperaturas T_o y T_L. Si la conductividad térmica varía de acuerdo con la ecuación $k = k_0 (1+\alpha T+\beta T^2)$, encuéntrese una expresión para el flujo unidimensional en estado permanente de calor.

15.6 Resuelva el problema 15.5 si, además de una conductividad térmica variable, el área transversal disminuye linealmente de A_o en x=0 hasta A_f en x=L.

15.7 La pérdida de calor que sufre un calentador de agua debe mantenerse en un máximo de 900 Btu/h ft^2 de área de pared. ¿De qué grosor se requiere que sea el asbesto (k =0.10 Btu/h ft° F) si las superficies interior y exterior del aislamiento deben estar a 1600° F y 500° F respectivamente?

15.8 Si, en el problema anterior se agrega una capa de 3 in de grueso de ladrillo de arcilla blanca o caolín (k =0. 07 Btu/h ft °F) a la parte exterior del asbesto, ¿cuál será el flujo de calor si la superficie exterior del caolín está a 250° F? ¿Cuál será la temperatura en el espacio que hay entre el asbesto y el ladrillo de caolín, con estos datos?

15.9 Se va a construir una pared compuesta de 1/4 plg. de acero inoxidable (k =10 Btu/h ft° F), 3 plg. de placa del corcho (k =0.025 Btu/h ft° F), 1/2 in de plástico (k=1.5 Btu/h ft° F)

a) Trace el circuito térmico correspondiente a la conducción en estado permanente a través de esta pared

b) Evalúe la resistencia térmica individual para cada una de las capas de material.

c) Determine el flujo de calor si se mantiene la superficie de acero a 250° F y la de plástico a 80° F.

d) ¿Cuáles son las temperaturas en cada una de las superficies de la lámina de corcho en estas condiciones?

15.10 Si en el problema anterior los coeficientes de transferencia de calor convectivo en las superficies interior (de acero) y exterior son de 40 Btu/h ft² °F y Btu/h ft² °F, respectivamente, determine:

a) El flujo calorífico cuando los gases se encuentran a 250° F y 70° F y están adyacentes a las superficies interior y exterior,

b) la tempertura máxima alcanzada en el interior del plástico,

c) Cuál de las resistencias individuales es predominante.

15.11 Una placa de asbesto tiene su sección transversal cuadrada, mide 5 cm de lado en su extremo pequeño y aumenta de tamaño linealmente hasta llegar a medir 10 cm de un lado, en el extremo grande. La altura de la placa es de 15 cm. Si el extremo pequeño se mantiene a 600 K y el extremo grande a 300K ¿Cuál será la rapidez de flujo de calor que se obtendrá si se aislan los cuatro lados? Suponga que la conducción de calor se lleva a cabo de manera unidimensional. Para la conductividad térmica del asbesto puede tomarse el valor 0.173 W/m. K.

15.12 Resuelva el problema 15.11 en el caso en que la sección transversal más grande se encuentre a la temperatura más alta y la pequeña a 300 K.

15.13 Resuelva el problema 15.11 si, además de una sección transversal variable, la conductividad térmica varía de acuerdo con la ecuación $k = k_0(1+\beta T)$, donde $k_0 = 0.138$, $\beta = 1.95 \times 10^4$, T = temperatura en grados Kelvin y k está dada en W/m.K. Compare este resultado con el que se obtuvo usando un valor de k calculado usando la temperatura media aritmética.

15.14 Resuelva el problema 15.11 si la placa de asbesto tiene un tornillo de acero de 1.905 cm que pasa a través de su centro.

15.15 Una tubería de 4 in DE se utilizará para transportar metales líquidos y su temperatura exterior, en condiciones de operación, será de 1400° F; su aislamiento, colocado en la superficie exterior de la tubería, tiene un grosor de 6 in y su conductividad térmica es

$$k = 0.08(1 - 0.0003T)$$

donde k está dada en Btu/h ft° F y T en ° F.

a) ¿Cuál sería el grosor de aislamiento requerido para que la temperatura exterior de aislamiento no alcance una temperatura superior de 300° F?

b) ¿Cuál será la rapidez de flujo de calor en estas condiciones?

15.16 Va a fluir agua a 40° F a través de una tubería de 1 1/2 in de acero de cédula 40. La superficie exterior de la tubería se va aislar por medio de una capa de 1 in de grosor, de mangnesia al 85% y una capa apretada de lana de vidrio (k =0.022 Btu/ ft° F) de 1 in de grueso. El aire circundante se encuentra a 100° F.

a) ¿Qué material deberá colocarse próximo a la superfiecie de la tubería para producir el máximo efecto aislante?

(b) ¿Cuál será el flujo de calor con base en la superficie exterior de la tubería?

Los coeficientes de transferencia de calor conventivo de las superficies interior y exterior son 100 Btu/h ft² °F y 5 Btu/h ft² °F, respectivamente.

15.17 Una tubería de acero, cuyo diámetro nominal es de 1 in y cuya superficie exterior está a 400° F está rodeado de aire a 90° y su coeficiente de transferencia de calor convectivo entre la superficie de la tubería y el aire es igual a 1.5 Btu/h ft² °F. Se propone añadir a la tubería un material aislante, cuya conductividad térmica es de 0.06 Btu/h ft °F, para reducir la pérdida de calor a la mitad. ¿Qué grosor debe tener la capa de material aislante si tanto la temperatura superficial de la tubería como h_o, permanecen constantes?

15.18 Si dadas las condiciones del problema 15.17, h_o, dada en Btu/h ft² °F, varía de acuerdo con la ecuación $h_0 = 0.575/D_0$, donde D_0 es el diámetro externo del aislamiento en pies, determínese el grosor de la capa de material aislante necesario para que el flujo de calor del tubo sin aislamiento se reduzca a la mitad.

15.19 Una placa de acero de 2 in de grosor, que mide 10 in de diámetro se calienta desde abajo por medio de una placa caliente, cuya superficie superior está expuesta al aire a una temperatura de 80° F. El coeficiente de transferencia de calor en la superficie superior es de 5 Btu/h² ft° F y la k para el acero es de 25 Btu/h ft° F.

a) ¿Cuánto calor debe suministrarse a la superficie inferior de la placa de acero si su superficie superior permanece a 160° F? (incluya la radiación)

b) ¿Cuáles son las cantidades relativas de energía disipada de la superficie superior del acero por convección y radiación?

15.20 Si en el problema 15.9, la placa estuviera hecha de asbesto, k =0.10 Btu/h ft °F, ¿cuál será la temperatura de la parte superior del asbesto si la placa celiente tiene una potencia nominal de 800 W?

15.21 La radiación solar incidente en una placa de acero de 2 ft cuadrados es de 400 Btu/h. La placa tiene un grosor de 1.4 in y está colocada horizontalmente sobre una superficie aislante, encontrándose su superficie superior en contacto con aire a 90° F. Si el coeficiente de calor convectivo entre la superficie superior y el aire circundante, es de 4 Btu/h ft² ° F, ¿cuál será la temperatura del estado permanente de la placa?

15.22 Si, en el problema 15.21, la superficie interior de la placa está en contacto con aire cuyo coeficiente de transferencia de calor convectivo es de 3 Btu/h ft² ° F, ¿cuál será la temperatura en estado permanente que se alcanzará:

a) suponiendo que no hay emisión radiante proveniente de la placa?

b) si se toma en cuenta la emisión radiante que se aleja de la superficie superior de la placa?

15.23 En el dibujo que aparece abajo puede apreciarse la sección transversal de una ventana de las que se usan como pretección en el invierno. ¿Qué cantidad de calor se perderá a través de una ventana cuyas medidas son: 1.83 m por 3.66 m en un día frío en el que las temperaturas interior y exterior son, respectivamente, de 295 K y 250K?

15.24 Compare la pérdida de calor sufrida a través de la ventana descrita en el problema anterior bajo las mismas condiciones excepto que la ventana consta de un solo vidrio cuyo grosor es de 32 cm.

16
ECUACIONES DIFERENCIALES DE LA TRANSFERENCIA DE CALOR

Ahora se estudiarán las ecuaciones fundamentales correspondientes a un volumen diferencial de control desde el punto de vista de la primera ley de la termodinámica, en forma paralela a aquella en la que se examinó la transferencia de momento en el capítulo 9. La expresión de la primera ley que describe al volumen de control será nuestro medio básico de análisis. Además, podrán aplicarse ciertas ecuaciones diferenciales que se obtuvieron en secciones anteriores.

16.1 LA ECUACION DIFERENCIAL GENERAL DE TRANSFERENCIA DE ENERGIA

Analicemos ahora el volumen de control cuyas dimensiones son Δx, Δy, Δz y que aparece en la figura 16.1. Consulte la expresión de la primera ley de la termodinámica que describe al volumen de control

$$\frac{\delta Q}{dt} - \frac{\delta W_s}{dt} - \frac{\delta W_\mu}{dt} = \iint_{\text{c.s.}} \left(e + \frac{P}{\rho}\right)\rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dA + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\text{c.v.}} e\rho\,dV \qquad (6\text{-}10)$$

En seguida aparecen los términos individuales evaluados y la explicación de su significado.

La rapidez neta de calor que se agregue al volumen de control incluirá todos los efectos de conducción, la energía térmica neta liberada dentro del volumen de control, debido a una reacción química y la disipación de energía eléctrica o nuclear. Los efectos de generación estarán incluidos en un solo término, $\dot{q}$ que es la rapidez volumétrica de generación de energía térmica,

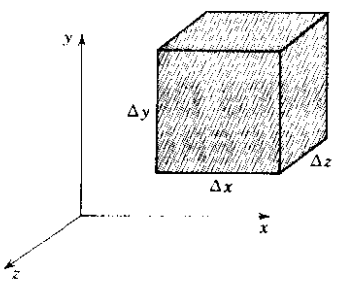


Figura 16.1 Un volumen diferencial de control.

cuyas unidades son W/m^3 o Btu/h ft^3. Por lo tanto, el primer término puede expresarse así:

$$\frac{\delta Q}{dt} = \left[k\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x+\Delta x} - k\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x} \right] \Delta y\, \Delta z + \left[k\frac{\partial T}{\partial y}\bigg|_{y+\Delta y} - k\frac{\partial T}{\partial y}\bigg|_{y} \right] \Delta x\, \Delta z$$
$$+ \left[k\frac{\partial T}{\partial z}\bigg|_{z+\Delta z} - k\frac{\partial T}{\partial z}\bigg|_{z} \right] \Delta x\, \Delta y + \dot{q}\, \Delta x\, \Delta y\, \Delta z \qquad (16\text{-}1)$$

Para este propósito, el valor de la rapidez de trabajo de flecha o término de potencia que se tomará será de cero. Este término se relaciona específicamente con el trabajo realizado por algún efecto dentro del volumen de control, que en el caso diferencial, no se encuentra presente. El término que corresponde a la potencia, por lo tanto, se calcula de la manera siguiente:

$$\frac{\delta W_s}{dt} = 0 \qquad (16\text{-}2)$$

La rapidez de trabajo viscoso en la superficie de control se calcula de manera formal, integrando el producto punto del esfuerzo viscoso y la velocidad en la superficie de control. Como esta operación resulta tedioso, se expresará la rapidez de trabajo viscoso así: $\Lambda\, \Delta x\, \Delta y\, \Delta z$, donde Λ es la rapidez de trabajo viscoso por unidad de volumen. El tercer término de la ecuación (6-10) se escribe:

$$\frac{\delta W_\mu}{dt} = \Lambda\, \Delta x\, \Delta y\, \Delta z \qquad (16\text{-}3)$$

La integral de superficie incluye la transferencia total de energía a través de la superficie de control debido al flujo de un fluio. Todos los términos asociados con la integral de superficie se han definido ya anteriormente. La integral de superficie es:

$$\iint_{\text{c.s.}} \left(e + \frac{P}{\rho} \right) \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, dA$$

$$= \left[\rho v_x \left(\frac{v^2}{2} + gy + u + \frac{P}{\rho} \right) \Big|_{x+\Delta x} - \rho v_x \left(\frac{v^2}{2} + gy + u + \frac{P}{\rho} \right) \Big|_x \right] \Delta y \, \Delta z$$
$$+ \left[\rho v_y \left(\frac{v^2}{2} + gy + u + \frac{P}{\rho} \right) \Big|_{y+\Delta y} - \rho v_y \left(\frac{v^2}{2} + gy + u + \frac{P}{\rho} \right) \Big|_y \right] \Delta x \, \Delta z$$
$$+ \left[\rho v_z \left(\frac{v^2}{2} + gy + u + \frac{P}{\rho} \right) \Big|_{z+\Delta z} - \rho v_z \left(\frac{v^2}{2} + gy + u + \frac{P}{\rho} \right) \Big|_z \right] \Delta x \, \Delta y \qquad (16\text{-}4)$$

El término que describe la acumulación de energía, describiendo la variación de la energía total dentro del volumen de control como función del tiempo, es el siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\text{C.V.}} e\rho \, dV = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{v^2}{2} + gy + u \right] \rho \, \Delta x \, \Delta y \, \Delta z \qquad (16\text{-}5)$$

Las ecuaciones (16-1) y (16-5) pueden combinarse ahora, como lo indica la expresión general de la primera ley, ecuación (6-10). Haciendo esta combinación y dividiendo la ecuación entre el volumen del elemento, se obtendrá:

$$\frac{k(\partial T/\partial x)|_{x+\Delta x} - k(\partial T/\partial x)|_x}{\Delta x} + \frac{k(\partial T/\partial y)|_{y+\Delta y} - k(\partial T/\partial y)|_y}{\Delta y}$$
$$+ \frac{k(\partial T/\partial z)|_{z+\Delta z} - k(\partial T/\partial z)|_z}{\Delta z} + \dot{q} + \Lambda$$
$$= \frac{\{\rho v_x [(v^2/2) + gy + u + (P/\rho)]\|_{x+\Delta x} - \rho v_x [(v^2/2) + gy + u + (P/\rho)]|_x\}}{\Delta x}$$
$$+ \frac{\{\rho v_y [(v^2/2) + gy + u + (P/\rho)]\|_{y+\Delta y} - \rho v_y [(v^2/2) + gy + u + (P/\rho)]\|_y\}}{\Delta y}$$
$$+ \frac{\{\rho v_z [(v^2/2) + gy + u + (P/\rho)]\|_{z+\Delta z} - \rho v_z [(v^2/2) + gy + u + (P/\rho)]\|_z\}}{\Delta z}$$
$$+ \frac{\partial}{\partial t} \rho \left(\frac{v^2}{2} + gy + u \right)$$

Al evaluar esta ecuación en el límite, cuando Δx, Δy, Δz, tienden a cero, esta ecuación se transforma en:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} + \Lambda$$
$$= \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho v_x \left(\frac{v^2}{2} + gy + u + \frac{P}{\rho} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho v_y \left(\frac{v^2}{2} + gy + u + \frac{P}{\rho} \right) \right]$$
$$+ \frac{\partial}{\partial z} \left[\rho v_z \left(\frac{v^2}{2} + gy + u + \frac{P}{\rho} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{v^2}{2} + gy + u \right) \right] \qquad (16\text{-}6)$$

La ecuación (16-6) tiene una aplicación completamente general. Si se introduce, ahora, la derivada sustancial, se podrá escribir la ecuación (16-6) en la forma:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\dot{q}+\Lambda$$
$$=\nabla\cdot(P\mathbf{v})+\left(\frac{v^2}{2}+u+gy\right)\left(\nabla\cdot\rho\mathbf{v}+\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)+\frac{\rho}{2}\frac{Dv^2}{Dt}+\rho\frac{Du}{Dt}+\rho\frac{D(gy)}{Dt}$$

Si se utiliza la ecuación de continuidad, que es la (9-2), se puede reducir esta ecuación a la forma:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\dot{q}+\Lambda$$
$$=\nabla\cdot P\mathbf{v}+\frac{\rho}{2}\frac{Dv^2}{Dt}+\rho\frac{Du}{Dt}+\rho\frac{D(gy)}{Dt} \qquad (16\text{-}7)$$

Con la ayuda de la ecuación (9-19), válida para el flujo incompresible de un fluido cuya μ es constante, el segundo término del lado derecho de la ecuación (16-7), se transforma en:

$$\frac{\rho}{2}\frac{Dv^2}{Dt}=-\mathbf{v}\cdot\nabla P+\mathbf{v}\cdot\rho\mathbf{g}+\mathbf{v}\cdot\mu\nabla^2\mathbf{v} \qquad (16\text{-}8)$$

y para flujos incompresibles, el primer término del lado derecho de la ecuación (16-7) queda:

$$\nabla\cdot P\mathbf{v}=\mathbf{v}\cdot\nabla P \qquad (16\text{-}9)$$

Al sustituir las ecuaciones (16-8) y (16-9) en la ecuación (16-7) y escribir los términos de conducción en la forma: $\nabla\cdot k\nabla T$, se tendrá:

$$\nabla\cdot k\nabla T+\dot{q}+\Lambda=\rho\frac{Du}{Dt}+\rho\frac{D(gy)}{Dt}+\mathbf{v}\cdot\rho\mathbf{g}+\mathbf{v}\cdot\mu\nabla^2\mathbf{v} \qquad (16\text{-}10)$$

Se deja como ejercicio al lector, la verificación de que la ecuación (16-10) se reduce a la forma:

$$\nabla\cdot k\nabla T+\dot{q}+\Lambda=\rho c_v\frac{DT}{Dt}+\mathbf{v}\cdot\mu\nabla^2\mathbf{v} \qquad (16\text{-}11)$$

La función Λ se puede expresar en función de la porción viscosa de los términos correspondientes a los esfuerzos normal y cortante en las ecuaciones (7-10) y (7-11). En el caso de los flujos incompresibles, se escribe en la forma:

$$\Lambda=\mathbf{v}\cdot\mu\nabla^2\mathbf{v}+\Phi \qquad (16\text{-}12)$$

donde la "función de disipación", Φ, está dada por

$$\Phi = 2\mu\left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2\right] + \mu\left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)^2\right]$$

Si se sustituye por Λ en la ecuación (16-11), se observará que la ecuación de la energía se transforma en:

$$\nabla \cdot k\nabla T + \dot{q} + \Phi = \rho c_v \frac{DT}{Dt} \tag{16-13}$$

Se observará en la ecuación (16-12) que Φ es una función de la viscosidad del fluido y de la rapidez de deformación cortantes y que su dominio es positivo. El efecto de la disipación viscosa es siempre el de aumentar la energía interna a expensas, ya sea de la energía potencial o de la presión de estancamiento. La función de disipación es despreciable en todos los casos que se estudiarán; su efecto es importante en las capas supersónicas límite.

16.2 FORMAS ESPECIALES DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE ENERGIA

Las formas de la ecuación de la energía, que pueden aplicarse a casos que se encutran comúnmente, son las que aparecen a continuación. En todos los casos, el término de disipación se considera tan pequeño que puede ignorársele.

I. Ecuación aplicable a un fluido incompresible sin "fuentes de energía y con una k constante.

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = k\nabla^2 T \tag{16-14}$$

II. Ecuación de energía aplicable a un flujo isobárico sin fuentes de energía y con una k constante

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = k\nabla^2 T \tag{16-15}$$

Nótese que las ecuaciones (16-14) y (16-15) son idénticas y, sin embargo, se utilizan en situaciones físicas totalmente diferentes.

III. En una situación tal que no exista movimiento de fluido, toda la transferencia de calor se realiza por conducción. Si esta situación

existe, como indudablemente ocurre en los sólidos en los que la ecuación de la energía se transforma en:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot k \nabla T \tag{16-16}$$

La ecuación (16-16) se aplica en general a la conducción de calor. No se ha hecho ninguna suposición respecto a la constante k. Si la conductividad térmica es constante, la ecuación de la energía es

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T + \frac{\dot{q}}{\rho c_p} \tag{16-17}$$

donde la razón $k/\rho c_p$ se ha sustituído por el término α, al cual se le llama *difusividad térmica*. Puede verse que las unidades de α son L^2/t; en el sistema SI se expresa en m^2/seg. y en el sistema inglés en ft^2/h. Si el medio conductor no contiene fuentes de calor, la ecuación (16-17) se reduce a la *ecuación de Fourier de campo*,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T \tag{16-18}$$

a la cual ocasionalmente se hace referencia como la segunda "ley" de Fourier de la conducción de calor.

En un sistema en el que las fuentes de calor se encuentren presentes pero en el que no haya variación de tiempo, la ecuación (16-17) se reduce a la *ecuación de Poisson*:

$$\nabla^2 T + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \tag{16-19}$$

La última forma que la ecuación de conducción de calor que se presentará aquí, se utiliza en el estado constante sin fuentes de calor. En este caso, la distribución de la temperatura debe satisfacer la *ecuación de Laplace*:

$$\nabla^2 T = 0 \tag{16-20}$$

Cada una de las ecuaciones, desde la (16-17) hasta la (16-20) se ha escrito en su forma general, por lo cual todas ellas son aplicables a cualquier sistema ortogonal de coordenadas. Si el operador Laplaciano, ∇^2 se escribe en la forma apropiada, se logrará hacer la transformación al sistema de coordenadas deseado. La ecuación de campo de Fourier, en coordenadas rectangulares, es:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \tag{16-21}$$

en coordenadas cilíndricas es:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right] \tag{16-22}$$

y en coordenadas esféricas:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2}\right] \tag{16-23}$$

Se sugiere al lector que consulte el Apéndice B para que estudie ejemplos de variables expresadas en los sistemas de coordenadas cilíndricas y esféricas.

16.3 CONDICIONES DE FRONTERA COMUNMENTE ENCONTRADAS

Al resolver una de las ecuaciones diferenciales que se han encontrado hasta ahora, la situación física existente determinará las condiciones iniciales o de frontera, o ambas, que deberá satisfacer la solución final.

Las *condiciones iniciales* se refieren específicamente a los valores de T y v que prevalecen al iniciarse el intervalo de tiempo que se está estudiando. Las condiciones iniciales pueden especificarse de manera sencilla en la siguiente forma: $T|_{t=0} = T_0$ (constante), o de manera más complicada si la distribución de temperaturas al iniciar la medición del tiempo, está en función de alguna variable espacial.

Las *condiciones de frontera* se refieren a los valores de T y v existentes en ciertas posiciones específicas en las fronteras de un sistema, esto es, para valores dados de las variables especiales significativas. Un caso frecuente de condiciones de frontera para la temperatura son las *fronteras isotérmicas*, a lo largo de las cuales la temperatura es constante y las *fronteras aisladas* a través de las cuales no se lleva a cabo la conducción del calor en el lugar en que de acuerdo con la ecuación de Fourier de rapidez, la derivada de la temperatura, normal a la frontera, es cero. A menudo existen funciones más complicadas de la temperatura en las fronteras del sistema y la temperatura de la superficie puede, también, variar con el tiempo. También los mecanismos combinados de transferencia de energía pueden determinar condiciones de frontera. Una situación que a menudo se presenta en una frontera sólida es la de la igualdad entre la transferencia de calor y la superficie por conducción y el calor que abandona la superficie por convección. Esta condición aparece en la figura 16.2. En la superficie del lado izquierdo, la condición de frontera es:

$$h_h(T_h - T|_{x=0}) = -k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} \tag{16.24}$$

y en la superficie del lado derecho:

$$h_c(T|_{x=L} - T_c) = -k\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=L} \tag{16-25}$$

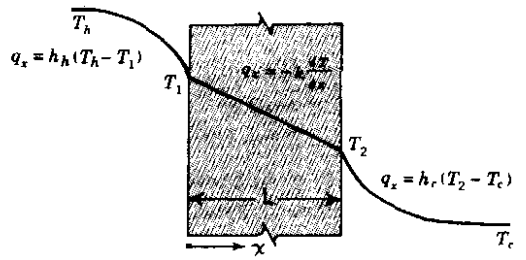


Figura 16.2 Conducción y convección en la frontera de un sistema.

En este momento resulta imposible preveer todas las condiciones, tanto iniciales como de frontera, que se necesitarán. Sin embargo, el estudiante debe percatarse de que estas condiciones están determinadas por la situación física. Las diversas ecuaciones que describen la transferencia de energía no son numerosas y se puede encontrar fácilmente una forma específica aplicable a una situación dada. El usuario de estas ecuaciones deberá escoger las condiciones iniciales y de frontera que resulten apropiadas para que la solución tenga sentido.

16.4 CONCLUSION

En este capítulo se han obtenido las ecuaciones diferenciales de la transferencia de energía y se han presentado algunas formas de éstas que pueden aplicarse en situaciones más específicas. También se han hecho algunos comentarios relacionados con las condiciones iniciales y de frontera.

En los siguientes capítulos, los análisis de la transferencia de energía empezarán con la ecuación diferencial adecuada. Se presentarán numerosas soluciones y otras más se dejarán como ejercicio, al estudiante. Ahora ya se han obtenido y examinado los medios adecuados para el análisis de la transferencia de calor. Sólo resta al estudiante familiarizarse con su uso.

PROBLEMAS

16.1 La ecuación de Fourier de campo de coordenadas cilíndricas es:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)$$

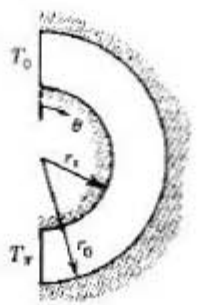
(a) ¿A qué forma se reduce esta ecuación en el caso de la transferencia radial de calor en el estado permanente?
(b) Dadas las siguientes condiciones de frontera:

$$T = T_i \qquad \text{a } r = r_i$$
$$T = T_0 \qquad \text{a } r = r_o$$

Resuelva la ecuación resultante del inciso (a) correspondiente al perfil de temperatura.
(c) Encuentre una expresión para la rapidez de flujo, q_r, usando el resultado obtenido en el inciso (b).

16.2 Realice las mismas operaciones que en los incisos a, b y c del problema 16.1 con respecto a un sistema esférico.

16.3 A partir de la ecuación de Fourier de campo en coordenadas cilíndricas,
(a) Reduzca esta ecuación a la forma aplicable a la transferencia de calor en el estado permanente en la dirección de θ.
(b) Resuelva para el perfil de temperatura, con las condiciones que aparecen en la figura, o sea; $T = T_0$ cuando $\theta = 0$ $T = T_\pi$ cuando $\theta = \pi$, sabiendo que las superficies readiales están aisladas.



(c) Genere una expresión que describa la rapidez de flujo de calor, q_θ, usando el resultado del inciso (b).
(d) ¿Cuál es el factor de forma correspondiente a esta configuración?

16.4 Demuestre que la ecuación (16-10) se reduce a la forma:

$$\nabla \cdot k\nabla T + \dot{q} + \Lambda = \rho c_v \frac{DT}{Dt} + \mathbf{v} \cdot \mu \nabla^2 \mathbf{v}$$

16.5 A partir de la ecuación (16-7), demuestre que en el caso de un fluido cuya conductividad térmica sea constante, y no tenga fuentes de energía, las ecuaciones (16-14) y (16-15) son las que se obtienen para la descripción de las condiciones isobárica y de incompresibilidad (despreciando la disipación viscosa).

16.6 Resuelva la ecuación (16-17) para la distribución de la temperatura en una pared plana si la generación de calor interno, por unidad de volumen, varía de acuerdo con la relación $\dot{q} = \dot{q}_0 e^{-\beta x/L}$. Las condiciones de frontera que se utilizan son las siguientes: $T = T_0$ en $x = 0$ y $T = T_L$ en $x = L$.

16.7 Resuelva el problema 16.6 utilizando las mismas condiciones, excepto que, en $x = L$, $dT/dx = 0$.

16.8 Resuelva el problema 16.6 para las mismas condiciones, excepto que, en $x = L$, $dT/dx = \xi$ (constante).

16.9 Use la relación $Tds = dh\text{-}dP/\rho$ para demostrar que el efecto, de la función de disipación, Φ, es aumentar la entropía, S. ¿Es el mismo el efecto de transferencia de calor que la función de disipación de calor?

16.10 En una capa límite en la cual el perfil de velocidad está dado por

$$\frac{v_x}{v_\infty} = \frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3$$

donde δ es el grosor de la capa límite de velocidad, trace la función adimensional de disipación, $\Phi\delta^2/\mu v_\infty{}^2$ contra y/δ.

17
CONDUCCION EN EL ESTADO PERMANENTE

En la mayor parte del equipo utilizado para transferir calor, la energía fluye de un fluido a otro a través de una pared sólida. Ya que la transferencia de energía a través de cada medio es un paso del proceso, es esencial la perfecta comprensión del mecanismo de conducción de la transferencia de energía a través de los sólidos homogéneos, para poder resolver la mayoría de los problemas de transferencia de calor.

En este capítulo dirigiremos nuestra atención a la conducción de calor en el estado permanente. El hecho de que el estado sea permanente implica que las condiciones de temperatura, densidad y otras similares son independientes del tiempo en todos los puntos de la región de conducción. El análisis se hará en forma análoga al que se efectuó al analizar un elemento diferencial de fluido en un flujo laminar, así como a los análisis que se efectuarán de la difusión molecular en estado permanente. Durante las explicaciones se utilizarán dos clases de presentaciones: (1) la ecuación diferencial que rige el proceso se generará a través del concepto de volumen de control y (2) la diferencial principal se obtendrá eliminando todos los términos irrelevantes que contenga la ecuación diferencial general que rige la transferencia de energía. Por medio del uso de ambos sistemas, el estudiante podrá comprender rápidamente la importancia de los diversos términos de la ecuación diferencial general.

17.1 CONDUCCION UNIDIMENSIONAL

En el caso de la conducción en el estado permanente, independientemente de la generación interna de energía, la ecuación diferencial general se reduce a la ecuación de Laplace,

$$\nabla^2 T = 0 \tag{16-20}$$

Aunque esta ecuación implica que se necesita más de una coordenada especial para describir el campo de temperatura, muchos problemas son más sencillos a causa de la geometría de la región de conducción o debido a algunas simetrías en la distribución de la temperatura. A menudo surgen casos unidimensionales.

La transferencia unidimensional de energía en el estado permanente, por conducción, es el proceso que se describe con mayor facilidad ya que la condición impuesta al campo de temperaturas es una ecuación diferencial ordinaria. En el caso de la conducción unidimensional, la ecuación (16-20) se reduce a:

$$\frac{d}{dx}\left(x^i \frac{dT}{dx}\right) = 0 \tag{17-1}$$

donde $i = 0$ en coordenadas rectangulares, $i = 1$ en coordenadas cilíndricas e $i = 2$ en coordenadas esfércias.

Los procesos unidimensionales se llevan a cabo sobre superficies planas, tales como las paredes de los hornos; en elementos cilíndricos, tales como las tuberías que conducen vapor y en elementos esféricos, tales como los conductos a presión de los reactores nucleares. En esta sección estudiaremos la conducción en el estado permanente realizada a través de sistemas simples en los cuales la temperatura y el flujo de energía son funciones de una sola coordenada espacial.

Pared Plana. Examine la conducción de energía a través de una pared plana como la que puede observarse en la figura 17.1. La ecuación unidimensional de Laplace, se resuelve fácilmente, obteniéndose:

$$T = C_1 x + C_2 \tag{17-2}$$

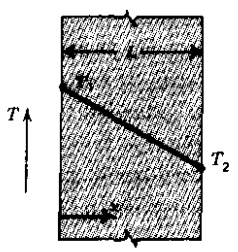


Figura 17.1 Pared plana con una distribución unidimensional de temperatura.

Las dos constantes se obtienen aplicando las condiciones de frontera:

$$\text{a } x = 0 \qquad T = T_1$$

y

$$\text{a } x = L \qquad T = T_2$$

Estas constantes son:

$$C_2 = T_1$$

y

$$C_1 = \frac{T_2 - T_1}{L}$$

El perfil de la temperatura se transforma en

$$T = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1$$

ó

$$T = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{L} x \tag{17-3}$$

y es lineal, como puede verse en la figura 17.1.

El flujo de energía se evalúa utilizando la ecuación de Fourier de rapidez de transferencia,

$$\frac{q_x}{A} = -k\frac{dT}{dx} \tag{15-1}$$

El gradiente de la temperatura, dT/dx se obtiene diferenciando la ecuación (17-3), lo cual da como resultado:

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{T_1 - T_2}{L}$$

y sustituyendo este término en la ecuación de rapidez de transferencia, se obtendrá, para una pared plana cuya conductividad térmica sea constante

$$q_x = \frac{kA}{L}(T_1 - T_2) \tag{17-4}$$

La cantidad kA/L es característica de una pared plana y se llama *conductancia térmica*. El recíproco de la conductancia térmica, L/kA, es la *resistencia térmica*.

Paredes Compuestas. El flujo constante de energía a través de varias paredes en serie es un fenómeno que se encuentra a menudo. El diseño típico de un horno incluye una pared que le da rigidez estructural, una intermedia aislante, y una tercera que le da buena apariencia exterior. Esta pared plana compuesta es como la que aparece en la figura 17.2.

Se sugiere al lector que desee enterarse de la solución de este sistema, que regrese a la sección 15.5.

El ejemplo siguiente muestra el uso de la ecuación de transferencia de energía correspondiente a una pared compuesta para predecir la distribución de temperaturas en las paredes.

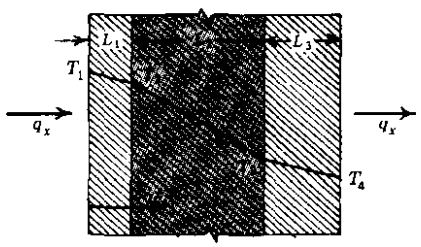


Figura 17.2 Distribución de temperaturas correspondiente a la conducción de energía en estado permanente a través de una pared plana compuesta.

EJEMPLO 1

La pared de un horno está formada por 3 capas, una de 4 in de ladrillo refractario ($k = 0.9$ Btu/ft^2 h °F/ft) seguida de una de 9 in de ladrillo aislante de caolín

$$(k = 0.1 \text{ Btu/ft}^2 \text{ h } ^\circ\text{F/ft})$$

y finalmente, otra pared de 2 in de tabique ordinario ($k = 0.4$ Btu/ft^2 h °F/ft). La temperatura de la superficie interior es de 2000 °F y la de la superficie exterior, de 200 °F. ¿Cuáles son las temperaturas de las superficies de las paredes que están en contacto?

Las resistencias individuales de las paredes por pie cuadrado de área son:

$$R_{1,\text{refractario}} = \frac{L_1}{Ak} = \left(\frac{4 \text{ in.}}{12 \text{ in./ft}}\right)\left(\frac{1}{1 \text{ ft}^2}\right)\left(\frac{1}{0.9 \text{ Btu/ft}^2 \text{ hr °F/ft}}\right) = 0.37 \text{ hr °F/Btu}$$

$$R_2, \text{ kaolin} = \frac{L_2}{Ak_2} = \left(\frac{9}{12}\right)\left(\frac{1}{1}\right)\left(\frac{1}{0.1}\right) = 7.50 \text{ hr °F/Btu}$$

$$R_3, \text{ tabique} = \frac{L_3}{Ak_3} = \left(\frac{2}{12}\right)\left(\frac{1}{1}\right)\left(\frac{1}{0.4}\right) = 0.417 \text{ hr °F/Btu}$$

La resistencia total de estas paredes en serie es igual a $0.37 + 7.5 + 0.417$, o sea 8.29 h °F/Btu. La disminución total de temperatura a través de las tres paredes es igual a

$$(T_1 - T_4) = 2000^\circ - 200^\circ = 1800 \text{ °F}.$$

La rapidez de transferencia de energía se calcula usando la ecuación (15-16), de la manera siguiente:

$$q = \frac{T_1 - T_4}{\sum R_T} = \frac{1800^\circ\text{F}}{8.29 \text{ hr °F/Btu}} = 217 \text{ Btu/hr} \qquad (63.6\text{W})$$

Como esta es una situación de estado permanente, la rapidez de transferencia de energía es constante en todo punto de la trayectoria de transferencia. Las temperaturas intermedias pueden calcularse resolviendo la ecuación de rapidez de cada pared. Por ejemplo, se pueden determinar las temperaturas intermedias individuales de rapidez de transferencia de energía de las paredes

$$T_1 - T_2 = q\frac{L_1}{Ak_1}$$

ó

$$2000° - T_2 = (217 \text{ Btu/hr})(0.37 \text{ hr °F/Btu})$$

dando como resultado:

$$T_2 = 1920°\text{F} \qquad (1322 \text{ K})$$

y

$$T_3 - T_4 = q\frac{L_3}{Ak_3}$$

ó

$$T_3 - 200° = (217 \text{ Btu/hr})(0.417 \text{ hr °F/Btu})$$

entonces:

$$T_3 = 290.5°\text{F} \qquad (417 \text{ K})$$

Hay un gran número de casos en los que una pared está compuesta por una combinación de trayectorias de flujo de energía en serie y en paralelo. Un ejemplo de una pared como la descrita es la que aparece en la figura 17.3, en la cual se ha utilizado acero para reforzar una pared de concreto.

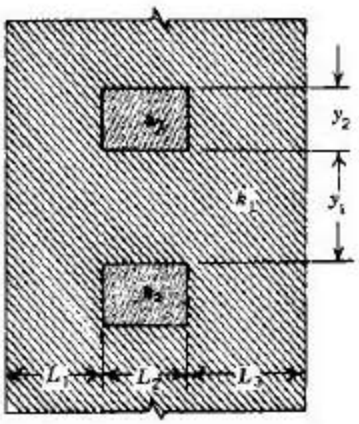


Figura 17.3 Una pared compuesta en serie y en paralelo.

La pared compuesta se puede dividir en tres secciones cuyas longitudes sean L_1, L_2 y L_3 y se pueden evaluar la resistencia térmica de cada uno de estos tramos.

La capa intermedia que existe entre los planos 2 y 3 consta de dos trayectorias térmicas en paralelo; la conductancia térmica efectiva es la suma de las conductancias de los dos materiales. Para la sección de pared cuya altura es $y_1 + y_2$ y que tiene una profundidad unitaria, la resistencia es:

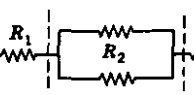
$$R_2 = \frac{1}{\frac{k_1 y_1}{L_2} + \frac{k_2 y_2}{L_2}} = L_2\left(\frac{1}{k_1 y_1 + k_2 y_2}\right)$$

La resistencia total de esta pared es:

$$\sum R_T = R_1 + R_2 + R_3$$

ó

$$\sum R_T = \frac{L_1}{k_1(y_1 + y_2)} + L_2\left(\frac{1}{k_1 y_1 + k_2 y_2}\right) + \frac{L_3}{k_1(y_1 + y_2)}$$

El circuito eléctrico 

es análogo a la pared compuesta.

La rapidez de energía transferida del plano 1 al plano 4 se obtiene por medio de una forma modificada de la ecuación (15-16):

$$q = \frac{T_1 - T_4}{\sum R_T} = \frac{T_1 - T_4}{\frac{L_1}{k_1(y_1 + y_2)} + L_2\left(\frac{1}{k_1 y_1 + k_2 y_2}\right) + \frac{L_3}{k_1(y_1 + y_2)}} \qquad (17\text{-}5)$$

Es importante darse cuenta de que esta ecuación es solamente una aproximación. En realidad existe una distribución importante de temperaturas en la dirección de y cercana al material cuya conductividad térmica es mayor.

En el presente análisis de las paredes compuestas, no se tomó en cuenta la disminución de temperatura en la superficie de contacto entre dos sólidos diferentes. Esta suposición no siempre es válida ya que a menudo existen espacios de vapor ocasionados por superficies rugosas o hasta capas de óxido depositadas sobre las superficies de los metales. Estas resistencias adicionales de contacto se deben tomar en cuenta en las ecuaciones precisas de transferencia de energía.

Cilindro Largo y Hueco. El flujo de energía radial por conducción a través de un cilindro largo y hueco es otro ejemplo de conducción unidimensional. El flujo radial de calor correspondiente a esta configuración se calculó en el ejemplo 1 del capítulo 15, resultando:

$$\frac{q_r}{L} = \frac{2\pi k}{\ln(r_o/r_i)}(T_i - T_o) \qquad (17\text{-}6)$$

donde r_i es el radio interior, r_o el radio exterior, T_i la temperatura de la superficie interior y T_o la temperatura de la superficie exterior. De nuevo se puede emplear el concepto de resistencia; la resistencia térmica del cilindro hueco es:

$$R = \frac{\ln (r_o/r_i)}{2\pi kL} \tag{17-7}$$

La distribución radial de temperaturas de un cilindro largo y hueco se puede evaluar utilizando la ecuación 17-1 en su forma cilíndrica,

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = 0 \tag{17-8}$$

Si se resuelve esta ecuación de acuerdo con las condiciones de frontera:

$$\text{a } r = r_i \quad , \quad T = T_i$$

y

$$\text{a } r = r \qquad T = T$$

se observará que el perfil de la temperatura es:

$$T(r) = T_i - \frac{T_i - T_o}{\ln (r_o/r_i)} \ln \frac{r}{r_i} \tag{17-9}$$

Por lo tanto, la temperatura de un cilindro largo y hueco es una función logarítmica de su radio, r, en tanto que la distribución de temperaturas de una pared plana es lineal.

El siguiente ejemplo servirá para analizar la conducción radial de energía a través de un cilindro largo y hueco.

EJEMPLO 2

Una tubería larga, que conduce vapor y cuyo radio exterior es r_2, está cubierta con una capa de material aislante térmico, cuyo radio exterior es r_3. La temperatura a la que se encuentra la superficie exterior del tubo, T_2 y la temperatura del aire circundante, T_∞, son fijas. La pérdida de energía por unidad de área de superficie externa de la capa aislante es la descrita por la ecuación de Newton de rapidez de transferencia

$$\frac{q_r}{A} = h(T_3 - T_\infty) \tag{15-11}$$

¿Puede la pérdida de energía aumentar proporcionalmente con el aumento en el grosor de la capa aislante? Si esto es posible, ¿bajo qué condiciones ocurrirá esto? En la figura 17.4 puede verse este cilindro compuesto.

En el ejemplo 3 del capítulo 15 se demostró que la resistencia térmica de un elemento cilíndrico hueco, es:

$$R = \frac{\ln (r_o/r_i)}{2\pi kL} \tag{17-10}$$

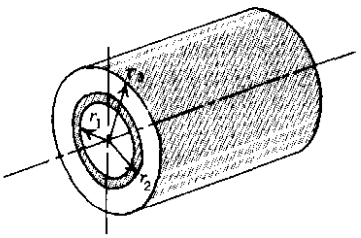


Figura 17.4 Cilindro hueco compuesto, en serie.

En este ejemplo, la diferencia total de temperatura es $T_2 - T_\infty$. Tanto la resistencia debida a la capa aislante, como a la de la película de aire circundante, son:

$$R_2 = \frac{\ln (r_3/r_2)}{2\pi k_2 L}$$

para la capa aislante, y:

$$R_3 = \frac{1}{hA} = \frac{1}{h2\pi r_3 L}$$

para la capa de aire.

Si se sustituyen estos términos en la ecuación de flujo radial de calor y reacomodando los términos de ésta, se obtiene:

$$q_r = \frac{2\pi L(T_2 - T_\infty)}{[\ln (r_3/r_2)]/k + 1/hr_3} \tag{17-11}$$

El efecto dual de aumentar la resistencia a la transferencia, por conducción de energía y simultáneamente aumentar el área al aumentar r_3, sugiere que, para un tamaño dado de tubería existe un radio exterior particular para el cual la pérdida de calor es máxima. Como la razón r_3/r_2 aumenta logarítmicamente y el término $1/r_3$ decrece al aumentar r_3, la importancia relativa de cada uno de los términos de la resistencia, cambiará al variar el grosor de la capa aislante. En este ejemplo, L, T_2, T_g, K_2, h y r_2 se consideran constantes. Cuando se diferencia la ecuación (17-11) con respecto a r_3, se obtiene:

$$\frac{dq_r}{dr_3} = -\frac{2\pi L(T_2 - T_3)\left(\frac{1}{k_2 r_3} - \frac{1}{hr_3^2}\right)}{\left[\frac{1}{k_2}\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) + \frac{1}{hr_3}\right]^2} \tag{17-12}$$

El radio de la capa aislante asociado a la transferencia máxima de energía, o sea, el *radio crítico*, se encuentra haciendo $dq_r/dr_3 = 0$; la ecuación (17-12) se reduce a:

$$(r_3)_{\text{critical}} = \frac{k_2}{h} \tag{17-13}$$

En el caso en que la capa de aislamiento contenga 85% de aislante de magnesio ($k = 0.0692$ W/m · K) y un valor típico de coeficiente de transferencia de calor por convección natural ($h = 34$ W/m^2 · K) el radio crítico se calcula de la siguiente manera:

$$r_{crit} = \frac{k}{h} = \frac{0.0692 \text{ W/m·K}}{34 \text{ W/m}^2\text{·K}} = 0.0020 \text{ m} \qquad (0.0067 \text{ ft})$$

$$= 0.20 \text{ cm} \qquad (0.0787 \text{ in.})$$

Estos valores tan pequeños indican que, en cualquier problema práctico, se excederá el radio crítico. El problema es,entonces, el de si el radio crítico dado por la ecuación (17-13) representa una condición máxima o mínima, con relación a q. La evaluación de la segunda derivada, $d^2 q_r/dr_3{}^2$, cuando $r_3 = k/h$, da un resultado negativo, por lo tanto r_{crit} es una condición máxima. De ahí que q_r disminuya para cualquier valor de r_3 mayor que 0.0020 m.

Esfera Hueca. El flujo radial de calor a través de una esfera hueca es otro ejemplo de conducción unidimensional. En el caso de la conductividad térmica constante, la ecuación modificada de Fourier de rapidez de transferencia,

$$q_r = -k\frac{dT}{dr}A$$

puede usarse, y en la cual A = área de una esfera = $4\pi r^2$, dando:

$$q_r = -4\pi k r^2 \frac{dT}{dr} \qquad (17\text{-}14)$$

Cuando se integra esta ecuación usando las condiciones de frontera:

$$\text{cuando } T = T_i \qquad r = r_i$$

y

$$\text{cuando } T = T_o \qquad r = r_o$$

se obtiene

$$q = \frac{4\pi k(T_i - T_o)}{\dfrac{1}{r_i} - \dfrac{1}{r_o}} \qquad (17\text{-}15)$$

La distribución hiperbólica de temperatura

$$T = T_i - \left(\frac{T_i - T_o}{1/r_i - 1/r_o}\right)\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r}\right) \qquad (17\text{-}16)$$

se obtiene utilizando el mismo procedimiento que se siguió para obtener la ecuación (17-9). El estudiante encontrará útil realizar los pasos matemáticos necesarios para obtener los ecuaciones (17-15) y (17-16).

Conductividad Térmica Variable. Si la conductividad térmica del medio a través del cual se transifere la energía varía de manera significativa, no pueden aplicarse las ecuaciones establecidad anteriormente. Como la ecuación de Laplace supone que la conductividad térmica es constante, debe determinarse una nueva ecuación diferencial a partir de la ecuación general de transferencia de calor. En el caso de la conducción en estado permanente en la dirección de x, sin generación interna de energía, la ecuación indicada es:

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)=0 \qquad (17\text{-}17)$$

donde k puede ser función de T.

En muchos casos la conductividad térmica puede ser una función lineal de la temperatura en un conjunto considerable de valores. La ecuación de tal función lineal de la temperatura se puede expresar por medio de:

$$k = k_o(1+\beta T)$$

donde k_o y β son constantes de un material particular. En general, si un material satisface esta relación, β es negativa en los buenos conductores y positiva en los buenos aislantes. Se han determinado experimentalmente otras relaciones para el caso en que k es variable, en materiales específicos. La evaluación de la rapidez de transferencia de energía, cuando el material tiene una conductividad térmica variable, se explicó ya por medio del ejemplo 2 del capítulo 15.

17.2 CONDUCCION UNIDIMENSIONAL CON GENERACION INTERNA DE ENERGIA

En algunos sistemas, tales como calentadores de resistencia eléctrica o barras de combustible nuclear, el calor se genera dentro del medio conductor. Como es de esperar, la generación de energía dentro del medio conductor produce perfiles de temperatura diferentes de los que produce la conducción simple.

En esta sección se tomarán en cuenta dos casos sencillos, a manera de ejemplo: el de la conducción en estado permanente en un cilindro circular con generación uniforme u homogénea de energía y el de la conducción en estado permanente en una pared plana, con generación variable de energía. Carslaw y Jaeger,*así como Jakob†, escribieron trabajos excelentes que tratan con problemas más complicados.

*H. S. Carslaw y J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, Segunda edición, Oxford Univ. Press, Nueva York, 1959.
†M. Jakob, *Heat Transfer*, Nueva York, 1949.

Sólido Cilíndrico con Generación Homogénea de Energía. Sea un sólido cilíndrico con generación interna de energía, tal como puede apreciarse en la figura 17.5. Se considerará el cilindro lo suficientemente largo para que solamente

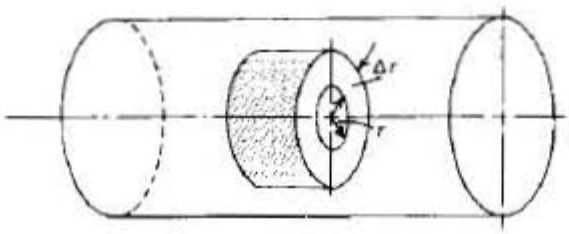


Figura 17.5 Elemento anular dentro de un cilindro circular y largo con generación interna de calor.

ocurra la conducción radial. La densidad ρ, la capacidad calorífica, c_p, y la conductividad térmica del material se considerarán constantes. El equilibrio de energía correspondiente al elemento es:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Rapidez de}\\ \text{conducción}\\ \text{de energía}\\ \text{hacia el}\\ \text{elemento}\end{array}\right\}+\left\{\begin{array}{l}\text{rapidez de}\\ \text{generación}\\ \text{de energía}\\ \text{dentro del}\\ \text{elemento}\end{array}\right\}-\left\{\begin{array}{l}\text{rapidez de}\\ \text{conducción}\\ \text{de energía}\\ \text{que sale del}\\ \text{elemento}\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{l}\text{rapidez de}\\ \text{acumulación}\\ \text{de energía}\\ \text{en el ele-}\\ \text{mento}\end{array}\right\} \qquad (17\text{-}18)$$

Si se aplica la ecuación de Fourier de la rapidez de transferencia y haciendo que $\dot{q}$ represente la rapidez de energía generada por unidad de volumen, la ecuación (17-18) puede expresarse por medio de la siguiente ecuación algebraica:

$$-k(2\pi rL)\frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_r+\dot{q}(2\pi rL\,\Delta r)-\left[-k(2\pi rL)\frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{r+\Delta r}\right]=\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}(2\pi rL\,\Delta r)$$

Si se divide cada término entre $2\pi rL\,\Delta r$, se obtiene:

$$\dot{q}+\frac{k[r(\partial T/\partial r)|_{r+\Delta r}-r(\partial T/\partial r)|_r]}{r\,\Delta r}=\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}$$

En el límite, cuando Δr tiende a cero, se genera la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{q}+\frac{k}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)=\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (17\text{-}19)$$

En condiciones de estado permanente, el término de acumulación es cero; al eliminar este término de la expresión anterior, la ecuación diferencial de un cilindro sólido con generación homogénea de energía, se transforma en:

$$\dot{q} + \frac{k}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = 0 \tag{17-20}$$

Las variables de esta ecuación se pueden separar e integrar, para producir la relación

$$rk\frac{dT}{dr} + \dot{q}\frac{r^2}{2} = C_1$$

ó

$$k\frac{dT}{dr} + \dot{q}\frac{r}{2} = \frac{C_1}{r}$$

A causa de la simetría del cilindro sólido, la condición de frontera que debe satisfacerse, establece que el gradiente de la temperatura debe ser finito en el centro del cilindro, donde $r = 0$. Esto sólo puede verificarse si $C_1 = 0$. Por esto, la ecuación anterior se reduce a:

$$k\frac{dT}{dr} + \dot{q}\frac{r}{2} = 0 \tag{17-21}$$

Al integrarse por segunda vez, se obtiene:

$$T = -\frac{\dot{q}r^2}{4k} + C_2 \tag{17-22}$$

Si se conoce la temperatura, T, en cualquier valor radial, tal como una superficie, puede evaluarse la segunda constante, C_2. Esto, desde luego, nos provee con la expresión completa del perfil de temperatura. El flujo de energía en la dirección radial puede obtenerse a partir de:

$$\frac{q_r}{A} = -k\frac{dT}{dr}$$

sistituyendo la ecuación (17-21), se obtiene:

$$\frac{q_r}{A} = \dot{q}\frac{r}{2}$$

ó

$$q_r = (2\pi rL)\dot{q}\frac{r}{2} = \pi r^2 L\dot{q} \tag{17-23}$$

Pared Plana con Generación Variable de Energía. El segundo caso relacionado con la generación de energía incluye un proceso de generación de energía y

que además es dependiente de la temperatura. Esta situación surge cuando se hace pasar una corriente eléctrica a través de un medio conductor que posea una resistividad eléctrica que varíe con la temperatura. En nuestro estudio supondremos que el término correspondiente a la generación de energía varía linealmente con la temperatura y que el medio conductor es una placa plana cuya temperatura, en ambas superficies es T_L. La generación de energía interna, está descrita por la ecuación:

$$\dot{q} = \dot{q}_L[1+\beta(T-T_L)] \tag{17-24}$$

donde $\dot{q}_L$ es la rapidez de generación en la superficie y β es una constante.

Con este modelo de la función de generación y puesto que ambas superficies están a la misma temperatura, la distribución de temperatura en la placa plana es simétrica en relación con el plano intermedio. En la figura 17.6 aparecen la pared plana y su sistema de coordenadas. La simetría de la distribución de temperatura requiere de un gradiente de temperatura igual a cero en $x = 0$. En condiciones de estado permanente se puede obtener la ecuación diferencial eliminando los términos irrelevantes de la ecuación diferencial general de

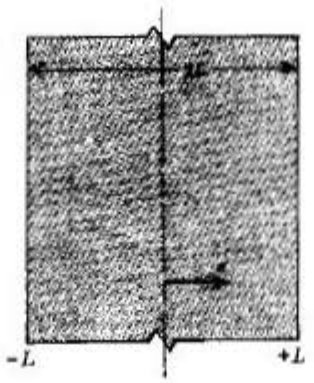


Figura 17.6 Placa plana con generación de energía dependiente de la temperatura.

transferencia de calor. La ecuación (16-19), se transforma, en el caso de la conducción en estado permanente en la dirección de x, en un sólido estacionario cuya conductividad térmica es constante, en:

$$\frac{d^2T}{dx^2}+\frac{\dot{q}_L}{k}[1+\beta(T-T_L)]=0$$

Las condiciones de frontera son:

$$\text{en } x=0 \qquad \frac{dT}{dx}=0$$

y

$$\text{en } x=\pm L \qquad T=T_L$$

Estas relaciones se pueden expresar en términos de una nueva variable, $\theta = T - T_L$, por medio de:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{\dot{q}_L}{k}(1 + \beta\theta) = 0$$

ó

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + C + s\theta = 0$$

donde $C = \dot{q}_L/k$ y $s = \beta\dot{q}_L/k$. Las condiciones de frontera son:

$$\text{en } x = 0 \qquad \frac{d\theta}{dx} = 0$$

y

$$\text{en } x = \pm L \qquad \theta = 0$$

La integración de esta ecuación diferencial se simplifica por medio de un segundo cambio de variable, sustituyendo $C + s\theta$ por ϕ en la ecuación diferencial y en las condiciones de frontera, se obtiene:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + s\phi = 0$$

cuando

$$x = 0 \qquad \frac{d\phi}{dx} = 0$$

y

$$x = \pm L \qquad \phi = C$$

La solución es

$$\phi = C + s\theta = A\cos(x\sqrt{s}) + B\,\text{sen}(x\sqrt{s})$$

ó

$$\theta = A_1\cos(x\sqrt{s}) + A_2\,\text{sen}(x\sqrt{s}) - \frac{C}{s}$$

La distribución de temperatura se transforma en:

$$T - T_L = \frac{1}{\beta}\left[\frac{\cos(x\sqrt{s})}{\cos(L\sqrt{s})} - 1\right] \qquad (17\text{-}25)$$

donde $s = \beta\dot{q}_L/k$ se obtiene aplicando las dos condiciones de frontera.

Los ejemplos cilíndrico y esférico de generación unidimensional, dependiente de la temperatura son más complicados; puede encontrarse la solución de estos en las referencias que se citaron en la pág. 312.

17.3 TRANSFERENCIA DE CALOR DE SUPERFICIES EXTENDIDAS

Una aplicación muy útil del análisis de la conducción unidimensional de calor es la descripción del efecto de las superficies extendidas. Es posible aumentar la transferencia de energía entre una superficie y un fluido adyacente aumentando la cantidad de área superficial que hace contacto con el fluido. Este aumento de área se realiza agregando superficies extendidas que pueden estar en la forma de aletas o espinas de diversas secciones transversales.

El análisis unidimensional de las superficies extendidas puede formularse en términos generales, tomando en consideración la situación presentada en la figura 17.7.

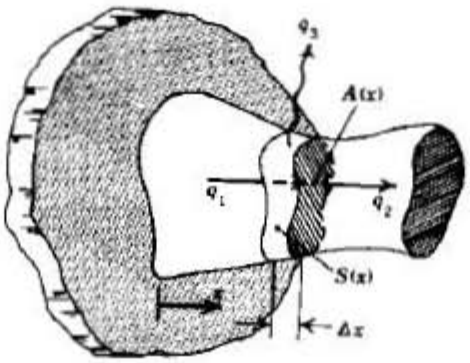


Figura 17.7 Superficie extendida de configuración general.

El área sombreada representa una porción de superficie extendida cuya área de sección transversal es variable y está representada por $A(x)$, cuya área superficial es $S(x)$, ambas funciones únicamente de x. En condiciones de estado permanente, la primera ley de la termodinámica, ecuación (6-10), se reduce a la expresión:

$$\frac{\delta Q}{dt} = 0$$

así pues, en términos de los diversos valores de la rapidez de calor marcados en la figura, se puede escribir:

$$q_1 = q_2 + q_3 \tag{17-26}$$

Las cantidades q_1 y q_2 son términos de conducción, en tanto que q_3 es la rapidez de flujo de calor convectivo. Si se evalúa cada una de estas cantidades en la forma apropiada y se sustituye el valor obtenido en la ecuación (17-26), se obtiene:

$$kA\frac{dT}{dx}\bigg|_{x+\Delta x} - kA\frac{dT}{dx}\bigg|_{x} - hS(T - T_\infty) = 0 \tag{17-27}$$

donde T_∞ es la temperatura del fluido. Si se expresa el área, $S(x)$, en términos del ancho Δx, multiplicado por el perímetro $P(x)$ y dividiendo entre Δx, se obtiene:

$$\frac{kA(dT/dx)|_{x+\Delta x} - kA(dT/dx)|_x}{\Delta x} - hP(T - T_\infty) = 0$$

Evaluando esta ecuación en el límite, cuando $x \to 0$, se obtiene la siguiente ecuación diferencial, muy general:

$$\frac{d}{dx}\left(kA\frac{dT}{dx}\right) - hP(T - T_\infty) = 0 \qquad (17\text{-}28)$$

Existe una amplia variedad de formas posibles cuando se aplica la ecuación (17-28) a geometrías específicas. En los párrafos siguientes se describen tres aplicaciones posibles y las ecuaciones resultantes.

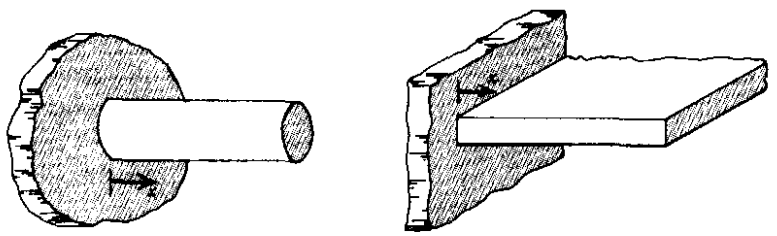
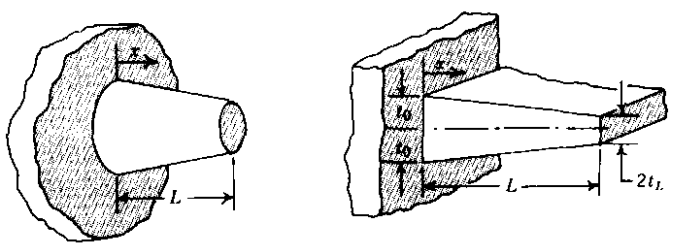


Figura 17.8 Dos ejemplos de superficies extendidas de sección transversal constante.

(1) Aletas o Espinas de Sección Transversal Uniforme. En cualquiera de los casos que aparecen en la figura 17.8, se cumple lo siguiente: $A(x) = A$ y $P(x) = P$, ambas constantes. Si además, tanto k como h se toman como constantes, la ecuación (17-28) se reduce a:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{hP}{kA}(T - T_\infty) = 0 \qquad (17\text{-}29)$$

(2) Superficies Rectas de Sección Transversal Linealmente Variable. En la figura 17.9 aparecen dos configuraciones para las cuales A y P no son constantes. Si



(a) (b)

Figura 17.9 Dos ejemplos de superficies extendidas rectas con sección transversal variable.

el área y el perímetro varían, ambos en forma lineal, del área superficial, $x = 0$, hasta tener un valor menor en el extremo, $x = L$, tanto A como P se pueden expresar en la forma

$$A = A_0 - (A_0 - A_L)\frac{x}{L} \tag{17-30}$$

y

$$P = P_0 - (P_0 - P_L)\frac{x}{L} \tag{17-31}$$

En el caso de la aleta rectangular que aparece en la figura 17.9 b, los valores de A y P son:

$$A_0 = 2t_0 W \qquad A_L = 2t_L W$$
$$P_0 = 2[2t_0 + W] \qquad P_L = 2[2t_L + W]$$

donde t_0 y t_L representan la mitad del grosor de la aleta evaluado en $x = 0$ y en $x = L$, respectivamente y W es la profundidad total de la aleta.

Cuando h y k son constantes, la ecuación (17-28), aplicada a superficies extendidas cuya área de sección transversal, variable linealmente, se transforma en:

$$\left[A_0 - (A_0 - A_L)\frac{x}{L}\right]\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{A_0 - A_L}{L}\frac{dT}{dx} - \frac{h}{k}\left[P_0 - (P_0 - P_L)\frac{x}{L}\right](T - T_\infty) = 0 \tag{17-32}$$

(3) Superficies Curvas de Grosor Uniforme. Un tipo común de superficie extendida es el de la aleta circular de grosor constante que aparece en la figura 17.10.

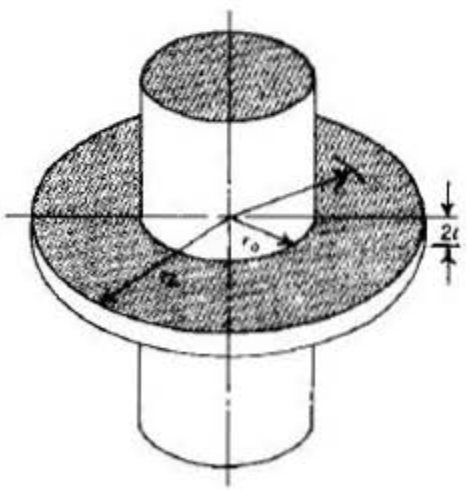


Figura 17.10 Aleta curva de grosor constante.

Las expresiones apropiadas para A y P, en este caso, son

y

$$\left.\begin{aligned} A &= 4\pi rt \\ P &= 4\pi r \end{aligned}\right\} \quad r_0 \leq r \leq r_L$$

Cuando se sustituyen estas expresiones en la ecuación (17-31), la ecuación diferencial aplicable, considerando constantes a k y h, es

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT}{dr} - \frac{h}{kt}(T - T_\infty) = 0 \tag{17-33}$$

En cada uno de los casos estudiados, tanto la conductividad térmica como el coeficiente de transferencia de calor convectivo, se supusieron constantes. Cuando se analiza la naturaleza variable de estas cantidades las ecuaciones diferenciales resultantes se vuelven todavía más complicadas que las que se han obtenido hasta aquí.

Ahora encontraremos algunas soluciones correspondientes al perfil de la temperatura en el caso de la aleta recta cuya sección transversal es constante. Puede usarse la ecuación (17-29).

La solución general de la ecuación (17-29) puede escribirse en la forma:

$$\theta = c_1 r^{mx} + c_2 r^{-mx} \tag{17-34}$$

ó

$$\theta = A \cosh mx + B \sinh mx \tag{17-35}$$

donde $m^2 = hP/kA$ y $\theta = T - T_\infty$. El cálculo de las constantes de integración requiere del conocimiento de dos condiciones de frontera. Los tres conjuntos de condiciones de frontera que utilizaremos son los siguientes:

(a) $T = T_0$ en $x = 0$

$T = T_L$ en $x = L$

(b) $T = T_0$ en $x = 0$

$\dfrac{dT}{dx} = 0$ en $x = L$

y

(c) $T = T_0$ en $x = 0$

$-k\dfrac{dT}{dx} = h(T - T_\infty)$ en $x = L$

La primera condición de frontera de cada conjunto es la misma y estipula que la temperatura en la base de la superficie extendida es igual a la de la superficie primaria. La segunda condición de frontera sirve para describir la situa-

ción a una distancia L de la base. En el conjunto (a), la condición es la de una temperatura conocida en $x = L$. En el conjunto (b) el gradiente de la temperatura es cero en $x = L$. En el conjunto (c) la condición es que el flujo de calor por conducción en el extremo de una superficie extendida sea igual al flujo de calor que abandona este lugar por convección.

El perfil de la temperatura asociado al primer conjunto de condiciones de frontera, es:

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \left(\frac{\theta_L}{\theta_0} - e^{-mL}\right)\left(\frac{e^{mx} - e^{-mx}}{e^{mL} - e^{-mL}}\right) + e^{-mx} \tag{17-36}$$

Se puede utilizar un caso especial de esta solución cuando L es muy grande, esto es, cuando $L \to \infty$; para este caso la ecuación (17-36) se reduce a:

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{-mx} \tag{17-37}$$

Las constantes c_1 y c_2, obtenidas al aplicar el conjunto (b), dan origen a la siguiente ecuación del perfil de la temperatura

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{e^{mx}}{1 + e^{2mL}} + \frac{e^{-mx}}{1 + e^{-2mL}} \tag{17-38}$$

Una expresión equivalente a la ecuación (17-38), pero más compacta, es:

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{\cosh[m(L - x)]}{\cosh mL} \tag{17-39}$$

Nótese que, en cualquiera de las ecuaciones (17-38) o (17-39), cuando $L \to \infty$, el perfil de la temperatura tiende al expresado en la ecuación (17-37).

Al aplicar el conjunto (c) de condiciones de frontera, se obtiene la siguiente ecuación correspondiente al perfil de temperatura,

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{\cosh[m(L - x)] + (h/mk)\operatorname{senh}[m(L - x)]}{\cosh mL + (h/mk)\operatorname{senh} mL} \tag{17-40}$$

Note que esta expresión se reduce a la ecuación (17-39) cuando $d\theta/dx = 0$, en $x = L$ y a la ecuación (17-37) cuando $T = T_\infty$ en $L \to \infty$.

Las expresiones correspondientes a $T(x)$ que se han obtenido, son particularmente útiles para evaluar la transferencia total de calor de una superficie extendida. Esta transferencia total de calor se puede determinar por dos medios diferentes. El primero en ellos es la integración de la expresión correspondiente a la transferencia de calor por convección, en la superficie, de acuerdo con la expresión:

$$q = \int_S h[T(x) - T_\infty]\, dS = \int_S h\theta\, dS \tag{17-41}$$

El segundo método incluye el cálculo de la energía conducida a la superficie

extendida en la base, tal como lo expresa la ecuación:

$$q = -kA\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} \tag{17-42}$$

La última de estas expresiones es más fácil de evaluar, por lo cual usaremos esta ecuación en el desarrollo siguiente.

Si se utiliza la ecuación (17-36), se encontrará que la rapidez de transferencia de energía, al aplicar el conjunto (a) de condiciones de frontera, es:

$$q = kAm\theta_0\left[1 - 2\frac{\theta_L/\theta_0 - e^{-mL}}{e^{mL} - e^{-mL}}\right] \tag{17-43}$$

Si la longitud L es muy grande, esta expresión se transforma en:

$$q = kAm\theta_0 = kAm(T_0 - T_\infty) \tag{17-44}$$

Al sustituir la ecuación (17-39) (obtenida usando el conjunto (b) de condiciones de frontera) en la ecuación (17-42), se obtiene:

$$q = kAm\theta_0 \tanh mL \tag{17-45}$$

La ecuación (17-40), utilizada en la ecuación (17-42), da para la expresión correspondiente a q:

$$q = kAm\theta_0\frac{\operatorname{senh} mL + (h/mk)\cosh mL}{\cosh mL + (h/mk)\operatorname{senh} mL} \tag{17-46}$$

Las ecuaciones de perfil de la temperatura y de la transferencia total de calor en superficies extendidas cuya configuración más compleja no se ha estudiado. Algunos de estos casos se dejarán como ejercicio al estudiante.

Una pregunta que lógicamente surge en este punto es la siguiente: ¿qué beneficio se logra agregando superficies extendidas? Un término que resulta de utilidad para contestar esta pregunta es el de la *eficiencia de aleta*, cuyo símbolo es η_f, definido como la razón de la transferencia real de calor de una superficie extendida a la transferencia máxima posible de calor desde la superficie. La máxima transferencia de calor ocurriría si la temperatura de la superficie extendida fuera igual a la temperatura base, T_o, en todos los puntos.

La figura 17.11 es una gráfica de η_f en función de un parámetro significativo, tanto para aletas rectas, como para aletas circulares de grosor constante.

La transferencia total de calor de una superficie provista de aletas, es:

$$q_{\text{total}} = q_{\text{superficie primaria}} + q_{\text{aleta}}$$

$$= A_0h(T_0 - T_\infty) + A_fh(T - T_\infty) \tag{17-47}$$

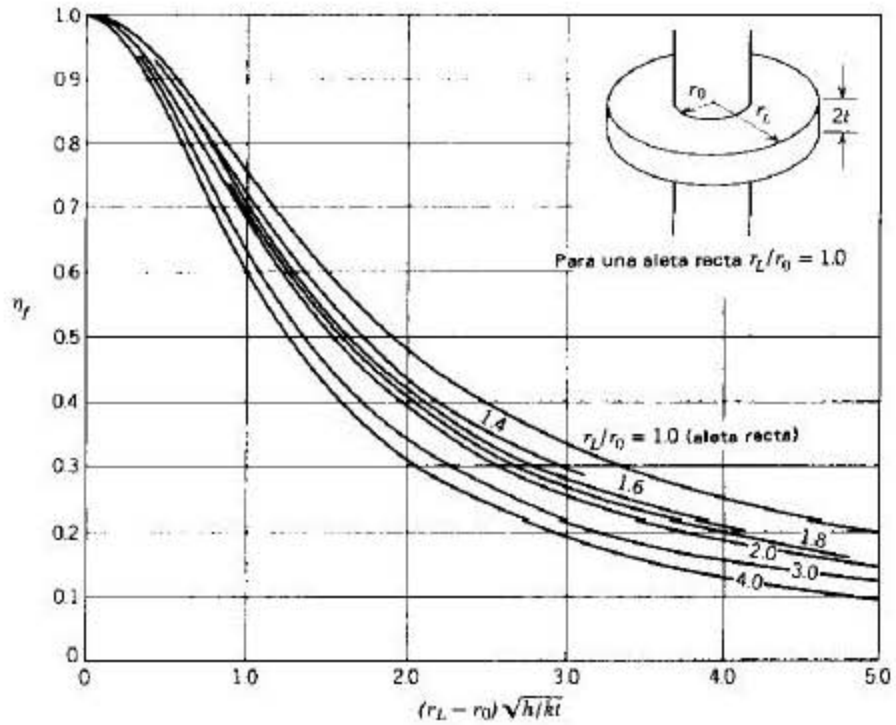


Figura 17.11 Eficiencia de aleta de las aletas rectas y circulares de grosor constante.

El segundo término de la ecuación (17-47) es la transferencia real de calor de la superficie provista de aletas en términos de la temperatura de la superficie variable. Este puede escribirse en función de la eficiencia de aleta, dando:

$$q_{\text{total}} = A_0 h(T_0 - T_\infty) + A_f h \eta_f (T_0 - T_\infty)$$

ó

$$q_{\text{total}} = h(A_0 + A_f \eta_f)(T_0 - T_\infty) \tag{17-48}$$

En esta expresión, A_0 representa el área expuesta de la superficie primaria, A_f es el área total de las aletas y el coeficiente de transferencia de calor, h se supone constante.

En el ejemplo 3 puede verse la aplicación de la ecuación (17-48) así como la efectividad de las aletas.

EJEMPLO 3

Una pared plana de acero separa agua y aire. Se propone aumentar la rapidez de transferencia entre ambos fluidos agregando aletas rectas de 0.05 in de grosor y 1 in de longitud, espaciadas 0.5 in. Los coeficientes de transferencia de calor del lado del aire y del agua se suponen constantes y son de 2 y 45 Btu/h ft^2 °F, respectivamente. ¿Cuál será el porcentaje de aumento si se colocan las aletas: (a) del lado del agua? (b) del lado del aire?, (c) en ambos lados?

Las áreas de la superficie primaria y de las aletas, en una sección de 1 ft por 1 ft, son:

$$A_0 = 1\ \text{ft}^2 - (2\ \text{aletas})(1\ \text{ft})\left(\frac{0.05}{12}\ \frac{\text{ft}}{\text{fin}}\right)$$

$$= 0.9\ \text{ft}^2$$

$$A_f = (24\ \text{aletas})(1\ \text{ft})(2 \times \tfrac{1}{24}\ \text{ft}) + 0.1\ \text{ft}^2$$

$$= 4.1\ \text{ft}^2$$

Si se emplea la figura 17.11, se encontrará que la eficiencia de aleta, del lado del aire, es $\eta_f|_{\text{aire}} = 0.96$ y del lado del agua, $\eta_f|_{\text{agua}} = 0.55$. Del lado del aire, la rapidez de transferencia de calor con aletas, es:

$$q = h_a\ \Delta T_a[A_0 + \eta_{fa} A_f]$$

$$= 2\ \Delta T_a[0.9 + 0.96(4.1)] = 9.67\ \Delta T_{\text{aire}}$$

y del lado del agua,

$$q = h_w\ \Delta T_w[A_0 + \eta_{fw} A_f]$$

$$= 45\ \Delta T_w[0.9 + 0.55(4.1)] = 142\ \Delta T_{\text{agua}}$$

Los símbolos ΔT_{aire} y ΔT_{agua}, representan las diferencias de temperatura entre el fluido particular y la superficie de acero, a la temperatura T_o.

Los recíprocos de los coeficientes son las resistencias térmicas de las superficies provistas de aletas, en el aire y en el agua.

Sin aletas, la rapidez total de transferencia de calor en función de la diferencia total de temperatura, $\Delta T = T_w - T_{\text{aire}}$, despreciando la resistencia a la conducción de la pared de acero, es:

$$q = \frac{\Delta T_{\text{total}}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{45}} = 1.915\ \Delta T_{\text{total}}$$

Con aletas del lado del aire, la transferencia de calor es:

$$q = \frac{\Delta T_{\text{total}}}{1/9.67 + 1/45} = 7.96\ \Delta T_{\text{total}}$$

¡un aumento del 316%!

Cuando sólo se provee de aletas al lado del agua,

$$q = \frac{\Delta T_{\text{total}}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{142}} = 1.972\ \Delta T_{\text{total}}$$

un aumento del 3.0%.

El agregar aletas a ambos lados, la rapidez total de flujo de calor es:

$$q = \frac{\Delta T_{\text{total}}}{1/9.67 + 1/142} = 9.05\ \Delta T_{\text{total}}$$

un aumento de 364%.

Es obvio que al agregar aletas del lado del aire, ocurre un aumento mayor que cuando se agregan solamente del lado del agua.

17.4 SISTEMAS EN DOS Y TRES DIMENSIONES

En las secciones 17.2 y 17.3 se estudiaron los sistemas en los que tanto la temperatura como la transferencia de energía eran funciones de una sola variable espacial. Aunque muchos problemas están dentro de esta categoría, hay muchos otros sistemas que tienen geometrías o condiciones de temperatura de frontera complicadas, o ambas, para las cuales se necesitan dos o hasta tres coordenadas espaciales para describir el campo de temperaturas.

En esta sección se dará un repaso de algunos de los métodos de análisis de la transferencia de calor por conducción en sistemas bidimensionales y tridimensionales. Los problemas incluirán solamente sistemas bidimensionales ya que su solución es menos complicada y, sin embargo, sirven para explicar las técnicas de análisis.

Solución Analítica. Una solución analítica de cualquier problema de transferencia debe satisfacer la ecuación diferencial que describa el proceso, así como las condiciones de frontera impuestas. Se han usado diversas técnicas matemáticas para obtener soluciones a situaciones particulares de conducción de energía en las que una ecuación diferencial parcial describe el campo de temperaturas. Carslaw y Jaeger,* así como Boelter y colaboradores† han escrito tratados excelentes acerca de las soluciones matemáticas a muchos de los problemas más complicados de conducción. Como la mayor parte de este material es demasiado especializado para un curso introductorio, se obtendrá una solución a uno de los primeros casos de Fourier‡ analizó en el tratado clásico que establece la teoría de transferencia de energía por conducción. Esta solución de un medio bidimensional de conducción emplea el método matemático de separación de variables.

Sea una placa rectangular y de longitud infinita, libre de fuentes caloríficas, tal como aparece en la figura 17.12. En una placa delgada, $\partial T/\partial z$ es despreciable y la temperatura es función solamente de x e y. Se obtendrá la solución para el caso en el que ambos bordes de la placa se mantengan a una temperatura igual a cero y la parte inferior a una temperatura T_1, como puede verse en la figura. La distribución de temperaturas en estado permanente, en la placa, cuya conductividad térmica constante debe satisfacer la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0 \tag{17-49}$$

*H. S. Carslaw y J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, Segunda edición, Oxford Univ. Press, Nueva York, 1959.

†L. M. K. Boelter, V. H. Cherry, H. A. Johnson y R. C. Martinelli, *Heat Transfer Notes*, Mc Graw Hill Book Company, Nueva York, 1965.

‡J. B. J. Fourier, *Theory Analytique de la Chaleur*, Gauthier-Villars, París, 1822.

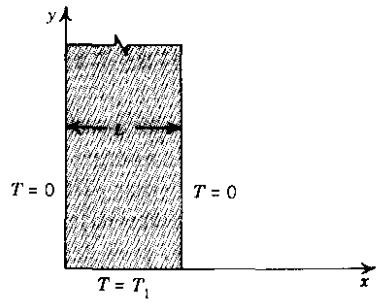


Figura 17.12 Modelo de análisis de conducción bidimensional.

y las condiciones de frontera:

$$T = 0 \quad \text{en } x = 0 \text{ para todo valor de } y$$
$$T = 0 \quad \text{en } x = L \text{ para todo valor de } y$$
$$T = T_1 \quad \text{en } y = 0 \text{ para } 0 \leq x \leq L$$

and

$$T = 0 \quad \text{en } y = \infty \text{ para } 0 \leq x \leq L$$

La ecuación (17-49) es una ecuación diferencial parcial homogénea y lineal. Este tipo de ecuación se puede integrar por lo general, suponiendo que la distribución de temperaturas, $T(x, y)$, es de la forma:

$$T(x, y) = X(x)Y(y) \tag{17-50}$$

donde $X(x)$ es únicamente función de x y $Y(y)$ solamente función de y. Si se sustituye esta ecuación en la ecuación (17-49), se obtendrá una expresión en la cual estén separadas las variables:

$$-\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} \tag{17-51}$$

Como el lado izquierdo de la ecuación (17-51) es independiente de y y el lado derecho es independiente de x, se deduce que ambos deben ser independientes de x y de y, por lo cual deben ser iguales a una constante. Si llamamos λ^2 a esta constante, se obtendrán dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \tag{17-52}$$

y

$$\frac{d^2Y}{dy^2} - \lambda^2 Y = 0 \tag{17-53}$$

Estas ecuaciones diferenciales se pueden integrar, dando como resultado

$$X = A\cos\lambda x + B\,\text{sen}\lambda x$$

y

$$Y = Ce^{\lambda y} + De^{-\lambda y}$$

De acuerdo con la ecuación (17-50) la distribución de temperaturas se define por medio de la relación:

$$T(x, y) = XY = (A\cos\lambda x + B\,\text{sen}\lambda x)(Ce^{\lambda y} + De^{-\lambda y}) \qquad (17\text{-}54)$$

donde A, B, C y D son constantes que se van a evaluar a partir de las cuatro condiciones de frontera. La condición: $T = 0$ en $x = 0$ requiere que $A = 0$. Igualmente, sen λx debe ser cero en $x = L$ y entonces λL debe ser un múltiplo entero de π o $\lambda = n\pi/L$. La ecuación (17-54) se ha reducido, ahora, a:

$$T(x, y) = B\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)(Ce^{n\pi y/L} + De^{-n\pi y/L}) \qquad (17\text{-}55)$$

La condición: $T = 0$ en $y \to \infty$, exige que C sea cero. Si se combinan B y D en la constante E, la ecuación (17-55) se reduce a

$$T(x, y) = Ee^{-n\pi y/L}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Esta expresión satisface la ecuación diferencial para todo entero, n, mayor o igual a cero. La solución general se obtiene sumando todas las soluciones posibles dando:

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} E_n e^{-n\pi y/L}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad (17\text{-}56)$$

La última condición de frontera, $T = T_1$ en $y = 0$, se utiliza para evaluar E_n de acuerdo con la expresión:

$$T_1 = \sum_{n=1}^{\infty} E_n\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \text{para } 0 \le x \le L$$

Las constantes E_n son los coeficientes de Fourier de esta expansión y están dadas por:

$$E_n = \frac{4T_1}{n\pi} \quad \text{para } n = 1, 3, 5, \ldots$$

y

$$E_n = 0 \qquad \text{para } n = 2, 4, 6, \ldots$$

La solución a este problema bidimensional de conducción es:

$$T = \frac{4T_1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{[-(2n+1)\pi y]/L}}{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{L} \tag{17-57}$$

En la figura 17.13 aparecen isotermas y líneas de flujo de energía. Las isotermas aparecen en la figura en forma de líneas llenas y las líneas punteadas, que son ortogonales a las isotermas, son líneas de flujo de energía. Note su

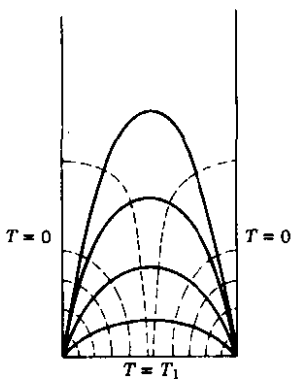


Figura 17.13 Isotermas y líneas de flujo de energía de la placa rectangular que aparece en la figura 17.12.

semejanza con las líneas de potencial de velocidad constante y de función corriente, estudiadas en la sección relativa a la transferencia de momento.

El método de separación de variables se puede extender a casos tridimensionales suponiendo que T es igual al producto: $X(x)\ Y(y)\ Z(z)$ y sustituyendo esta expresión de T en la ecuación diferencial apropiada. Al separar las variables se obtienen tres ecuaciones diferenciales de segundo orden, que pueden integrarse teniendo en cuenta las condiciones dadas de frontera.

Las soluciones analíticas son útiles cuando pueden obtenerse. Sin embargo, existen problemas cuyas geometría y condiciones de frontera son complicadas y no se pueden resolver analíticamente. Una solución alterna a la que se puede recurrir es la de usar métodos gráficos o numéricos.

Soluciones Gráficas por Medio de la Graficación del Flujo. Una solución apropiada a la ecuación bidimensional de Laplace de un medio homogéneo cuya conductividad térmica es constante,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

se puede obtener gráficamente, trazando el campo de potencial. Este método ha demostrado ser particularmente útil en sistemas cuyas fronteras son isotérmicas.

Los principios básicos del método gráfico se explicarán tomando en cuenta el caso simple de una placa plana de longitud infinita, como la que se observa en la figura 17.14. Como las temperaturas superficiales son constantes, T_1 y T_2, las isotermas deben ser paralelas a las superficies, tal como lo muestra la figura. Como las líneas de flujo de energía constante son ortogonales a las isotermas, serán líneas horizontales paralelas.

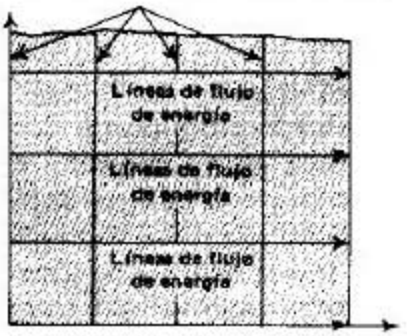


Figura 17.14 Isotermas y líneas de flujo de energía constantes de una placa plana de longitud infinita.

El procedimiento general a seguir para construir la gráfica de flujo en las situaciones más complicadas, es el de dividir el cuerpo en una malla de cuadrados curvilíneos consistentes con las condiciones de frontera, por medio del método de prueba y error. La gráfica de flujo estará completa cuando se satisfagan las condiciones siguientes:

1. Las isotermas y las líneas de flujo de energía se intersectan mutuamente formando ángulos rectos y una red de cuadrados curvilíneos.
2. Las diagonales de los cuadros curvilíneos se bisectan a 90° y bisectan a todos los vértices de la frontera.
3. Las isotermas son paralelas a las fronteras de temperatura constante.
4. Las líneas de flujo de energía son perpendiculares a las fronteras de temperatura constante.
5. Las líneas de flujo de energía que conducen a un vértice de una frontera de temperatura constante, bisectan al ángulo formado por las superficies de la frontera, en el vértice.

Las gráficas de flujo son aproximadas; su exactitud depende de la paciencia de quien las hace y de su habilidad para satisfacer las condiciones enumeradas anteriormente. Bewley* hizo las siguientes sugerencias, que pue-

*L. V. Bewley, *Two Dimensional Fields in Electrical Engeneering*, The Macmillan Company, Nueva York, 1948.

den reducir el número de veces que se tenga que aplicar el método de prueba y error en la construcción de la gráfica de flujo.

Son las siguientes:

1. Tome en cuenta las condiciones de simetría. Las líneas de simetría son líneas de flujo y dividen el campo de potencial en secciones.
2. Marque todas las isotermas conocidas.
3. En cada uno de los vértices de una frontera isotérmica, trace una recta que bisecte el ángulo. Todas estas rectas son el principio de las líneas de flujo de energía constante.
4. Extienda estas líneas, tentativamente, a otras isotermas, ya que son ortogonales a las isotermas.
5. Las isortermas deben originarse en la región en la que las líneas de flujo estén uniformemente espaciadas, en caso de que tal región exista.
6. Comience con una malla burda y encuentre, en primer lugar, la localización aproximada de las isotermas y de las líneas de flujo de energía constante.
7. En esta primera tentativa será difícil hacer que las líneas de flujo sean ortogonales a las isotermas y al mismo tiempo tener una malla de cuadrados curvilíneas. Para satisfacer estas condiciones se tendrán que hacer ajustes individuales o simultáneos donde se encuentren las líneas.

Para calcular la rapidez de transferencia de energía es necesario que las isotermas y las líneas de flujo de energía constante formen una malla de cuadrados curvilíneos. Con este espaciamiento fluirá una cantidad constante de energía entre cualesquiera dos líneas adyacentes de flujo de energía. En la figura 17.15 aparece una porción de la gráfica de flujo de un sistema de grosor unitario. La rapidez total de transferencia de energía, con N tubos de flujo de energía y un flujo de energía Δq por tubo de flujo, se puede calcular por medio de

$$q_{\text{total}} = N\,\Delta q \tag{17-58}$$

En el tubo de la figura 17.15, el gradiente de temperatura es $\Delta T/\Delta n$ y el área normal a la dirección de flujo de energía es Δm. Debido a la ecuación de Fourier de rapidez,

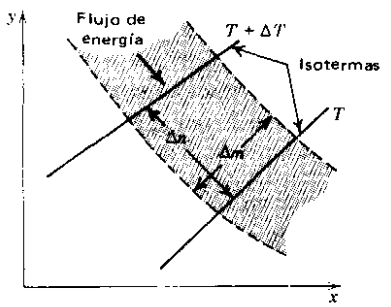


Figura 17.15 Elemento de la gráfica de temperatura contra flujo de energía.

el flujo de energía por tubo de flujo es:

$$\Delta q = -k\,\Delta m \frac{\Delta T}{\Delta n}$$

o, en los cuadrados curvilíneos, donde $\Delta m = \Delta n$,

$$\Delta q = -k\,\Delta T \tag{17-59}$$

Esto se cumple *independientemente del tamaño de los cuadros*. Por lo tanto, la diferencia total de temperatura $T_h - T_c$ en una malla de cuadrados curvilíneos, dividida entre el número de cuadrados existentes en un tubo de flujo, M, producirá el gradiente por tubo de flujo, tal como lo expresa la relación

$$\frac{\Delta T_{\text{overall}}}{M} = \frac{(T_h - T_c)}{M} \tag{17-60}$$

y la rapidez de flujo de energía por tubo de flujo es:

$$\Delta q = k\frac{(T_h - T_c)}{M} \tag{17-61}$$

Para N tubos, la rapidez de transferencia de energía es:

$$q = N\,\Delta q = k\frac{N}{M}(T_h - T_c)$$

ó

$$q = Sk(T_h - T_c) \tag{17-62}$$

donde el *factor de forma*, S, es igual a N/M, en un sistema bidimensional.

El siguiente problema servirá para ejemplificar el uso de una gráfica de flujo en un caso más complejo.

EJEMPLO 4

Determine la energía transferida por los elementos de calentamiento contenidos en una pared grande de calentamiento cuyas superficies isotérmicas son como las de la figura 17.16. La conductividad térmica de la pared es de 0.7 W/m · K.

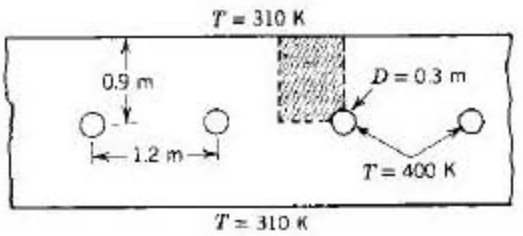


Figura 17.16 Elemento isotérmico de calentamiento empotrado en una pared plana.

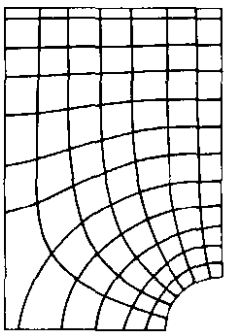


Figura 17.17 Area sombreada de la figura 17.16.

El área sombreada representa las condiciones de simetría existentes dentro de la pared. La gráfica de flujo de esta área aparece en la figura 17.17. En esta gráfica el número de tubos de flujo, N, es igual a 7 y el número de cuadrados contenidos en un tubo de flujo, M, es igual a 11.5. El factor de forma, S, es igual a

$$S = \frac{N}{M} = \frac{7}{11.5} = 0.608 \text{ m}^2/\text{m}$$

y la energía transferida por conducción en estado permanente a través del área sombreada, por unidad de profundidad es:

$$q = Sk(T_h - T_c)$$

$$q = (0.608 \text{ m}^2/\text{m})(0.7 \text{ W/m} \cdot \text{K})(400 \text{ K} - 310 \text{ K})$$

ó

$$q \cong 38.3 \text{ por metro de profundidad}$$
$$(39.8 \text{ por pie de profundidad})$$

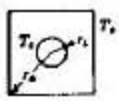
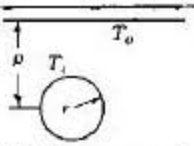
Es importante darse cuenta de que en la malla de flujo se pueden obtener fracciones de tubos de flujo y de cuadrados contenidos en los tubos de flujo. Volviendo a la figura 17.16, puede verse que cada uno de los elementos de calentamiento transfiere energía a través de cuatro áreas equivalentes. Por esto, cada uno de los elementos de calentamiento transfiere 4(38.3) o 153.2 W.

Se han obtenido factores de forma, S, de geometrías sencillas por medio de mapeo con variable compleja y estos aparecen en la figura 17.1.

Solución analógica. La semejanza entre dos o más fenómenos de transporte nos permite el análisis de cada uno de los procesos por medio de métodos matemáticos análogos. La ecuación bidimensional de Laplace se utiliza para describir campos de potencial en diversos fenómenos. La distribución de potencial en un campo electrostático queda descrita mediante la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = 0$$

Tabla 17.1 Factores de forma en la conducción

Forma	*Factor de forma*, S $q/L = kS(T_i - T_o)$
 Cilindros circulares concéntricos	$\dfrac{2\pi}{\ln (r_o/r_i)}$
 Cilindros circulares excéntricos	$\dfrac{2\pi}{\cosh^{-1}\left(\dfrac{1+\rho^2-\epsilon^2}{2\rho}\right)}$ $\rho \equiv r_i/r_o,\ \epsilon \equiv e/r_o$
 Cilindro circular dentro de un hexágonal	$\dfrac{2\pi}{\ln (r_o/r_i) - 0.10669}$
 Cilindro circular dentro de uno cuadrado	$\dfrac{2\pi}{\ln (r_o/r_i) - 0.27079}$
 Cilindro infinito enterrado en un medio semi-infinito	$\dfrac{2\pi}{\cosh^{-1} (\rho/r)}$

la distribución en un campo de temperaturas, se describe así:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0$$

y la distribución de concentraciones, en el capítulo 25 se describe por medio de la relación:

$$\frac{\partial^2 c_A}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 c_A}{\partial y^2}=0$$

Existen muchos problemas de conducción para los que no se han obtenido soluciones por medio de técnicas matemáticas. Algunos de estos problemas se han determinado en un sistema análogo y después se les ha vuelto a expresar en términos del problema térmico. El graficador de campo análogo es un instrumento de fácil manejo con el cual puede obtenerse la distribución de campo descrita por la ecuación bidimensional de Laplace.

El graficador de campo análogo utiliza una hoja delgada de papel conductor de la electricidad recortado a escala del medio conductor de la energía. Se puede establecer en el papel un patrón de flujo de corriente eléctrica por medio de electrodos energizados, colocados de manera conveniente. Véase de nuevo el ejemplo 4. La figura 17.8 es una representación esquemática simplificada del diagrama del circuito del equipo. Las condiciones de frontera correspondientes a las isotermas se obtienen en el campo eléctrico agregando alambres de cobre al papel o pintando las áreas con pintura de plata, muy buena conductora y después conectando a una fuente de fem, como puede verse en la figura 17.18. Los bordes del papel conductor corresponden a las superficies aisladas del campo de temperaturas.

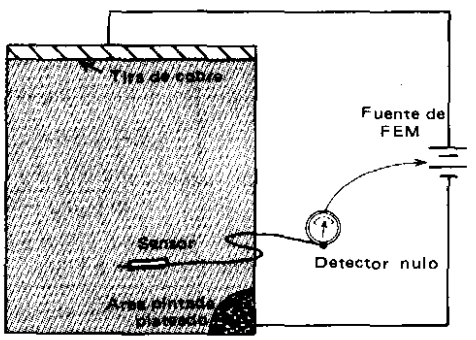


Figura 17.18 Arreglo general del graficador de campo análogo que se utiliza en la solución del ejemplo 4.

Las líneas del voltaje constante se encuentran moviendo la aguja detectora a lo largo del papel, haciendo pequeñas perforaciones en este cuando el detector nulo indica que la aguja detectora registra un voltaje específico. El nivel de voltaje del potencial particular que se va a evaluar se establece escogindo una posición del cursor en el potenciómetro que divide el voltaje del detector. La selección de incrementos iguales de voltaje causa líneas adyacentes de perforaciones, análogas a las isotermas separadas por la misma diferencia.

Como las líneas de flujo de energía constante son ortogonales a las líneas de potencial, se pueden trazar con toda libertad, el resultado será una malla de cuadrados curvilíneos como la obtenida en la gráfica de flujo. Las líneas de flujo constante también pueden trazarse simplemente invirtiendo las porciones

conductora y aisladora de la frontera. La evaluación de la energía transferida por conducción en estado permanente incluye las mismas ecuaciones utilizadas en el trazo de flujos.

SOLUCIONES NUMERICAS

Todas las técnicas que se han estudiado hasta aquí, para obtener soluciones en relación con la conducción multidimensional son de gran utilidad cuando las condiciones permiten su uso. Las soluciones analíticas requieren de funciones y geometrías relativamente sencillas; el trazado de gráficas requiere de fronteras equipotenciales. Cuando la situación que se esté analizando se complique lo suficiente o cuando las condiciones de frontera hagan imposible el uso de técnicas sencillas de solución, se tienen que buscar soluciones numéricas.

Este método se ha generalizado con la presencia de las computadoras digitales, con las cuales se logra el manejo de un gran número de datos inherentes a las soluciones numéricas de manera rápida y precisa. En esta sección se introducirán los conceptos de formulación y solución numéricas de problemas. Para un estudio más detallado y completo de soluciones numéricas a los problemas de conducción de calor, véanse Carnahan et al.* y Welty.†

En la figura 17.19 aparece una representación bidimensional de un elemento dentro de un medio conductor. El elemento o "nodo" i, j, aparece centrado en la figura junto con sus nodos adyacentes. La denominación i, j, implica una localización general en un sistema bidimensional en el cual i es un índice general en la dirección de x y j es el índice en la dirección de y. Los índices de nodos adyacentes pueden verse en la figura 17.19. La malla se coloca con un espaciamiento constante de nodo, Δx y altura constante Δy. Puede convenir hacer la malla "cuadrada", o sea $\Delta x = \Delta y$, pero por ahora, estas dimensiones serán diferentes.

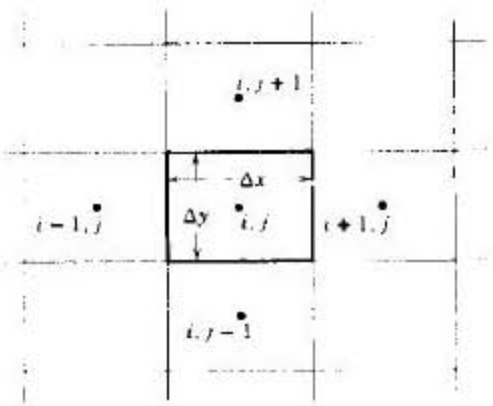


Figura 17.19 Elemento bidimensional de volumen en un medio conductor.

*B. Carnahan, H. A. Luther y J. O. Wilkes, *Applied Numerical Methods*, Wiley, Nueva York, 1969.
†J. R. Welty, *Engeneering Heat Transfer*, Wiley, Nueva York, 1974.

La aplicación directa de la ecuación (6-10) al nodo, i, j, da como resultado

$$\frac{\delta Q}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\text{c.v.}} e\rho dV \tag{17-63}$$

El término de entrada de calor $\delta Q/dt$ se puede evaluar permitiendo la conducción de los nodos adyacentes hacia el nodo i, j, y por medio de generación de energía dentro del medio. Si se evalúa $\delta Q/dt$, de esta manera, se obtiene:

$$\frac{\delta Q}{dt} = k\frac{\Delta y}{\Delta x}(T_{i-1,j} - T_{i,j}) + k\frac{\Delta y}{\Delta x}(T_{i+1,j} - T_{i,j}) + k\frac{\Delta x}{\Delta y}(T_{i,j-1} - T_{i,j}) + k\frac{\Delta x}{\Delta y}(T_{i,j+1} - T_{i,j}) + \dot{q}\,\Delta x\,\Delta y \tag{17-64}$$

Los dos primeros términos de esta ecuación relacionan la conducción en la dirección de x, el tercero y el cuarto expresan la conducción en la dirección de y, y el último, el término de generación. Todos estos términos son positivos; se supone que la transferencia de calor es positiva.

La rapidez de aumento de energía en el nodo i, j, se puede escribir sencillamente en la forma:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\text{c.v.}} e\rho\, dV = \left[\frac{\rho c T|_{t+\Delta t} - \rho c T|_t}{\Delta t}\right]\Delta x\,\Delta y \tag{17-65}$$

La ecuación (17-63) indica que las ecuaciones (17-64 y 17-65) pueden iguarlarse y simplificarse, obteniéndose así:

$$k\frac{\Delta y}{\Delta x}[T_{i-1,j} + T_{i+1,j} - 2T_{i,j}] + k\frac{\Delta x}{\Delta y}[T_{i,j-1} + T_{i,j+1} - 2T_{i,j}] + \dot{q}\,\Delta x\,\Delta y = \left[\frac{\rho c T_{i,j}|_{t+\Delta t} - \rho c T_{i,j}|_t}{\Delta t}\right]\Delta x\,\Delta y \tag{17-66}$$

Esta expresión se estudiará de manera más completa en el capítulo siguiente. Por lo pronto no tomaremos en cuenta los términos que varían con respecto al tiempo; consideraremos cuadrados a los nodos, esto es: $\Delta x = \Delta y$. Con estas simplificaciones, la ecuación (17-66) se transforma en

$$T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1} - 4T_{i,j} + \dot{q}\frac{\Delta x^2}{k} = 0 \tag{17-67}$$

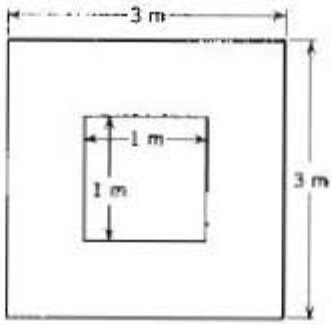
En ausencia de generación interna, se puede resolver la ecuación (17-67) para T_{ij}, dando como resultado:

$$T_{i,j} = \frac{T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1}}{4} \tag{17-68}$$

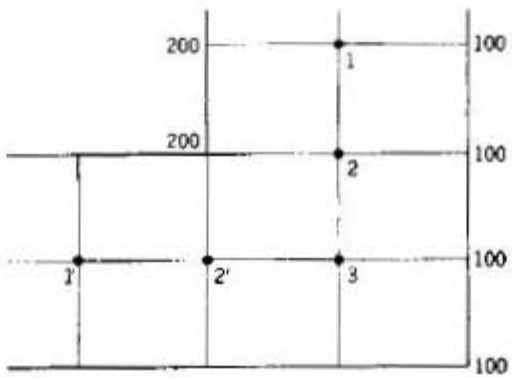
o sea que el nodo de temperatura, i, j, es la media aritmética de la temperatura de sus nodos adyacentes. Un ejemplo sencillo que demuestra la forma de utilizar la ecuación (17-68) para resolver un problema de conducción bidimensional de calor es el siguiente:

EJEMPLO 5

Las superficies de un conducto hueco de forma cuadrada se mantienen a 200° K y 100° K. Determine la rapidez de transferencia de calor en estado permanente entre las superficies fría y caliente de este conducto. La pared del material tiene una conductividad



térmica de 1.21 W/m · K. Podemos sacar ventaja de la simetría octagonal de esta figura para trazar la malla cuadrada sencilla que aparece a continuación:



La malla escogida es cuadrada, y: $\Delta x = \Delta y = 1$ m, por lo tanto se pueden identificar tres puntos nodales interiores; sus temperaturas se pueden determinar por medio de la correcta aplicación de la ecuación (17-18). Si se escriben las ecuaciones correspondientes a T_1, T_2 y T_3, usando como guía a la ecuación (17-68), se tendrá:

$$T_1 = \frac{200 + 100 + 2T_2}{4}$$

$$T_2 = \frac{200 + 100 + T_1 + T_3}{4}$$

$$T_3 = \frac{100 + 100 + 2T_2}{4}$$

Este conjunto de tres ecuaciones y tres incógnitas se puede resolver muy fácilmente y se obtendrá el siguiente resultado: $T_1 = 145.83$ K, $T_2 = 141.67$ K y $T_3 = 120.83$ K.

Las temperaturas obtenidas se pueden usar para encontrar la transferencia de calor. En el procedimiento de trazar la malla del tipo especificado está implícita la suposición de que es calor fluye en las direcciones x e y, entre nodos. Sobre esta base la transferencia de calor ocurre de la superficie caliente sólo al interior de los nodos 1 y 2, la transferencia de calor ocurre de los nodos 1, 2 y 3 hacia la superficie más fría. También debe recordarse que la sección del conducto que se ha analizado es la octava parte del total y, por lo tanto, de la transferencia de calor de y al nodo 1, sólo la mitad debe tomarse como parte del elemento analizado.

Ahora deberá resolverse la ecuación de la rapidez de transferencia de calor desde la superficie caliente y escribirse:

$$q = \frac{k(200 - T_1)}{2} + k(200 - T_2)$$

$$= k\left[\left(\frac{200 - 145.83}{2}\right) + (200 - 141.67)\right]$$

$$= 85.415\,k \quad (q \text{ en W/m}, k \text{ en W/m} \cdot \text{K})$$

De manera semejante, el flujo de calor desde los nodos 1, 2 y 3 hasta la superficie fría se escribe:

$$q = \frac{k(T_1 - 100)}{2} + k(T_2 - 100) + k(T_3 - 100)$$

$$= k\left[\left(\frac{145.83 - 100}{2}\right) + (141.67 - 100) + (120.83 - 100)\right]$$

$$= 85.415\,k \qquad (q \text{ en W/m}, k \text{ en W/m} \cdot \text{K})$$

Observe que estos dos medios diferentes de solución de q producen el mismo resultado. Este es un requerimiento del análisis que resulta obvio y sirve como verificación de la formulación del trabajo numérico.

Se puede terminar, ahora, la solución del ejemplo. La transferencia total de calor por metro de conducto se calcula como sigue:

$$q = 8\,(85.415 \text{ K})(1.21 \text{ W/m} \cdot \text{K})$$

$$= 826.8 \text{ W/m}$$

El ejemplo 5 ha servido para mostrar, en una forma sencilla, la forma numérica de resolver problemas de conducción bidimensional en estado permanente. Lógicamente cualquier complicación que se agregue al problema, en la forma de geometría más elaborada a, otros tipos de condiciones, tales como la convección, la radiación, un flujo específico de calor, etc., o simplemente un número mayor de nodos interiores, en un problema resultará demasiado complicado para poderlo calcular manualmente. Welty* describe las técnicas para la formulación y solución de tales problemas.

*J. R. Welty, citado con anterioridad.

En esta sección se han estudiado cuatro técnicas para la solución. En años anteriores se ha utilizado una técnica conocida como "relajación"; sin embargo, hoy en día las computadoras digitales son el medio más conveniente y rápido de resolver estos problemas. En esta sección se han estudiado cuatro técnicas de solución de problemas, tanto bidimensionales como tridimensionales, de problemas de conducción en estado permanente. Cada una de estas técnicas cuenta con ciertas condiciones que limitan su utilización. La más exacta, la solución analítica, se recomienda en los problemas de formas geométricas y condiciones de frontera, simples. Los sistemas cuya geometría es complicada pero cuyas fronteras isotérmicas pueden manejarse fácilmente por medio del método de soluciones gráficas que incluye el trazado del flujo. Las técnicas numéricas se pueden emplear en la solución de problemas complicados con condiciones no uniformes de frontera así como propiedades físicas variables. También puede usarse el método analógico experimental en problemas complicados. Con un graficador de campo análogo se pueden obtener rápidamente soluciones a diversas condiciones variables.

17.5 CONCLUSION

En este capítulo se han estudiado soluciones a los problemas de conducción en estado permanente. Las ecuaciones diferenciales utilizadas en la definición se establecieron generando la ecuación a través del uso de la expresión de volumen de control correspondiente a la conservación de la energía así como por medio del uso de la ecuación diferencial general de transferencia de energía. Se espera que este método proporcione al estudiante una comprensión de los diversos términos contenidos en la ecuación diferencial general y le permita, así, decidir, en cada situación, cuáles términos son importantes.

Se estudiaron los sistemas unidimensionales con y sin generación interna de energía y se analizaron, tanto las soluciones numéricas, analógicas y el trazado gráfico y analítico de gráficas de flujo, como las técnicas que se utilizan en la solución de problemas de conducción de dos y tres dimensiones.

PROBLEMAS

17.1 Se va a construir una pared compuesta de 1/4 in de acero inoxidable (k = Btu/h ft $^\circ$ F), 3 in de lámina de corcho (k = 0.025 Btu/h ft $^\circ$ F) y 1/2 in de plástico (k = 1.5 Btu/ft $^\circ$ F). Determine la resistencia térmica de esta pared si la misma está unida por medio de tornillos de 1/2 in de diámetro entre centros de 6 in hechos de

(a) acero inoxidable

(b) aluminio (k = 120 Btu/h ft $^\circ$ F).

17.2 Se desea transportar metal líquido a través de una tubería incrustada en una pared en un punto en el cual la temperatura es de 650 K. Una pared de 1.2 m de grosor, construida con un material cuya conductividad térmica varía con la temperatura, de acuerdo con lo siguiente: $k = 0.73\ (1 + 0.0054\ T)$, donde T está dada en K y k en W/m · K, mantiene su superficie interior a 925 K. La superficie exterior está expuesta al aire, que está a 300 K y tiene un coeficiente de transferencia de calor convectivo de 23 W/m² · K. ¿Qué tan lejos de la superficie caliente deberá colocarse la tubería? ¿Cuál es el flujo de calor de la pared?

17.3 Una tubería de acero de cédula 40 conduce vapor saturado a 60 psi a través de un laboratorio de 60 ft de longitud. La tubería está aislada con 1.5 in de 85% de magnesia, que cuesta $0.75 el pie. ¿Durante cuánto tiempo debe permanecer en servicio la tubería para justificar el pago del material aislante si el costo del calentamiento del vapor es de $0.68 por cada 10^5 Btu? El coeficiente de transferencia de calor convectivo de la superficie exterior es de 5 Btu/h ft² °F.

17.4 Se va a diseñar la pared de un horno de tal manera que transmita un flujo máximo de calor de 200 Btu/h ft² de área de la pared. Las temperaturas interna y externa serán de 2000 °F y 300 °F, respectivamente. Determine el ordenamiento más económico de los ladrillos, que miden 9 por 4 1/2 por 3 in, si los ladrillos están hechos de 2 materiales: uno con una $k = 0.44$ Btu/h ft °F y una temperatura máxima útil de 1500 °F y el otro con una $k = 0.94$ Btu/h ft °F y una temperatura máxima utilizable de 2,200 °F. Los ladrillos de cada uno de los materiales cuestan lo mismo y pueden colocarse de cualquier forma.

17.5 Determine el porcentaje de aumento en el flujo de calor, si además de las condiciones especificadas en el problema 17.4 hay dos tornillos de 3/4 in de diámetro que se insertan en la pared por cada pie cuadrado de área de pared (k para el acero, = 22 Btu/h ft °F).

17.6 Una lámina de plástico de 2.5 cm de grueso ($k = 2.42$ W/m · K se va a unir una placa de aluminio de 5 cm de grueso. El adhesivo que va a unir ambas placas se mantendrá a una temperatura de 325 K para lograr una mejor adherencia y este calor va a producirlo una fuente radiante. El coeficiente de transferencia de calor convectivo en las superficies, tanto de plástico, como de aluminio es de 12 W/m² · K y el aire circundante se encuentra a 295 K. ¿Cuál es el flujo requerido de calor si se aplica a la superficie (a) del plástico: (b) del aluminio?

17.7 Fluye vapor saturado a 40 psia, a 5 fps a través de una tubería de 1 1/2 in de acero de cédula 40. El coeficiente de transferencia de calor convectivo para condensar el vapor en la superficie interior es de 1500 Btu/h ft² °F. El aire circundante se encuentra a 80 °F y el coeficiente de la superficie exterior es de 3 Btu/h ft² °F.

Determine lo siguiente:
(a) La pérdida de calor por cada 10 ft de tubo sin aislamiento.
(b) La pérdida de calor por cada 10 ft de tubo aislado con 2 in de 85% de aislante de magnesio.
(c) La masa del vapor condensado en 10 ft de tubo sin aislamiento.

17.8 La expresión en estado permanente, correspondiente a la conducción de calor a través de una pared plana es $q = (kA/L)\Delta T$, como puede verse en la ecuación (17-4). Una expresión semejante a (17-4) para la conducción en estado permanente a través de un cilindro hueco, es

$$q = \frac{k\bar{A}}{r_o - r_i}\Delta T$$

donde A es el área "media-logarítmica" definida así:

$$\bar{A} = 2\pi\frac{r_o - r_i}{\ln (r_o/r_i)}$$

(a) Demuestre que A, tal como se definió anteriormente, satisface las ecuaciones correspondientes a la transferencia radial de calor en estado permanente en un elemento cilíndrico hueco.
(b) Si el área media aritmética, $\pi(r_o + r_i)$ se utiliza en lugar de la media logarítmica, calcúlese el porcentaje resultante de error correspondiente a los valores de r_o/r_i, de 1.5, 3 y 5.

17.9 Evalúe el área "media" apropiada para la conducción de calor en estado permanente en una esfera hueca que satisface una ecuación de la forma:

$$q = \frac{k\bar{A}}{r_o - r_i}\Delta T$$

Repita la parte (b) del problema 17.8 para el caso esférico.

17.10 La pared de un horno, que consta de 0.25 m de ladrillo refractario, 0.20 m de caolín y una capa exterior de tabique del usado en la construcción de 0.10 m, expuesta al gas del horno, a una temperatura de 1370 K, con aire de 300 K adyacente a la pared exterior. Los coeficientes de transferencia de calor convectivo interior y exterior son 115 y 23 W/m^2 · K, respectivamente. Determine la pérdida de calor por pie cuadrado de pared y la temperatura de la superficie exterior de la pared en estas condiciones.

17.11 Dadas las condiciones del problema 17.10, excepto que la temperatura exterior del tabique de construcción no puede exceder los 325 K, ¿En qué proporción deberá ajustarse el grosor del caolín para satisfacer este requerimiento?

17.12 Se va a diseñar un calentador de 10 kW que usa alambre de Nicromo. La superficie del Nicromo se va a limitar a una temperatura máxima

de 1650 K. Otros criterios de diseño para este calentador son los siguientes:

coeficiente mínimo de transferencia de calor convectivo: 850 $W/m^2 \cdot K$, temperatura mínima del medio circundante (aire): 370 K.

La resistividad del Nicromo es de 100 $\mu\Omega$ cm y la potencia del calentador está disponible a 12 volts.
(a) ¿Qué tamaño de alambre se necesita si el calentador debe ser de una pieza de 0.6 m de longitud?
(b) ¿Qué longitud de alambre de calibre 14 se necesita para satisfacer estos criterios de diseño?
(c) ¿De qué manera cambiarían las respuestas a los incisos (a) y (b) si $h = 1150\ W/m^2 \cdot K$?

17.13 Un calentador formado por alambre de Nicromo enrollado hacia adelante y luego hacia atrás, con el enrollado muy junto, está cubierto en ambos lados, con una capa de asbesto ($k = 0.15$ Btu/h ft °F) de 1/8 plg de espesor y después con otra capa de 1/8 in de grosor de acero inoxidable ($k = 10$ Btu/h ft °F). Si la temperatura central de esta construcción en forma de emparedado se considera constante, y el coeficiente exterior de transferencia de calor convectivo es 3 Btu/h ft^2 °F, a 1000 °F, ¿cuánta energía deberá suministrársele al calentador en W/ft^2? ¿Cuál será la temperatura exterior del acero inoxidable?

17.14 Un tubo de acero de 1 plg de diámetro exterior mantiene la superficie de su pared exterior a 250 °F. Se propone aumentar la rapidez de transferencia de calor por medio de la adición de aletas de 3/32 in de grosor y 3/4 in de longitud, a la superficie exterior del tubo. Compárese el aumento en la transferencia de calor lograda agregando 12 aletas longitudinales rectas, o circulares cuya área total es igual a las 12 aletas longitudinales. El aire circundante se encuentra a 80° F y el coeficiente de transferencia de calor convectivo es de 6 Btu/h ft^2 °F.

17.15 Resuelva el problema anterior aumentando la transferencia de calor convectivo a 60 Btu/h ft^2 °F forzando el paso del aire que rodea la superficie del tubo.

17.16 Una varilla cilíndrica de 3 cm de diámetro está insertada parcialmente en un horno y uno de sus extremos está expuesto al aire circundante que está a 300 K. Las temperaturas en dos de sus puntos, separados 7.6 cm. son de 399 K y 365 K. Si el coeficiente de transferencia de calor convectivo es $17\ W/m^2 \cdot K$, determine la conductividad térmica del material del que está hecha la varilla.

17.17 Se va a transferir calor del agua al aire a través de una pared de aluminio. Se propone agregar aletas rectangulares de 0.05 in de grueso y 3/4 in de longitud, espaciadas a 0.08 in, a la superficie del aluminio para ayua la transferencia de calor. Los coeficientes de transferencia de calor en

los lados del agua y del aire, son: 3 Btu/h ft² °F y 25 Btu/h ft² °F, respectivamente. Evalúe el porcentaje de aumento de transferencia de calor si se agregan estas aletas (a) del lado del aire, (b) del lado del agua (c) a ambos lados. ¿A qué conclusiones se puede llegar de acuerdo con este resultado?

17.18 Una barra de acero utilizada como soporte de una chimenea está expuesta a gases calientes a 625 K, con el coeficiente de transferencia de calor convectivo de 740 W/m² · K. La barra está adherida a dos paredes opuestas de la chimenea, que están a 480 K y mide 1.9 cm de diámetro y 45 cm de longitud. Determine la temperatura máxima de la barra.

17.19 Una varilla de cobre cuyo diámetro es el de 1/4 in y cuya longitud es de 3 ft, pasa entre dos barras conductoras de corriente que se encuentran a 60° F. El aire circundante se encuentra a 60° F y el coeficiente de transferencia de calor es 6 Btu/h ft ° F. Suponiendo que la resistividad eléctrica del cobre es constante a 1.72×10^{-6} ohm-cm., determine la máxima corriente que puede conducir el cobre para que su temperatura permanezca por debajo de 150° F.

17.20 Una aleta recta de sección transversal constante se va a usar para disipar energía de una pared que se encuentra a temperatura T_o. El coeficiente de transferencia de calor convectivo entre la aleta y el aire circundante que se encuentra a una temperatura T_∞, se expresa como:
$h = \beta(T - T_\infty)^\eta$ donde β y η son constantes y $T = T(x)$ es la temperatura de la superficie de la aleta en una posición particular, x.
(a) Demuestre, para k constante, la ecuación diferencial aplicable, correspondiente a T, es:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{\beta P}{kA}(T - T_\infty)^{1+\eta} = 0$$

(b) Demuestre que, usando las transformaciones:

$$u = T - T_\infty, \qquad m^2 = \frac{\beta P}{kA}, \qquad z = \frac{du}{dx}$$

la ecuación se reduce a la forma separable

$$z\frac{dz}{du} - m^2 u^{1+\eta} = 0$$

(c) Demuestre que, si se aplican las condiciones de frontera:

$$u = u_0 \qquad \text{en } x = 0$$
$$u = 0 \qquad \text{en } x = \infty$$

las soluciones del perfil de velocidad y del flujo de calor, se transforman en:

$$\frac{T-T_\infty}{T_0-T_\infty}=\left(\frac{1}{1+x(T_0-T_\infty)^{\eta/2}m\eta\sqrt{1/2(\eta+2)}}\right)^{2/\eta}$$

$$q=\sqrt{\frac{2PkA}{\eta+2}}\sqrt{h_0}\,(T_0-T_\infty)$$

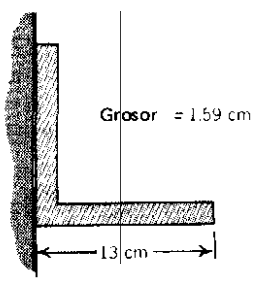
donde

$$h_0=\beta(T_0-T_\infty)^\eta$$

(d) Usando el resultado del inciso (c), demuestre que la proporción de la verdadera transferencia de calor, tomando en cuenta la naturaleza variable de h, a la obtenida suponiendo que $h=h_0$ (constante), es:

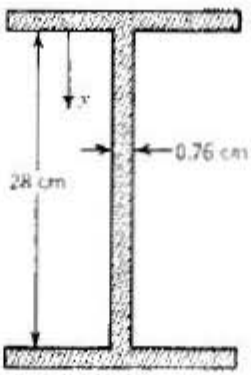
$$\frac{q_{\text{actual}}}{q_{h=h_0}}=\sqrt{\frac{2}{2+\eta}}$$

17.21 Un ángulo de acero de 13 cm × 13 cm con las dimensiones que aparecen en la figura, se encuentra adherido a una pared cuya temperatura superficial es de 600 K. El aire circundante está a 300 K y el coeficiente de transferencia de calor convectivo entre la superficie angular y el aire es 45 W/m² · K.



(a) Trace el perfil de temperatura del ángulo suponiendo que hay una caída despreciable de temperatura a través del lado del ángulo adherido a la pared.
(b) determine la pérdida de calor de los lados del ángulo que se proyectan de la pared hacia afuera.

17.22 En la figura aparece la sección transversal de una viga I de acero, cuyas superficies inferior y superior se mantienen, respectivamente, a 700 K y 370 K.



(a) Suponiendo que se realiza un cambio despreciable de temperatura a través de ambos patines, obtenga una expresión correspondiente a la variación de temperaturas en el alma, en función de la distancia al patín superior.

(b) Trace el perfil de la temperatura en el alma si el coeficiente de transferencia de calor convectivo entre la superficie de acero y el aire circundante es 57 $W/m^2 \cdot K$. La temperatura del aire es de 300 K.

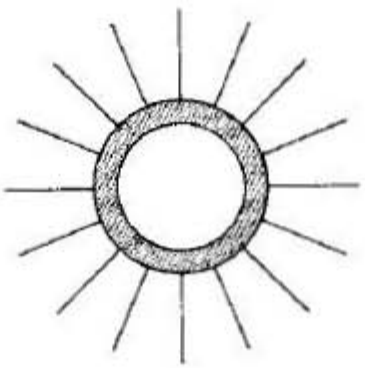
(c) ¿Cuál es la transferencia de calor en los extremos superior e inferior del alma?

17.23 Repita el problema 17.22 para el caso de una viga de aluminio.

17.24 Un tubo de acero inoxidable de 2 in detiene 16 aletas longitudinales espaciadas, tal como puede verse en la figura, alrededor de la superficie. Las aletas son de 1/16 in de grueso y se extienden 1 in a partir de la superficie exterior del tubo.

(a) Si la superficie exterior de la pared del tubo se encuentra a 250° F, el aire circundante está a 80° F y el coeficiente de transferencia de calor convectivo es 8 Btu/h ft^2 ° F, determine el porcentaje de aumento de transferencia de calor en el tubo provisto de aletas, en comparación con el coeficiente del tubo sin aletas.

(b) Determine la misma información que en el inciso (a) para valores de h de 2, 5, 15, 50 y 100 Btu/h ft^2 ° F. Grafique el porcentaje de aumento en q contra h. ¿Cuáles son sus conclusiones respecto a esta gráfica?

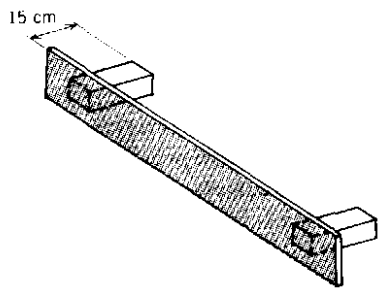


17.25 Repita el problema 17.24 para el caso de un conjunto de un tubo y aletas de aluminio.

17.26 Las temperaturas a las que se encuentran las superficies interior y exterior de una pared plana, cuyo grosor es L, se mantienen a las temperaturas constantes de T_o y T_L, respectivamente, donde $T_o > T_L$. El material de la pared tiene una conductividad térmica que varía linealmente, de acuerdo con la expresión $k = k_o(1 + \beta T)$, k_o y β son constantes. ¿En qué posición diferirá más el perfil real de temperatura del que existiría en el caso de la conductividad térmica constante?

17.27 Resuelva el problema 17.26 en el caso de un cilindro hueco cuyas condiciones de frontera son $T = T_o$ en $r = R_o$ y $T = T_L$ en $r = R_o + L$.

17.28 Una barra conductora de corriente de cobre, que mide 5 cm por 10 cm por 2.5 m de longitud se encuentra en una habitación en la que el aire está a una temperatura de 300 K. La barra está sostenida por medio de 2 pedestales de plástico a los cuales está unida por medio de un adhesivo. Los pedestales tiene una sección transversal cuadrada de 8 cm de lado y están montados en una pared cuya temperatura es de 300 K. Si se disipa 1 kW de energía en la barra conductora de cobre, ¿cuál será su temperatura de equilibrio? El coeficiente de transferencia de calor convectivo en todas las superficies, puede suponerse de 23 W/m² · K. La conductividad térmica del plástico es de 2.6 W/m · K. Desprecie la radiación térmica.



17.29 Resuelva el problema anterior si cada pedestal de plástico tiene, a través de su centro, un tornillo de acero de 1.9 cm.

17.30 Un alambre de acero de 3/16 in de diámetro está aislado con una capa de 4 in de un material cuya conductividad térmica es 0.14 Btu/h ft °F. La superficie exterior de la capa aislante se mantiene a 70° F. ¿Qué cantidad de corriente puede pasar a través del alambre si la temperatura de aislamiento se limita a un máximo de 120° F? La resistividad del cobre es de 1.72×10^{-6} ohm-cm.

17.31 ¿Cuál sería el resultado del problema 17.30 si el fluido que circunda al alambre aislado se mantuviera a 70° F y su coeficiente de transferencia

de calor entre el material aislante y el fluido es de 4 Btu/h ft^2 $^\circ$F? ¿Cuál sería la temperatura superficial del aislamiento bajo estas condiciones?

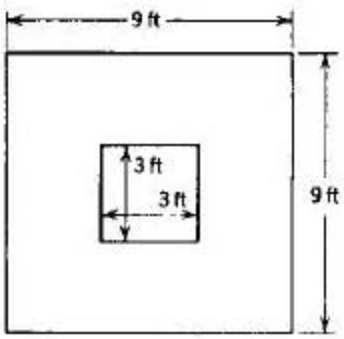
17.32 Vuelva a resolver el problema 17.30 reemplazando el alambre de cobre por alambre de aluminio, cuya resistividad es de 2.83×10^{-6} ohm-cm.

17.33 Encuentre la rapidez de transferencia de calor de un tubo de 3 in de colocado en forma excéntrica dentro de un cilindro de 6 in de interior de diámetro. El eje del tubo más pequeño se encuentra desplazado 1 in del eje del cilindro grande. El espacio que está entre las superficies está lleno de lana de roca ($k = 0.023$ Btu/h ft $^\circ$F). Las temperaturas de las superficies interior y exterior son: 400° F y 100° F, respectivamente.

17.34 Dos tubos de 8 cm de diámetro tienen sus superficies exteriores a 590 K y 370 K, respectivamente. Se encuentran alineados con sus ejes mutuamente paralelos y sus centros están, a 16 cm bajo la superficie de una placa de concreto ($k = 18$ W/m · K) cuya superficie está a 300 K. Determine la transferencia de calor entre los tubos en 30 m de longitud.

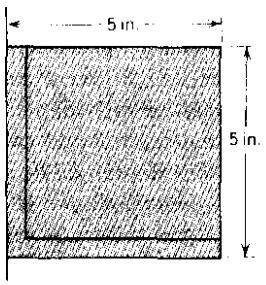
17.35 Se ha cavado un túnel de 3 ft de ancho por 6 ft de altura, en permafrost ($k = 0.06$ Btu/h ft $^\circ$F). La parte superior del túnel está 2 ft por debajo de la superficie. Determine la pérdida de calor hacia la superficie si las paredes del mismo están a 40° F y la superficie del permafrost se encuentra a −60° F. Compare este resultado con el obtenido en el caso de un cilindro enterrado, cuyo diámetro es de 5 ft, y tiene su eje a una profundidad de 4 ft.

17.36 Determine el flujo de calor por pie, en la configuración que aparece en seguida, usando el procedimiento numérico usado en una malla cuyo tamaño es de 1 1/2 ft. El material tiene una conductividad térmica de 0.15 Btu/h ft $^\circ$F. Las temperaturas interior y exterior tienen los valores uniformes de 200° F, respectivamente.



17.37 Repita el problema anterior, usando una malla cuyo tamaño sea de 1 ft.

17.38 Un ángulo de 5 in de acero estándar está adherido a una pared cuya temperatura superficial es de 600° F. El ángulo soporta una sección cuadrada de tabique común para cuya conductividad térmica media se puede tomar el valor de 0.38 Btu/h ft $^\circ$F. El coeficiente de transferencia



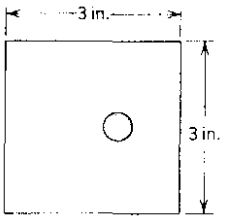
de calor convectivo entre todas las superficies y el aire circundante es de 8 Btu/h ft^2 $^\circ$F. La temperatura del aire es de 80° F. Determínese, por medio de métodos numéricos:

(a) La pérdida total de calor hacia el aire circundante.

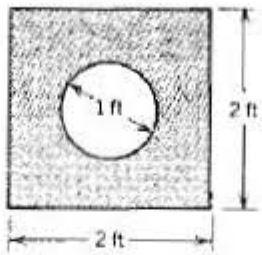
(b) La localización y el valor de la temperatura mínima del tabique.

17.39 Un elemento de calentamiento de Calrod (k = 117 Btu/h ft $^\circ$F) cuyo diámetro es de 0.496 in tiene, caliente, una longitud de 12 in. Este elemento de calentamiento está contenido en el centro de un bloque de aluminio de 1 ft de longitud y 3 in por lado. La temperatura que existe entre el aluminio y el Calrod es de 600° F y la superficie exterior del Calrod está a 200° F. Determine la pérdida de calor si se desprecian los efectos de extremo.

17.40 Resuelva el problema 17.39 con las mismas condiciones, excepto que, por error en la construcción, el calentador se fabricó con el centro desplazado 1/2 in del centro del aluminio.



17.41 Se transporta vapor saturado a 400° F a través de un tubo de 1 ft, (tal como se aprecia en la figura) que está a la misma temperatura del vapor. El tubo está centrado con respecto al conducto cuadrado de 2 ft de lado, cuya superficie se encuentra a 100° F. Si se llena el espacio entre el tubo y el conducto con un aislante que contiene 85% de magnesio, ¿qué cantidad de vapor se condensará en una longitud de 50 ft de tubo?



17.42 Una serie de tubos cuyos diámetros externos son de 7.5 cm. están enterrados a 38 cm de la superficie del suelo con sus centros a 30 cm. unos de otros.

(a) Determine la rapidez de transferencia de calor de los tubos a la superficie si las temperaturas de éstos son, respectivamente de 480 K y 310 K.

(b) Calcule la transferencia total de calor de una red de 15 tubos de 4.5 m. de longitud con las condiciones de operación especificadas anteriormente.

17.43 Un tubo de 32.4 cm de diámetro exterior y 145 cm de longitud se encuentra enterrado con su eje central 1.2 m bajo el nivel del suelo. El suelo está a 280 K y la conductividad térmica media del suelo es de 0.66 W/m · K. Si la superficie del tubo está a 370 K ¿cuál es la pérdida de calor que sufre el tubo por día?

18
CONDUCCION EN ESTADO NO PERMANENTE

Los procesos de transición, en los cuales la temperatura en un punto dado varía con el tiempo, son los que se estudiarán en este capítulo. Como la transferencia de energía está directamente relacionada con el gradiente de temperatura, estos procesos incluyen un flujo de energía en estado no permanente.

Los procesos transitorios de conducción se encuentran comúnmente en el diseño en ingeniería. Estos problemas de diseño generalmente están colocados dentro de dos categorías: los procesos que alcanzan finalmente condiciones de estado permanente y los procesos que se operan durante un tiempo relativamente corto en un medio ambiente cuya temperatura cambia constantemente. Los ejemplos de esta segunda categoría incluyen material metálico o lingotes bajo tratamiento térmico y componentes de proyectiles durante su regreso a la atmósfera terrestre:

En este capítulo analizaremos algunos problemas relacionados con la transferencia de calor en estado no permanente dentro de sistemas que cuenten con fuentes internas de energía, y de los sistemas que carezcan de ellas.

18.1 SOLUCIONES ANALITICAS

La solución de los problemas de conducción en estado no permanente es, en general, más difícil que la de los problemas de conducción en estado permanente debido a que la temperatura depende, tanto del tiempo, como de la posición. Se busca la solución estableciendo la ecuación diferencial que define el problema y las condiciones de frontera. Además deberá conocerse la distribución inicial de temperatura en el medio conductor. Si se encuentra la solución a la ecuación diferencial parcial que satisface las condiciones ini-

cial y de frontera, se establecerá la variación de la distribución de temperaturas con respecto al tiempo y podrá evaluarse el flujo de energía en un tiempo específico.

Al calentar o enfriar un medio conductor, la rapidez de transferencia de energía depende, tanto de la resistencia interna, como de la superficial; los casos límite se representan por medio de una resistencia interna despreciable o por medio de una resistencia superficial despreciable. Se estudirán ambos casos, así como el más general, en el cual ambas resistencias son importantes.

ANALISIS DE PARAMETROS DE MOSAICO–SISTEMAS CUYA RESISTENCIA INTERNA ES DESPRECIABLE.

La ecuación (16-17) será el punto de partida del análisis de conducción transitoria. Dicha ecuación es la siguiente

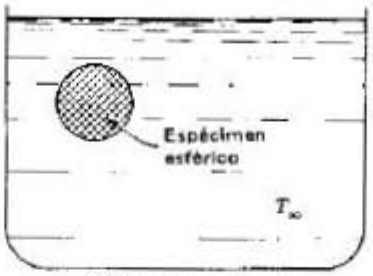
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T + \frac{\dot{q}}{\rho c_p} \tag{16-17}$$

Recuerde que, cuando se obtuvo esta expresión, las propiedades térmicas fueron consideradas como independientes de la posición y del tiempo, sin embargo, la rapidez de generación interna, q, puede variar con respecto a ambos. Con frecuencia esto es lo que ocurre cuando la temperatura en un medio varía significativamente en menos de tres variables espaciales. Un cilindro circular calentado en un extremo, con una condición fija de frontera, mostrará una variación de temperatura en las direcciones radial y axial, así como con respecto al tiempo. Si el cilindro tiene una longitud grande comparada con su diámetro, o si está fabricado de un material de alta conductividad térmica, la temperatura variará solamente con la posición axial y con el tiempo. Si a un espécimen metálico, cuya temperatura sea, inicialmente, uniforme, se le expone a un medio que está a diferente temperatura, puede ser que su tamaño, forma y conductividad térmica se combinen de tal modo que la temperatura del material varíe solamente con el tiempo, es decir, que no varíe en función de la posición. Estas son las condiciones características de los sistemas de mosaico, en los cuales la temperatura de un cuerpo sólo varía con respecto al tiempo; este es el caso más fácil de analizar, por eso estudiaremos, como primer caso de conducción transitoria, la de un sistema de parámetros de "mosaico".

En la Figura 18.1 aparece un espécimen metálico, que se encuentra inicialmente a una temperatura uniforme, T_0, después de haberlo sumergido en un aceite caliente a temperatura T_∞ durante un tiempo t. Se supone que la temperatura de la esfera metálica es uniforme en cualquier instante dado.

Un análisis por medio de la primera ley, utilizando la ecuación (6-10) aplicada a un volumen esférico de control que coincida con el espécimen en cuestión, la reducirá a:

$$\frac{\delta Q}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\text{c.v.}} e\rho \, dV \tag{18-1}$$



La rapidez de adición de calor al volumen de control $\delta Q/dt$, se debe a la convección del aceite y se escribe:

$$\frac{\delta Q}{dt} = hA(T_\infty - T) \tag{18-2}$$

La rapidez de aumento de energía dentro del espécimen, $\partial/\partial t \iiint_{c.v.} e\rho\, dV$, de propiedades constantes, se puede expresar como sigue:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{c.v.} e\rho\, dV = \rho V c_p \frac{dT}{dt} \tag{18-3}$$

Si se igualan estas expresiones, tal como lo indica la ecuación (18-1), se tendrá, después de un ligero rearreglo:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{hA(T_\infty - T)}{\rho V c_p} \tag{18-4}$$

Ahora puede obtenerse una solución a la variación de la temperatura con respecto al tiempo, resolviendo la ecuación (18-4), usando la condición inicial: $T(0) = T_0$ y obteniendo:

$$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{-hAt/\rho c_p V} \tag{18-5}$$

Se observa que el exponente es adimensional. Un reacomodo del término del exponente, se puede lograr en la siguiente forma:

$$\frac{hAt}{\rho c_p V} = \left(\frac{hV}{kA}\right)\left(\frac{A^2 k}{\rho V^2 c_p}t\right) = \left(\frac{hV/A}{k}\right)\left[\frac{\alpha t}{(V/A)^2}\right] \tag{18-6}$$

Todos los términos encerrados dentro de un paréntesis rectangular de la ecuación (18-6) son adimensionales. La razón V/A, que tiene unidades de lon-

gitud, también forma parte de estas nuevas formas paramétricas. El primero de los nuevos parámetros adimensionales que se forma, es el *Módulo de Biot*, que se abrevia Bi,

$$\text{Bi} = \frac{hV/A}{k} \tag{18-7}$$

Por analogía con los conceptos de resistencia térmica estudiados en detalle anteriormente, se ve que el módulo de Biot es la razón $(V/A)/K$, la resistencia conductora (interna) a la transferencia de calor, a $1/h$, la resistencia convectiva (externa) a la transferencia de calor. La magnitud de Bi, tiene, por lo tanto, significado físico, ya que indica donde ocurre la mayor resistencia a la transferencia de calor. Un valor grande de Bi indica que la resistencia conductora es la que controla el proceso, esto es, que existe una mayor capacidad para que el calor abandone la superficie por convección que para que llegue a ella por conducción. Un pequeño valor de Bi representa el caso en el que la resistencia interna es despreciablemente pequeña y existe una mayor capacidadl para transferir calor por conducción que por convección.

En este último caso, el fenómeno que rige la transferencia es la convección y los gradientes de temperatura del medio son muy pequeños. La suposición básica que se hace en el análisis de los análisis de parámetros de mosaico es la de que el gradiente de temperatura interna es extremadamente pequeño.

Una conclusión natural del análisis anterior es que la magnitud del módulo de Biot es una medida razonable de la probable exactitud de un análisis de parámetros de mosaico. Una regla común es aquella que dice que el error inherente a una análisis de parámetros de mosaico será menor del 5% para un valor de Bi menor de 0.1. Por lo tanto, la evaluación del módulo de Biot deberá ser lo primero que se haga cuando se analice una situación de conducción en estado no permanente.

El otro término que aparece encerrado en un paréntesis rectangular en la ecuación (18-6) es el *módulo de Fourier*, que se abrevia Fo, donde

$$\text{Fo} = \frac{\alpha t}{(V/A)^2} \tag{18-8}$$

El módulo de Fourier se usa a menudo como parámetro adimensional del tiempo. La solución de parámetro de mosaico para la conducción transitoria se puede expresar, ahora, en la forma:

$$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{\text{Bi Fo}} \tag{18-9}$$

En la Figura 18-2 aparece la gráfica de la ecuación (18-9). El uso de esta misma ecuación se explica en el ejemplo que sigue:

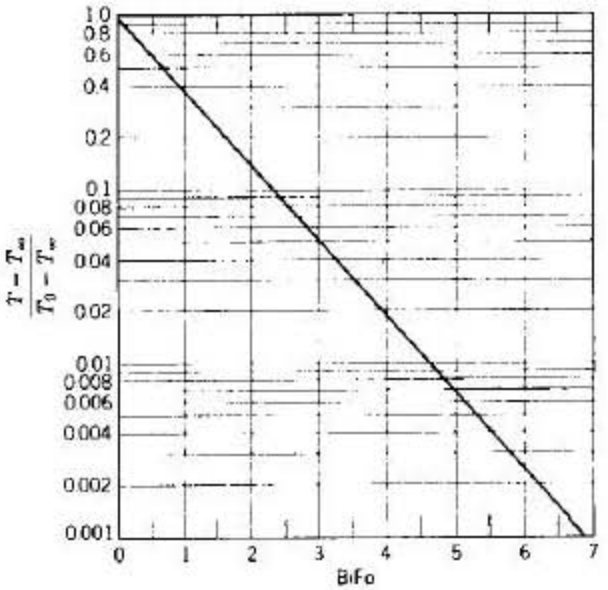


Figura 18.2 Historia del tiempo contra la temperatura de un cuerpo que se encontraba, nicialmente, a una temperatura de T_0 y se le expone a una temperatura de T_∞. Caso de parámetro de mosaico.

EJEMPLO 1

Un alambre de cobre, largo de 1/4 in de diámetro, se mantuvo en una corriente de aire a una temperatura $T_\infty = 100^\circ$ F. Después de 30 seg, la temperatura media del alambre aumentó de 50° F a 80° F. Haga un cálculo de la conductancia superficial unitaria, h.

Para poder determinar si puede o no utilizarse la ecuación (18-5) debe evaluarse el módulo de Biot. El valor de Bi se calcula así:

$$\text{Bi} = \frac{hV/A}{k} = \frac{h\left(\frac{\pi D^2 L}{4\pi DL}\right)}{223 \text{ Btu/hr ft °F}} = \frac{h(1/4 \times 1/12 \text{ ft})}{4(223 \text{ Btu/hr ft °F})} = 2.36 \times 10^{-5} h$$

Haciendo Bi=0.1, que es el valor límite de Bi para que sea válido un análisis de parámetro de mosaico y despejando h, se tendrá:

$$h = 0.1/2.36 \times 10^{-5} = 42\,800 \text{ Btu/hr ft}^2\text{°F}$$

Así pues, un análisis de parámetro de mosaico será suficientemente exacto en tanto que $h < 42{,}000$ Btu/h ft °F. Si se procede a la solución de la ecuación (18-5) se obtendrá, para h:

$$h = \frac{\rho c_p V}{tA} \ln \frac{T_i - T_\infty}{T - T_\infty}$$

$$= \frac{(555 \text{ lb}_m/\text{ft}^3)(0.092 \text{ Btu/lb}_m\text{°F})}{30/3600 \text{ hr}} \left(\frac{\pi D^2 L}{4\pi DL} \text{ ft}\right) \ln \frac{50-100}{80-100}$$

$$= 29.2 \text{ Btu/hr ft}^2\text{ °F} \qquad (50.6 \text{ W/m} \cdot \text{K})$$

Calentamiento de un Cuerpo en Condiciones de Resistencia Superficial Despreciable. Un segundo tipo de proceso de transferencia de energía dependiente del tiempo se encuentra cuando la resistencia superficial es pequeña en relación con la resistencia total, o sea, cuando Bi es $\gg .0.1$. En este proceso, la temperatura de la superficie, T_s, es constante en todo instante, $t>0$ y su valor es esencialmente igual al de la temperatura ambiente, T_∞.

Para comprender el método analítico de solución de este tipo de problemas de conducción, imaginemos una placa plana de gran longitud y grosor uniforme, L. La distribución inicial de temperatura a lo largo de la placa, se supondrá que es una función arbitraria de z. La solución de la historia de la temperatura deberá satisfacer la ecuación de campo de Fourier:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T \tag{16-18}$$

o, para flujos unidireccionales de energía:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \tag{18-10}$$

y las condiciones iniciales y de frontera

$$T = T_0(z) \qquad \text{en } t = 0 \text{ cuando } 0 \le z \le L$$

$$T = T_s \qquad \text{en } z = 0 \text{ cuando } t > 0$$

y

$$T = T_s \qquad \text{en } z = L \text{ cuando } t > 0$$

Por conveniencia, sea $Y = (T - T_s)/(T_0 - T_s)$, donde T_0 es una temperatura de referencia, escogida arbitrariamente. La ecuación diferencial parcial se puede escribir en términos de la nueva variable de temperatura, en la forma:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} \tag{18-11}$$

y las condiciones iniciales y de frontera se transforman en:

$$Y = Y_0(z) \qquad \text{en } t = 0 \text{ cuando } 0 \le z \le L$$

$$Y = 0 \qquad \text{en } z = 0 \text{ cuando } t > 0$$

y

$$Y = 0 \qquad \text{en } z = L \text{ cuando } t > 0$$

Al resolver la ecuación (18-11) por medio del método de separación de variables, se llega a soluciones de la forma:

$$Y = (C_1 \cos \lambda z + C_2 \sin \lambda z) e^{-\alpha \lambda^2 t}$$

Las constantes C_1 y C_2 y el parámetro λ se obtienen por medio de la aplicación de las condiciones inciales y de frontera.

La silución completa es:

$$Y = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} z\right) e^{-(n\pi/2)^2 \mathrm{Fo}} \int_0^L Y_0(z) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} z \, dz \qquad (18\text{-}12)$$

donde $\mathrm{Fo} = \alpha t/(L/2)^2$. La ecuación (18-12) señala la necesidad de conocer la distribución inicial de temperaturas del medio conductor, Y_0 (z), antes de poder calcular toda la historia de la temperatura. Estudiemos el caso especial en el que el cuerpo conductor tenga una temperatura inicial uniforme, Y_0 $(z) = Y_0$. Con esta distribución de temperaturas, la ecuación (18-12) se reduce a:

$$\frac{T - T_s}{T_0 - T_s} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} z\right) e^{-(n\pi/2)^2 \mathrm{Fo}} \qquad n = 1, 3, 5, \ldots \qquad (18\text{-}14)$$

La historia de la temperatura en el centro del plano infinito, así como la historia de la temperatura en el centro de otros sólidos, aparece en la figura 18.3. La historia de la temperatura en el centro de una pared infinita, de un cilindro infinito y de una esfera, puede consultarse en el Apéndice F, en las tablas de Heissler. Estas tablas son más abundantes acerca del módulo de Fourier que la figura 18.3.

El cambio de calor, q, de cualquier plano del medio conductor, puede evaluarse por medio de la ecuación:

$$q_z = -kA \frac{\partial T}{\partial z} \qquad (18\text{-}13)$$

En el caso de la placa plana cuya distribución inicial de temperatura, T_0, se uniforme, el cambio de calor en cualquier instante, t, es:

$$q_z = 4\left(\frac{kA}{L}\right)(T_s - T_0) \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{L} z\right) e^{-(n\pi/2)^2 \mathrm{Fo}} \qquad n = 1, 3, 5, \ldots \qquad (18\text{-}15)$$

En el ejemplo siguiente se explicará la utilización de la historia de la temperatura central.

EJEMPLO 2

Una esfera de hierro colado de 1 ft de diámetro ($\alpha = 0.68$ ft^2/h), que se encuentra inicialmente a 600°F se deja caer en un baño de aceite que se encuentra a 70°F. Determínese el tiempo necesario de enfriamiento para reducir la temperatura central de la esfera a 150°F.

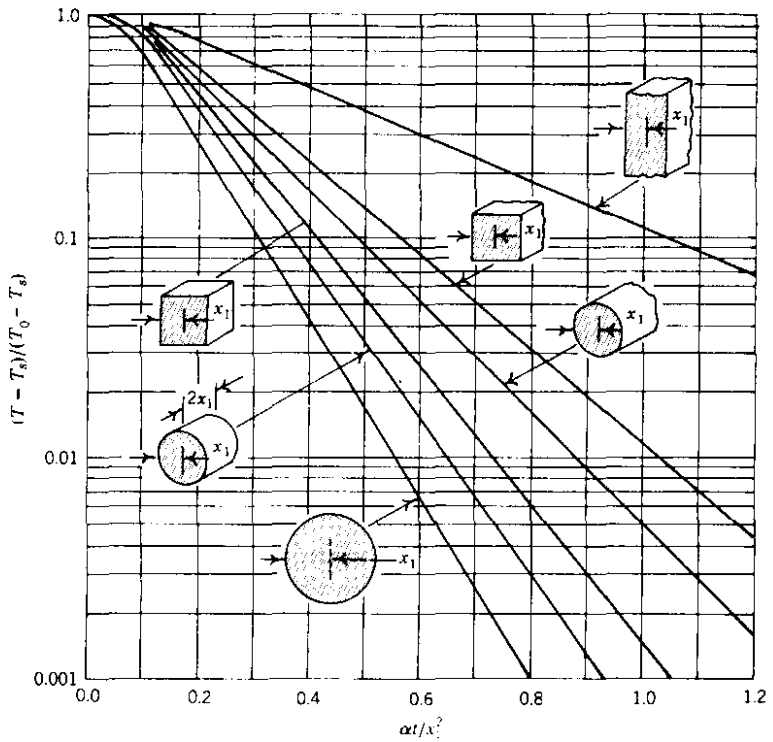


Figura 18.3 Historia de la temperatura central de diversos sólidos cuya temperatura inicial es T_0 y que tiene una temperatura superficial constante T_s (de P.J. Schneider, *Conduction Heat. Transfer*, Addison-Wesley Publishing Co. Inc., Reading, Mass., 1955 pág. 249. Con licencia de los editories).

La ordenada de la figura 18.2 se calcula, con las temperaturas establecidas, en la forma:

$$\frac{T_{\text{centro}} - T_s}{T_0 - T_s} = \frac{150 - 70}{600 - 70} = 0.151$$

El valor de la abcisa que corresponde a la esfera es de 0.26. Despejando el tiempo, t, se obtiene:

$$t = 0.26\frac{x_1^2}{\alpha} = \frac{0.26(\frac{1}{2}\text{ ft})^2}{0.68\text{ ft}^2/\text{hr}} = 0.0955\text{ hr} \qquad (343.8\text{ s})$$

Calentamiento de un Cuerpo con Resistencia Finita tanto en la superficie como Internas. Los casos más generales de procesos de conducción de calor transitorios incluyen a los valores significativos de las resistencias interna y superficial. La solución de la historia de la temperatura sin generación in-

terna debe satisfacer la ecuación de Fourier del campo, que puede expresarse de la manera siguiente, cuando corresponde a un flujo unidimensional de calor

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \tag{18-7}$$

Un caso de gran interés práctico es aquel en el cual se coloca un cuerpo con temperatura uniforme en un medio fluido diferente, de manera que sus superficies queden expuestas de manera súbita y simultánea al fluido a temperatura T_∞. En este caso, la historia de la temperatura deberá satisfacer las condiciones iniciales de simetría y de frontera de convección

$$T = T_0 \qquad \text{en } t = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \qquad \text{en la línea central del cuerpo}$$

y

$$-\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{h}{k}(T - T_\infty) \qquad \text{en la superficie}$$

Un tipo de solución de esta clase de problema es el de separación de variables, que da como resultado suluciones producto como las encontradas anteriormente cuando sólo estaba incluida la resistencia interna.

Se han obtenido soluciones a estos casos de procesos de transferencia de energía para diversas geometrías. Carslaw y Jaeger*, así como Ingersoll, Zobel e Ingersoll†, han escrito excelentes tratados acerca de estas soluciones. Si vuelve a recordarse a la placa infinita, cuyo grosor es $2x_1$, insertada en un medio a temperatura constante, T_∞ pero ahora se incluye una conductancia superficial constante, h, se obtendrá la siguiente solución:

$$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \delta_n \cos(\delta_n z/x_1)}{\delta_n + \operatorname{sen} \delta_n \cos \delta_n} e^{-\delta_n^2 \mathrm{Fo}} \tag{18-16}$$

donde δ_n se define por medio de la relación:

$$\delta_n \tan \delta_n = \frac{h x_1}{k} \tag{18-17}$$

La historia de la temperatura de esta forma geométrica relativamente sencilla está en función de tres cantidades adimensionales: $\alpha t/x_1^2$, hx_1/k, y la distancia relativa, z/x_1. La evaluación del perfil de la temperatura a partir de esta ecuación analítica ocupa mucho tiempo.

*H.S. Carslaw y J.C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, Oxford, University Press, 1947.

†L.R. Ingersoll, O.J. Zobel y A.C. Ingersol, *Heat Conduction (Whith Engeneering and Geological Aplications)*, Mc Graw Hill Book Company, Nueva York, 1948.

Transferencia de calor a una Pared Semiinfinita

Una solución analítica a la ecuación de conducción unidimensional de calor en el caso de la pared semiinfinita se utiliza en el cálculo ingenieril. Estudie la situación que aparece en la figura 18.4. Una pared grande y plana que se encuentra, inicialmente, a una temperatura constante T_0, esta sujeta

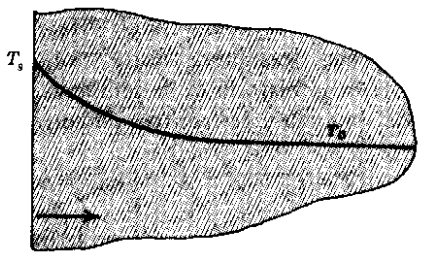


Figura 18.4 Distribución de temperatura en una pared semiinfinita en el tiempo t.

a una temperatura superficial T_s, donde $T_s > T_0$. La ecuación diferencial que se va a resolver es

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \tag{18-10}$$

y las condiciones iniciales y de frontera son:

$$T = T_0 \quad \text{en } t = 0 \text{ para toda } z$$
$$T = T_s \quad \text{en } z = 0 \text{ para toda } t$$

y

$$T \to T_0 \text{ cuando } z \to \infty \text{ para toda } t$$

La solución a este problema puede obtenerse de diferentes maneras, entre las cuales se cuentan las transformaciones de Laplace y de Fourier. Usaremos un procedimiento alterno, menos complicado matemáticamente. Las variables de la ecuación (18-10) se puede expresar en forma adimensional por analogía con el caso anterior. Por lo tanto, se puede escribir:

$$\frac{T - T_0}{T_s - T_0} = f\left(\frac{z}{x_1}, \frac{\alpha t}{x_1^2}\right)$$

sin embargo, en este problema no existe una dimensión característica definida, x_1 y, por lo tanto $(T - T_0) / (T_s - T_0) = f(\alpha t / z^2)$ o, igualmente, $(T - T_0)/(T_s - T_0) = f(z/\sqrt{\alpha t})$. Si $\eta = z/2\sqrt{\alpha t}$ se selecciona como variable indepen-

diente y se usa la variable dependiente, $Y = (T - T_0)/(T_s - T_0)$, al substituir en la ecuación (18-10), se obtiene la ecuación diferencial ordinaria:

$$d^2Y/d\eta^2 + 2\eta\, dY/d\eta = 0 \tag{18-18}$$

con las condiciones iniciales y de frontera transformadas,

$$Y \to 0 \text{ cuando } \eta \to \infty$$

y

$$Y = 1 \quad \text{en } \eta = 0$$

La primera de las condiciones anteriores es la misma que la condición inicial $T = T_0$ en $t = 0$ y la condición de frontera $T \to T_0$ cuando $z \to \infty$

La ecuación (18-18) se puede integrar una vez, para obtener el resultado:

$$\ln \frac{dY}{d\eta} = c_1 - \eta^2$$

ó

$$\frac{dY}{d\eta} = c_2 e^{-\eta^2}$$

y si se le integra de nuevo dará

$$Y = c_3 + c_2 \int e^{-\eta^2}\, d\eta \tag{18-19}$$

La integral está relacionada con una forma que se encuentra a menudo llamada *función de error*, que se denomina "erf", donde

$$\text{erf}\,\phi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\phi} e^{-\eta^2}\, d\eta$$

y erf (0) = 0, erf (∞) = 1. En el apéndice I se ofrece una tabla corta de erf ϕ. Si se aplican a la ecuación (18-19) las condiciones de frontera, se obtiene

$$Y = 1 - \text{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$$

ó

$$\frac{T - T_0}{T_s - T_0} = 1 - \text{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$$

ó

$$\frac{T_s - T}{T_s - T_0} = \text{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \tag{18-20}$$

Esta ecuación es muy fácil de usar y muy valiosa.

Analice ahora una pared finita de grosor L sujeta a la temperatura superficial T_s.

Hasta que el cambio de temperatura en $z = L$ exceda una cantidad nominal, digamos $(T - T_0)/(T_s - T_0)$ igual a 0.5% , la solución será igual para paredes finitas e infinitas. El valor de $L/(2\sqrt{\alpha t})$ correspondiente a un cambio de 0.5% en $(T - T_0)/(T^* - T_0)$ es $L/(2\sqrt{\alpha t}) = 2$, de manera que, para $L/(2\sqrt{\alpha t}) > 2$, la ecuación (18-20) se puede usar en geometrías finitas con un error pequeño o sin error.

En el caso de resistencia superficial finita, la solución a la ecuación (18-10), para una pared semiinfinita, es:

$$\frac{T_\infty - T}{T_\infty - T_0} = \operatorname{erf}\frac{z}{2\sqrt{\alpha t}} + \exp\left(\frac{hz}{k} + \frac{h^2\alpha t}{k^2}\right)\left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{h\sqrt{\alpha t}}{k} + \frac{z}{2\sqrt{\alpha t}}\right)\right] \qquad (18\text{-}21)$$

Esta ecuación puede usarse para determinar la distribución de temperatura en cuerpos finitos para tiempos pequeños en la misma forma que lo hace la ecuación (18-20). La temeperatura superficial es particularmente fácil de obtener a partir de la ecuación anterior, si hacemos $z = 0$ y la rapidez de transferencia de calor se puede determinar a partir de:

$$\frac{q}{A} = h(T_s - T_\infty)$$

18-2 TABLAS DE TEMPERATURA Y TIEMPO CORRESPONDIENTES A FORMAS GEOMETRICAS SIMPLES

Se han calculado ecuaciones que describen los perfiles de temperatura correspodientes a la transferencia de energía en estado no permanente en diversas formas simples con ciertas condiciones restrictivas de frontera y se han presentado en una amplia variedad de tablas para facilitar su uso. En el Apéndice F podrán encontrarse dos formas diferentes de dichas tablas.

En este mismo apéndice se representan las soluciones a la placa plana, a la esfera y al cilindro largo en términos de cuatro razones adimensionales:

Y, cambio no realizado de temperatura $= \dfrac{T_\infty - T}{T_\infty - T_0}$

X, tiempo relativo $= \dfrac{\alpha t}{x_1^2}$

n , posición relativa $= \dfrac{x}{x_1}$

y

$$m, \text{ resistencia relativa} = \frac{k}{hx_1}$$

donde x es el radio o semigrosor del medio conductor. Estas tablas pueden usarse en la evaluación de perfiles de temperatura en los casos que incluyen un transporte de energía hacia o desde el medio conductor cuando se encuentran las condicones siguienres:

(a) La ecuación de Fourier de campo describe el proceso; esto es: difusividad térmica constante y sin fuente interna de calor.

(b) El medio conductor tiene una temperatura inicial uniforme, T_0.

(c) La temperatura de la frontera o del fluido adyacente cambia a un nuevo valor, T_∞ para $t \geqslant 0$.

En las placas planas, en las que el transporte de energía tiene lugar solamente desde una de las caras, el tiempo, la posición y la resistencia relativas, se calculan como si el grosor fuera del doble del valor verdadero.

Aunque las tablas se hicieron para transporte unidimensional, pueden combinarse para producir soluciones a problemas bidimensionales y tridimensionales. A continuación aparece un resumen de estas soluciones combinadas.

1. Transporte en una barra rectangular con sus extremos aislados

$$Y_{\text{barra}} = Y_a\, Y_b \tag{18-22}$$

donde Y_a se evalúa por medio de la anchura $x_1 = a$, Y_b por medio del grosor $x_1 = b$.

2. Transporte en un paralelepípedo rectangular

$$Y_{\text{paralelepípedo}} = Y_a\, Y_b\, Y_c \tag{18-23}$$

donde Y_a se evalúa con el ancho $x_1 = a$, Y_b con el grosor $x_1 = b$ y Y_c con la profundidad $x_1 = c$.

3. Transporte en un cilindro, incluyendo ambos extremos,

$$Y_{\substack{\text{cilindro más} \\ \text{extremos}}} = Y_{\text{cilindro}}\, Y_a \tag{18-24}$$

donde Y_a se evalúa usando la gráfica correspondiente a la placa plana y el grosor $x_1 = a$.

En los siguientes ejemplos se muestra la forma de usar las gráficas.

EJEMPLO 3

En una pared plana de ladrillo refractario, de 0.5 m de grueso y originalmente a 200 K, súbitamente una de sus caras queda expuesta a un gas caliente, a 1,200 K. Si el coeficiente de transferencia de calor, del lado caliente es de 7.38 W/m^2. K y la otra cara de la

pared está aislada, de modo que no sale el calor, determine (a) el tiempo necesario para elevar la temperatura del centro de la pared a 600 K, (b) la temperatura de la cara aislada de la pared al tiempo evaluado en (a).

En seguida puede verse una lista de valores obtenidos a partir de la gráfica de propiedades físicas que aparecen en el Apéndice H.

$$k = 1.125 \text{ W/m} \cdot \text{K}$$

$$c_p = 919 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$$

$$\rho = 2310 \text{ kg/m}^3$$

y

$$\alpha = 5.16 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$$

La cara aislada limitada la transferencia de energía hacia el medio conductor, solamente a una dirección, lo cual equivale a la transferencia de calor en una pared de 1 m de grueso, donde x se mide desde la línea de simetría de la cara aislada. La posición relativa x/x_1 es 1/2. La resistencia relativa, k/hx_1 es 1.125 / [7.38) (0.5)] o sea 0.305. El cambio no realizado, $Y=(T_\infty - T)/(T_\infty - T_0)$ es igual a (1200 − 600)/(1200 − 200) o sea 0.6. De la Figura F.7, del Apéndice F, la abcisa $\alpha t/x_1^2$ es 0.35, bajo estas condiciones. El tiempo requerido para elevar la temperatura de la línea central a 600°F, es:

$$t = \frac{0.35x_1^2}{\alpha} = \frac{0.35(0.5)^2}{5.16 \times 10^{-7}} = 1.696 \times 10^5 \text{ s} \qquad \text{ó} \qquad 47.1 \text{ hr}$$

La resistencia relativa y el tiempo relativo de (b) serán iguales que en la parte (a). La posición relativa x/x_1 es 0. Si usamos estos valores y la figura F.1 del Apéndice F, encontraremos que el cambio no realizado, Y es de 0.74. La temperatura deseada se puede evaluar usando este valor:

$$\frac{T_s - T}{T_s - T_0} = \frac{1200 - T}{1200 - 200} = 0.74$$

ó

$$T = 460 \text{ K} \qquad (368°\text{F})$$

EJEMPLO 4

Un lingote de acero de 1 ft de diámetro, que inicialmente se encuentra a una temperatura de 700°F se sumerge en un baño de aceite que permance a 100°F. Si la conductancia de la superficie es de 6 Btu/h ft^2 °F, determine la temperatura a la que se encuentra el centro del lingote después de 1 h.

Pueden usarse los valores promedio que aparecen a continuación, obtenidos del Apéndice H, para las propiedades físicas pertinentes, en este problema:

$$k = 22 \text{ Btu/hr ft °F}$$

$$c_p = 0.11 \text{ Btu/lb °F}$$

$$\rho = 490 \text{ lb/ft}^3$$

y

$$\alpha = 0.408 \text{ ft}^2/\text{hr}$$

El cambio no realizado quedará determinado por la ecuación (18-21). Para evaluar Y se utilizan las siguientes razones adimensionales:

$$X = \frac{\alpha t}{x_1^2} = \frac{(0.408)(1)}{(1)^2} = 0.408$$

$$n = \frac{x}{x_1} = 0$$

y

$$m = \frac{k}{hx_1} = \frac{22}{(6)(1)} = 3.67$$

Por medio de la figura F.1 se encuentra que Y_a es 0.9. Para evaluar $Y_{cilindro}$ se utilizan los siguientes radios adimensionales:

$$X = \frac{\alpha t}{x_1^2} = \frac{(0.408)(1)}{(0.5)^2} = 1.63$$

$$n = \frac{x}{x_1} = 0$$

y

$$m = \frac{k}{hx_1} = \frac{22}{(6)(0.5)} = 7.33$$

Con ayuda de la figura F.2 se encuentra que $Y_{cilindro}$ es 0.7.
La transferencia de energía a través de las paredes cilíndricas y los extremos,

$$Y = Y_{\text{cilindro}} \quad Y_a,$$

ó

$$Y = (0.7)(0.9) = 0.63$$

así

$$\frac{T_\infty - T}{T_\infty - T_0} = 0.63$$

ó

$$\frac{100 - T}{100 - 700} = 0.63$$

y

$$T = 478\,^\circ\text{F} \qquad (521\ \text{K})$$

Tal como se aparece en el Ejemplo 3, la temperatura de cualquier plano dado dentro del medio conductor se puede calcular para cualquier tiempo específico. Una vez conocido todo el perfil, el cambio de calor instantáneo, $(q/A)|_t$ en cualquier plano, se puede calcular encontrando la pendiente del per-

fil de temperatura en el plano dado y sustituyendo este valor en la ecuación de Fourier de rapidez de transferencia:

$$\frac{q_x}{A} = -k\frac{\partial T}{\partial x} \tag{15-1}$$

18.3 SOLUCION GRAFICA DEL FLUJO TRANSITORIO UNIDIMENSIONAL DE ENERGIA; GRAFICA SCHMIDT.

En muchos procesos que dependen del tiempo, las condiciones reales de operación no corresponden a las condiciones iniciales y de frontera establecidas en las soluciones analíticas establecidas anteriormente. La distribución inicial de temperatura puede ser de tipo no uniforme o pueden variar la temperatura ambiente, la conductancia superficial o la difusividad térmica. Los complejos casos como el citado pueden calcularse empleando técnicas numéricas.

Para empezar el estudio de los métodos numéricos se sugiere al lector regresar a la ecuación (17-66) y a los pasos que condujeron a ella.

En el caso en que no exista generación interna de energía, la ecuación (17-66) se reduce a:

$$k\frac{\Delta y}{\Delta x}(T_{i-1,j} + T_{i+1,j} - 2T_{i,j}) + k\frac{\Delta x}{\Delta y}(T_{i,j-1} + T_{i,j+1} - 2T_{i,j}) = \left(\frac{\rho c_p T_{i,j}|_{t+\Delta t} - \rho c_p T_{i,j}|_t}{\Delta t}\right)\Delta x\,\Delta y \tag{18-24}$$

Esta expresión, que se aplica específicamente a dos dimensiones se puede extender fácilmente a tres.

El término dependiente del tiempo que aparece al lado derecho de la ecuación (18-24) está escrito de tal manera que la temperatura en el nodo, i, j se supone conocida en el tiempo t. Esta ecuación se puede resolver para encontrar T_{ij} al final del intervalo de tiempo Δt. Como $T_{i,j}|_{t+\Delta t}$ aparece solamente una vez en esta espresión, puede despejarse fácilmente. Esta manera de evaluar $T_{i,j}$ al final de un incremento de tiempo se llama técnica "explícita". Welty* ofrece un estudio más detallado de las soluciones explícitas.

La ecuación (18-24) puede resolverse despejando la temperatura en el nodo i, j, para todos los valores de i y j que comprendan una región de interés. Es obvio que cuando hay un gran número de nodos deben hacerse muchos cálculos. Si hay, además, muchos incrementos de tiempo, el número de cálculos crece tanto que la única forma posible de proceder es por medio de una computadora.

*J.R. Welty, *Engeneering Heat Transfer*, Wiley, Nueva York, 1974.

Por ahora, solamente tomaremos en cuenta la forma unidimensional de la ecuación (18-24).

Si el tamaño del incremento es Δx, la expresión simplificada se transforma en :

$$\frac{k}{\Delta x}(T_{i-1}|_t + T_{i+1}|_t - 2T_i|_t) = \left(\frac{\rho c_p T_i|_{t+\Delta t} - \rho c_p T_i|_t}{\Delta t}\right)\Delta x \qquad (18\text{-}25)$$

donde se ha omitido la notación de j y la ausencia de variaciones en la dirección de y permite deshacernos de varios términos. En seguida se analizan las propiedades constantes y se representa la razón $k/\rho c_p$ por medio de la letra α. Si se resuelve la ecuación para $T_i|_{t+\Delta t}$, se obtiene

$$T_i|_{t+\Delta t} = \frac{\alpha\,\Delta t}{(\Delta x)^2}(T_{i+1}|_t + T_{i-1}|_t) + \left(1 - \frac{2\alpha\,\Delta t}{(\Delta x)^2}\right)T_i|_t \qquad (18\text{-}26)$$

En esta ecuación la razón adimensional, $\alpha\Delta t/(\Delta x)^2$ se ha obtenido en forma muy natural. Además note que su forma se asemeja a la del módulo de Fourier. Esta razón es sumamente importante para obtener una solución puesto que relaciona el incremento de tiempo con el tamaño de nodo, Δx. Obviamente estas cantidades no son independientes.

Se ha econtrado que la ecuación (18-26) es numéricamente "estable" cuando:

$$\frac{\alpha\,\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2} \qquad (18\text{-}27)$$

De nuevo se sugiere al lector que consulte a Welty* para encontrar un breve análises de la estabilidad numérica.

Cuando se estudia la ecuación (18-26) resulta evidente que la igualdad de la ecuacución (18-27) permite una simplificación conveniente. En el caso en que $\Delta t/(\Delta x)^2 = 1/2$, la ecuación (18-26) se transforma en:

$$T_i|_{t+\Delta t} = \frac{T_{i+1}|_t + T_{i-1}|_t}{2} \qquad (18\text{-}28)$$

Esta expresión, junto con el criterio de estabilidad, forma la base de una solución gráfica conocida como la *técnica de graficación de Schmidt*. La ecuación anterior indica que la temperatura en el nodo i, después de haber transcurrido un tiempo Δt, es igual a la media aritmética de las temperaturas en los puntos nodales, a Δx unidades, al principio del intervalo de tiempo. En el siguiente ejemplo se demuestra el uso de una gráfica de Schmidt para resolver un problema de conducción transitoria.

*J.R. Welty, citado anteriormente.

EJEMPLO 5

Encuentre el grosor de una pared plana de asbesto que incialmente se encuentra a 100°F que se usa para que la temperatura de un lado, se mantenga a 1,500°F durante una hora, en tanto que del otro lado la temperatura permanezca por debajo de 300°F.

Se traza una gráfica de temperatura contra grosor, como puede verse en la figura 18.5. Se trazan intervalos espaciales iguales en el medio conductor. Después de un intervalo de tiempo, el plano (1) se encuentra a una temperatura $T_1^{\ 1}$, como puede verse si se traza una recta a los 1500°F en el plano (0) de referencia de la temperatura y los 100°F en el plano (2) de referencia de la temperatura. Este intervalo de tiempo se llama ①. Durante el segundo intervalo ②, el plano (2) de referencia de la temperatura se aumenta a $T_2^{\ 2}$. Esto se evalúa trazando, de nuevo, una recta entre las temperaturas de los dos planos adyacentes de referencia de la temperatura. Durante el intervalo ③ de tiempo, se elevan las temperaturas de los planos de referencia (1) y (3). La evaluación gráfica del perfil de la temperatura puede continuar durante $n\ \Delta t$ intervalos de tiempo. Con cada una de estas construcciones se establece el perfil de la temperatura a través del medio conductor para ese tiempo específico. La temperatura es de 300°F a una distancia de 4.3 ΔL desde la superficie calentada después del octavo intervalo de tiempo. Como el tiempo total empleado en este problema de calentamiento transitorio es de 1 h., Δt=1/8 h. La difusividad térmica del asbesto, α, es igual a 0.01 ft^2/h. Si se sustituyen estos valores en la ecuación (18-27), se puede determinar la longitud de cada uno de los intervalos espaciales en la siguiente forma:

$$\Delta t = \frac{(\Delta L)^2}{2\alpha}$$

$$(\Delta L)^2 = 2\alpha\ \Delta t = (2)(0.01)(\tfrac{1}{8}) = 0.0025\ ft^2$$

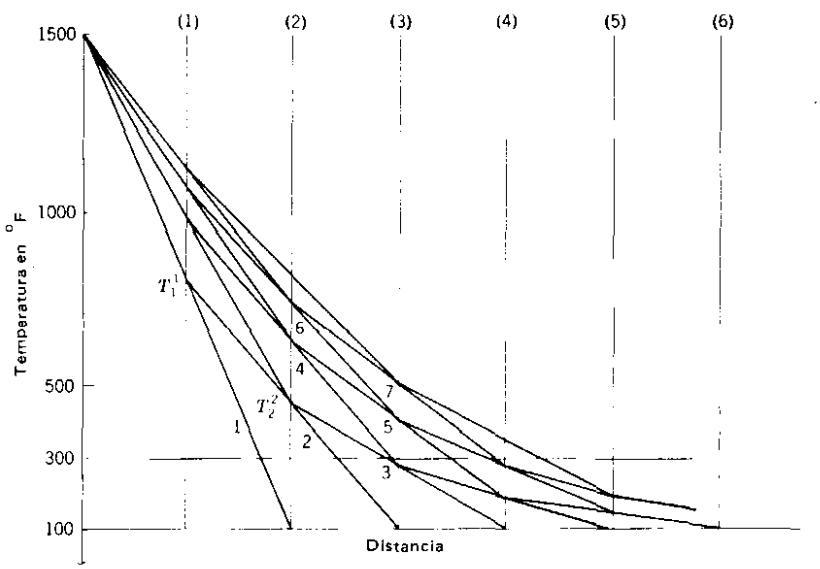


Figura 18.5 Gráfica de Schmidt correspondiente al Ejemplo 5.

ó

$$\Delta L = 0.05 \text{ ft}$$

El grosor total requerido de asbesto es al menos de 4.3 ΔL=4.3 (0.05)=0.215 ft= 2.58 in.

La gráfica de Schmidt también puede usarse cuando la temperatura superficial no es constante a causa de la transferencia de energía convectiva en la superficie del medio conductor. El flujo de energía en la superficie se puede describir en términos de la ecuación de rapidez correspondiente a la conducción y a la convección:

$$(q_x/A)_{\text{superficie}} = -k\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{\text{superficie}} = h(T_s - T_0) \tag{18-29}$$

El gradiente de temperatura en el plano (0) de referencia es:

$$-\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_0 = \frac{(T_s - T_0)}{k/h} = \frac{T_s - T_0}{\Delta x^*} \tag{18-30}$$

donde Δx^* es el grosor ficticio de la pared que debe agregarse al de la pared real para explicar la resistencia de transferencia de calor convectivo que existe en la superficie. Esta longitud ficticia aparece en la figura 18.6. Si la conductancia superficial h cambia respecto al tiempo, la distancia ficticia k/h se puede alterar después de cada intervalo, Δt, de tiempo.

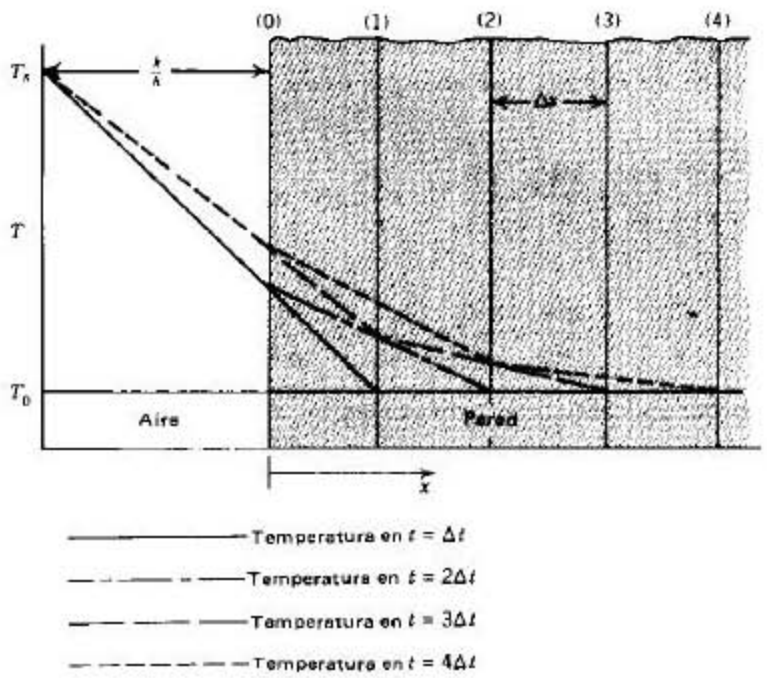


Figura 18.6 Gráfica de Schmidt con resistencia superficial.

18.4 UN METODO INTEGRAL DE CONDUCCION UNIDIMENSIONAL NO PERMANENTE

El método de aplicación de la integral de Von Kármán de momento a la capa hidrodinámica límite tiene su equivalente con conducción. La figura 18.7 muestra una porción de una pared semiinfinita a una temperatura uniforme T_0 y se ha expuesto a un fluido a temperatura T_∞. La superficie de la pared se encuentra en todo momento a una temperatura T_s.

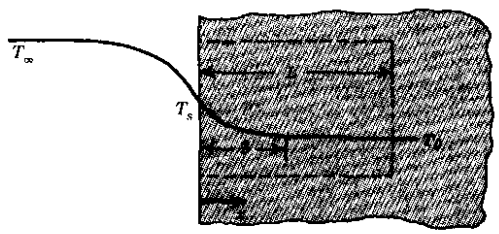


Figura 18.7 Porción de una pared semiinfinita usada en el análisis integral.

En cualquier momento, t, la transferencia de calor del fluido a la pared afectada el perfil de temperatura dentro de la pared. La "distamcia de penetración", llamada δ es la distancia de la superficie donde se manifiesta este efecto. El gradiente de la temperatura $\partial T/\partial x$ a una distancia δ, se considera igual a cero.

Si se aplica la primera ley de la termodinámica o sea la ecuación (6-10), a un volumen de control que abarque desde $x=0$ hasta $x=L$ donde $L>\delta$, se tendrá

$$\frac{\delta Q}{dt}-\frac{\delta W_s}{dt}-\frac{\delta W_\mu}{dt}=\int\int_{\text{c.s.}}\left(e+\frac{P}{\rho}\right)\rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dA+\frac{\partial}{\partial t}\int\int\int_{\text{c.v.}} e\rho\,dV \qquad (6\text{-}10)$$

con

$$\frac{\delta W_s}{dt}=\frac{\delta W_\mu}{dt}=\int\int_{\text{c.s.}}\left(e+\frac{P}{\rho}\right)\rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dA=0$$

La forma aplicable de la primera ley es, ahora:

$$\frac{\delta Q}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}\int\int\int_{\text{c.v.}} e\rho\,dV$$

Si se considera a todas las variables como fuciones solamente de x, se puede expresar el flujo de calor en la forma:

$$\frac{q_x}{A}=\frac{d}{dt}\int_0^L \rho u\,dx=\frac{d}{dt}\int_0^L \rho c_p T\,dx \qquad (18\text{-}31)$$

Ahora se dividirá el intervalo de 0 a L en dos incrementos, obteniéndose:

$$\frac{q_s}{A} = \frac{d}{dt}\left[\int_0^{\delta} \rho c_p T\, dx + \int_{\delta}^{L} \rho c_p T_0\, dx\right]$$

y como T_0 es constante, esta ecuación se transforma en:

$$\frac{q_s}{A} = \frac{d}{dt}\left[\int_0^{\delta} \rho c_p T\, dx + \rho c_p T_0 (L - \delta)\right]$$

La ecuación integral que se tiene que resolver, ahora, es:

$$\frac{q_s}{A} = \frac{d}{dt}\int_0^{\delta} \rho c_p T\, dx - \rho c_p T_0 \frac{d\delta}{dt} \qquad (18\text{-}32)$$

Si se supone que un perfil de temperatura tiene la forma: $T = T(x,\delta)$, la ecuación (18-32) producirá una ecuación diferencial en $\delta(t)$ que se puede resolver y el resultado puede usarse para expresar el perfil de la temperatura en la forma: $T(x,t)$.

La solución de la ecuación (18-32) está sujeta a tres diferentes condiciones de frontera de la pared, $x=0$, en las secciones siguientes.

Caso 1. Temperatura Constante en la Pared.

La pared, que inicialmente se encuentra a una temperatura uniforme, T_0 tiene su superficie a una temperatura T_s en $t>0$. El perfil de temperatura en dos tiempos diferentes es

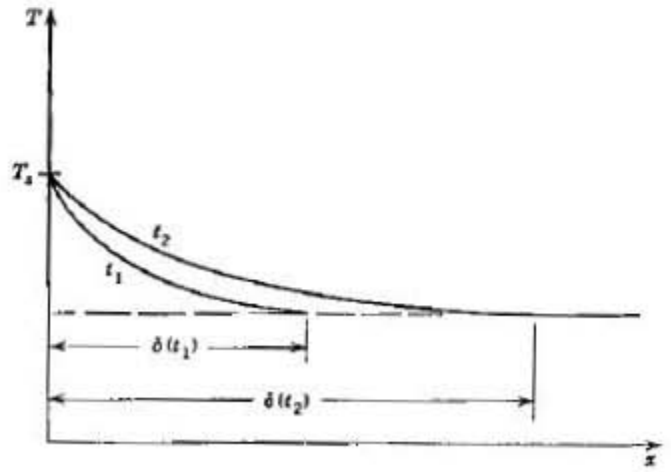


Figura 18.8 Perfiles de temperatura en dos tiempo diferentes después de haber elevado la temperatura a T_s.

el que aparece en la figura 18.8. Suponiendo que el perfil de temperatura es parabólico, de la forma

$$T = A + Bx + Cx^2$$

y requiriendo que se satisfagan las condiciones de frontera siguientes:

$$T = T_s \quad \text{en } x = 0$$

$$T = T_0 \quad \text{en } x = \delta$$

y

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{en } x = \delta$$

puede verse que la expresión correspondiente a $T(x)$ se transforma en:

$$\frac{T - T_0}{T_s - T_0} = \left(1 - \frac{x}{\delta}\right)^2 \tag{18-33}$$

Ahora, el flujo en la pared puede evaluarse así:

$$\frac{q_x}{A} = -k\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \frac{k}{\delta}(T_s - T_0) \tag{18-34}$$

lo cual puede sustituirse en la expresión integral junto con la ecuación (18-33) arrojando el siguiente resultado:

$$\frac{k}{\delta}(T_s - T_0) = \frac{d}{dt}\int_0^{\delta} \rho c_p \left[T_0 + (T_s - T_0)\left(1 - \frac{x}{\delta}\right)^2\right] dx - \rho c_p T_0 \frac{d\delta}{dt}$$

y después de dividir la ecuación entre ρc_p, ambas cantidades constantes, se tiene:

$$\frac{\alpha}{\delta}(T_s - T_0) = \frac{d}{dt}\int_0^{\delta} \left[T_0 + (T_s - T_0)\left(1 - \frac{x}{\delta}\right)^2\right] dx - T_0 \frac{d\delta}{dt} \tag{18-35}$$

Después de integrar, la ecuación (18-35) queda:

$$\frac{2\alpha}{\delta}(T_s - T_0) = \frac{d}{dt}\left[(T_s - T_0)\frac{\delta}{3}\right]$$

y cancelando $(T_s - T_0)$, se obtiene:

$$6\alpha = \delta\frac{d\delta}{dt} \tag{18-36}$$

y la profundidad de penetración se transforma en

$$\delta = \sqrt{12\alpha t} \tag{18-37}$$

El perfil correspondiente de temperatura se puede obtener a partir de la ecuación (18-33) de la manera siguiente:

$$\frac{T - T_0}{T_s - T_0} = \left[1 - \frac{x}{\sqrt{3}(2\sqrt{\alpha t})}\right]^2 \tag{18-38}$$

Lo cual concuerda razonablemente con el resultado exacto:

$$\frac{T - T_0}{T_s - T_0} = 1 - \text{erf}\,\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \tag{18-39}$$

La figura 18.9 exhibe una comparación de ambos resultados.

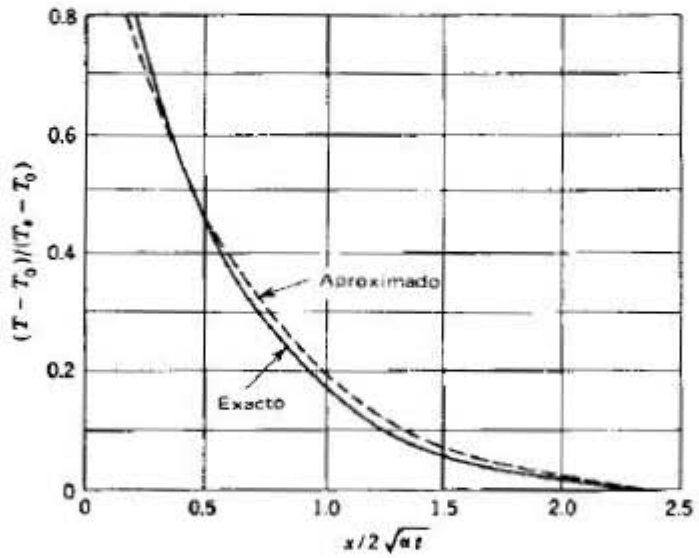


Figura 18.9 Comparación de resultados exacto y aproximado correspondientes a una conducción unidimensional con temperatura constante en la pared.

Caso 2. Un flujo Específico de Calor en la Pared.

En este caso las condiciones apropiadas de frontera son:

$$T = T_0 \qquad \text{en } x = \delta$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \qquad \text{en } x = \delta$$

y

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{F(t)}{k} \qquad \text{en } x = 0$$

donde el flujo de calor en la pared se expresa por medio de la función general $F(t)$.

Si se utiliza el perfil parabólico de temperatura, las condiciones de frontera enumeradas anteriormente, conducen a:

$$T - T_0 = \frac{[F(t)](\delta - x)^2}{2k\delta} \tag{18-40}$$

lo cual, cuando se sustituyen en la ecuación (18-32), da como resultado:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{F(t)\delta^2}{6k}\right) = \frac{\alpha F(t)}{k} \tag{18-41}$$

y

$$\delta(t) = \sqrt{6\alpha}\left[\frac{1}{F(t)}\int_0^t F(t)\,dt\right]^{1/2} \tag{18-42}$$

La expresión resultante correspondiente a T para un flujo constante de calor, cuya magnitud sea q_0/A, la expresión resultante que corresponde a T_s es

$$T_s - T_0 = \frac{q_0}{Ak}\sqrt{\frac{3}{2}\alpha t} \tag{18-43}$$

la cual difiere aproximadamente un 8% de la expresión exacta

$$T_s - T_0 = \frac{1.13 q_0}{Ak}\sqrt{\alpha t} \tag{18-44}$$

Caso 3. Convección en la Superficie.

La temperatura de la pared es variable en este caso; sin embargo se puede determinar fácilmente. Si se expresa la variación de temperatura en el medio en la forma:

$$\frac{T - T_0}{T_s - T_0} = \phi\left(\frac{x}{\delta}\right) \tag{18-45}$$

se verá que el gradiente de temperatura en la superficie se transforma en

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = -\frac{T_s - T_0}{\delta}N \tag{18-46}$$

donde N es una constante que depende de la forma de $\phi(x/\delta)$.

En la superficie,

$$\left.\frac{q}{A}\right|_{x=0} = -k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = h(T_\infty - T_s)$$

lo cual se convierte, al sustituir en la ecuación (18-46) en:

$$T_s - T_0 = \frac{h\delta}{Nk}(T_\infty - T_0) \tag{18-47}$$

ó

$$T_s = \frac{T_0 + (h\delta/Nk)T_\infty}{1 + h\delta/Nk} \tag{18-48}$$

Ahora puede escribirse

$$\frac{T_s - T_0}{T_\infty - T_0} = \frac{h\delta/Nk}{1 + h\delta/Nk} \tag{18-49}$$

y

$$\frac{T_\infty - T_s}{T_\infty - T_0} = \frac{1}{1 + h\delta/Nk} \tag{18-50}$$

Para hacer las sustituciones apropiadas en la ecuación integral y encontrar la solución correspodiente se siguen los mismos procedimientos que en los casos (a) y (b). Los detalles de esta solución se dejan como ejercicio al estudiante.

El lector deberá darse cuenta de la gran utilidad de la solución integral en la solución de problemas unidimensionales de conducción en estado no permanente. Se pueden suponer expresiones, correspondientes al perfil de temperatura, mucho más complicadas, sin embargo, en tales casos se necesitan condiciones adicionales de frontera para evaluar las constantes.

La semejanza entre la profundidad de penetración, y el grosor de la capa límite, a partir del análisis integral del Capítulo 12, también es digna de tomarse en cuenta.

18.5 CONCLUSION

En este capítulo se han presentado y estudiado algunas técnicas usadas para resolver problemas de conducción de calor en estado no permanente o transitoria. Las situaciones que se analizaron incluyen los casos en que la resistencia interna o la resistencia superficial son despreciables, así como los casos en que ambas resistencias son significativas.

En placas planas, cilindros y esferas que se encuentran a una temperatura inicial uniforme, cuyas superficies se exponen súbitamente a un medio que esté a una temperatura diferente, existen gráficas para evaluar la temperatura en cualquier posición y tiempo. Se introdujo una técnica gráfica, la gráfica de Schmidt, para los sistemas unidimensionales de transición. También se presentó un método integral para resolver problemas de conducción transitoria unidimensional.

PROBLEMAS

18.1 Un lingote de acero inoxidable de tipo 304, de 6 in de diámetro pasando por un horno de 20 ft de longitud. La temperatura inicial del lingote es de 200° F y se le debe elevar a una temperatura de 1500° F antes de poderlo trabajar. El coeficiente de transferencia de calor entre los gases de horno y la superficie del lingote es de 15 Btu/h ft² °F y los gases del horno están a 2300° F. ¿A qué velocidad mínima deberá viajar el lingote a través del horno para satisfacer estas condiciones?

18.2 Una plancha casera está formada por una sola placa de acero inoxidable, que pesa 3 lb y tiene un área superficial de 0.5 ft2. La plancha tiene una potencia nominal de 500 W. Si los alrededores están a una temperatura de 80° F y el coeficiente convectivo de calor entre la placa y los alrededores es de 3 Btu/h ft² °F, ¿cuánto tardará la plancha en llegar a 240° F, después de que se le conectó?

18.3 Una barra de cobre se encuentra inicialmente a 400° F. Mide 0.2 ft por 0.5 ft y tiene 10 ft de longitud. Si se reduce súbitamente la temperatura de los bordes a 100° F, ¿cuánto tardará el centro de la barra en alcanzar una temperatura de 250° F?

18.4 En la vulcanización de llantas de hule, el proceso requiere que una carcasa, que originalmente se encuentra a 295 K se caliente de tal manera que su capa central llegue a una temperatura mínima de 410 K. Este calentamiento se logra por medio de la aplicación de vapor a 435 K en ambos lados. Determine el tiempo requerido, después de introducir el vapor, para que una carcasa de 3 cm de grueso alcance la condición especificada de temperatura en su centro. Las propiedades del hule que pueden resultar de utilidad son las siguientes: k= 0.151 W/m.K, c_p =200 J/kg.K, ρ=1201 kg/m³, α=6.19 X 10-8 m² /seg.

18.5 Si un bloque rectangular de hule (ver problema 18.4 donde aparecen sus propiedades) se pone al aire a 297 K a enfriar después de haberlo calentado a 420 k, ¿cuánto tiempo tardará la superficie del hule en bajar su temperatura a 320 K? Las dimensiones del bloque son las siguientes: 0.6 m de altura por 0.3 m de longitud por 0.45 m de ancho. El bloque está colocado sobre una de las bases de 0.3 m por 0.45 m; la superficie adyacente puede considerarse aislante. El coeficiente efectivo de transferencia de calor en toda la superficie expuesta es de 6.0 W/m².K. ¿Cuál será la temperatura máxima dentro del bloque de hule en este momento?

18.6 Vuelva a resolver el problema anterior para el caso en el que salga aire de las superificies del bloque de hule resultando un coeficiente superficial efectivo de 230 W/m². K.

18.7 Un perdigón de 0.2 in de diámetro se templa en aceite a 90° F, habiéndose encontrado originalmente a una temperatura inicial de 400° F. El perdigón está hecho de plomo y tarda 15 seg en caer desde la superficie

del aceite al fondo del baño de templado. Si el coeficiente convectivo de calor entre el plomo y el aceite es de 40 Btu/h ft² °F, ¿cuál será la temperatura del perdigón al llegar al fondo?

18.8 Las balas de cañón de hierro colado utilizadas en la guerra de 1812 se calentaban, ocasionalemente, durante un período largo de tal manera que, cuando se les disparaba contra casas o barcos, estos ardieran. Si uno de estos llamados "disparos calientes" estuviera a una temperatura uniforme de 2000 °F, ¿cuánto tiempo después de haber sido expuesto al aire a una temperatura de 0°F, con un coeficiente externo de transferencia convectiva de calor de 16 Btu/h ft² °F, bajaría la temperatura superficial a 600°F? ¿Qué temperatura tendría, entonces el centro de la bala? El diámetro de la bala es de 6 in. Las siguientes propiedades del hierro colado, que serán útiles al resolver el problema con:

$$k=23 \text{ Btu/h ft } ^\circ\text{F}$$
$$c_p=0.10 \text{ Btu/lb } ^\circ\text{F}$$
$$\rho=460 \text{ lb/ft}^3$$

18.9 La tobera del motor de un cohete está recubierta de un material de cerámica con las propiedades siguientes: k=1.73 Btu/h ft °F, α=0.35 ft²/h. El coeficiente de transferencia convectiva de calor entre la tobera y los gases, que están a 3000°F, es de 200 Btu/h ft² °F. ¿Cuánto tiempo después del encendido tardará la superficie de cerámica en alcanzar una temperatura de 2700°F? ¿Cuál será la temperatura en un punto que se encuentra a 1/2 in de la superficie en ese momento? La tobera se encuentra inicialmente a 0°F.

18.10 El coeficiente asociado de transferencia convectiva de calor de un cilindro de asbesto es de 22.8 W/m.K, su altura y su diámetro son de 13 cm e inicialmente se encuentra a 295 K y está colocado en un medio que está a 810 K. Determine el tiempo que se requiere para que el centro del cilindro llegue a 530 K despreciando los efectos de los extremos.

18.11 Dado el cilindro del problema 18.10, construya una gráfica del tiempo que tarda el punto medio en alcanzar los 530K, en función de H/D, donde H y D son la altura y el diámetro del cilindro, respectivamente.

18.12 Un cilindro de cobre cuyo diámetro es de 3 in se encuentra inicialmente a 70°F. ¿Cuánto tiempo después de haberlo colocado en un medio que está a 1000°F con un coeficiente de transferencia convectiva de calor de 4 Btu/h ft² °F, llegará la temperatura del centro del cilindro a los 500°F si la altura del cilindro es de (a) 3in? (b) 6 in? (c) 12in? (d) 24 in? (e) 5 in?

18.13 Un cilindro de 2 ft de altura y con un diámtero de 3 in se encuentra inicialmente a una temperatura uniforme de 70°F. ¿Cuánto tiempo después de haber colocado el cilindro en un medio a 1000°F con un

coeficiente asociado de transferencia convectiva de calor de 4 Btu/h ft² °F, alcanzará la temperatura del cilindro los 500° F si el cilindro está hecho de:

(a) cobre, k=212 Btu/h ft °F?
(b) aluminio, k=130 Btu/h ft °F?
(c) cinc, k=60 Btu/h ft °F?
(d) acero, k=25 Btu/h ft °F?
(e) acero inoxidable, k=10.5 Btu/h ft °F?
(f) asbesto, k=0.087 Btu/h ft °F?

18.14 Se calcula que la temperatura original de la tierra era de 7000° F. Usando este valor y las propiedades de la corteza terrestre que a continuación se ennumeran, Lord Kelvin obtuvo la cifra de $9.8\text{X}10^7$ años para la edad de la tierra. Las propiedades de la corteza terrestre son:

$$\alpha = 0.0456 \text{ ft}^2/\text{hr}$$

$$T = 0°\text{F}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0} = 0.02°\text{F/ft, (medida)}$$

Comente resultados de Lord Kelvin tomando la expresión exacta que corresponde a la conducción en estado permanente en una dimensión:

$$\frac{T - T_s}{T_0 - T_s} = \text{erf}\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}$$

18.15 Encuentre una expresión que corresponda a la profundidad bajo la superficie de un sólido semiinfinito en el que la rapidez de enfriamiento sea máxima.*

18.16 Si el perfil de la temperatura a lo largo del suelo es lineal y aumenta de 35° F en la superificie en 0.5° F por cada ft de profundidad, ¿cuánto tardará un tubo enterrado a 10 ft, por debajo de la superficie, en llegar a 32° F si la temperatura del aire que está en el exterior baja súbitamente a 0° F? la difusividad térmica del terreno es de 0.02 ft² /h, su conductividad térmica es de 0.8 Btu/h ft° F y el coeficiente de transferencia convectiva de calor entre el suelo y el aire circundante es de 1.5 Btu/h ft² °F.

18.17 Al suelo, cuya difusividad térmica es de $5.16\text{X}10^{-7}$ m² /seg., se le aumenta súbitamente su temperatura superficial y se le mantiene a 1100

* Sustituya la información dada en el problema 18.14 para estimar qué tan dabajo de la superficie de la tierra ésta razón de enfriamiento es máxima.

K de su valor inicial uniforme de 280 K. Determine la temperatura a una profundidad de 0.25 m, después de haber transcurrido un período de 5 h de que la superficie se encuentre en estas condiciones.

18.18 Una pared de ladrillo (α=0.016 ft²/h) cuyo grosor es de 1 1/2 ft se encuentra inicialmente a una temperatura uniforme de 80° F. ¿Qué tiempo después de que las superficies de las paredes se aumentan a 300° F, y 600° F, respectivamente, alcanzará la temperatura del centro de la pared los 300° F?

18.19 Una pared de ladrillo de construcción de 0.45 m de grosor tiene una distribución en el tiempo t=0, que describe aproximadamente, la expresión T(K)=520 +330 sen$\pi(x/L)$ donde L es el ancho de la pared y x la distancia desde cualquiera de las superficies. ¿Cuánto tiempo transcurrirá desde la exposición de ambas paredes al aire a 280 K hasta que la temperatura del centro de la pared sea de 360 K? El coeficiente convectivo en ambas superficies de la pared es de 14 W/m².K. ¿Cuál será en este momento la temperatura de la superficie?

18.20 Hay agua, que inicialmente se encuentra a 40° F en una vasija cilíndrica de paredes delgadas, cuyo diámetro es de 18 in. Grafique la temperatura del agua contra el tiempo, hasta llegar a 1 h, si el agua y el recipiente se encuentran sumergidos en un baño de aceite a una temperatura constante de 300° F. Suponga que el agua se mueve perfectamente y que el coeficiente convectivo de calor entre el aceite y la superificie cilíndrica es de 40 Btu/h ft² °F. El cilindro está sumergido a una profundidad de 2 ft.

18.21 El coeficiente de transferencia de calor entre una pared grande de ladrillo y el aire, es de 100 °F y se expresa por medio de h=0.44 $(T_\infty)^{1/3}$ Btu/h ft² °F. Si la pared se encuentra inicialmente a una temperatura uniforme de 1000° F, calcule la temperatura de la superficie después de 1 h, 6 h, 24 h. Use el método gráfico de Schmidt y suponga que la pared es un medio semiinfinito. Compare este resultado con el exacto.

18.22 Si se da el flujo de calor en un sólido en la forma: $F(t)$, demuestre que la profundidad de penetración, δ, correspondiente a un sólido semiinfinito tiene la forma:

$$\delta=(\text{constante})\sqrt{\alpha}\left[\frac{\int_0^t F(t)\,dt}{F(t)}\right]^{1/2}$$

18.23 Se arroja aire a 65° F contra un vidrio de 1/8 in de grueso que se encuentra, inicialmente, a 30° F y tiene escarcha en el exterior. Calcule el período de tiempo requerido para que la escarcha comience a derretirse.

18.24 Una pared de ladrillo que está a 90° F se expone al aire de 60° F. El coeficiente de la película es de 5.0 Btu/h ft² °F. Considere la pared

semiinfita y determine la temperatura superficial después de 10 h. ¿A qué profundidad de la pared ha penetrado el cambio de temperatura? ¿Cuánto calor ha perdido la pared?

18.25 Una pared de concreto está sujeta a una temperatura superficial de 1500°F en uno de sus lados. ¿Cuánto tiempo después de estar sujeto uno de sus lados a esta temperatura, se podrá mantener el otro lado a 130°F? La pared se encontraba, inicialmente, a 70°F.

19
TRANSFERENCIA CONVECTIVA DE CALOR

La transferencia de calor por convección está asociada con el cambio de energía entre una superficie y un fluido adyacente. Existen pocas situaciones de interés práctico en las que ocurra una transferencia de energía y el movimiento de un fluido no esté asociado a ella. Este efecto se ha eliminado, hasta donde ha sido posible en los capítulos anteriores pero ahora se estudiará con cierto detalle.

La ecuación de rapidez de transferencia, correspondiente a la convección se ha expresado ya anteriormente en la forma:

$$\frac{q}{A} = h\,\Delta T \tag{15-11}$$

donde el flujo de calor, q/A, ocurre en virtud de la diferencia de temperatura. Esta sencilla ecuación es la relación que define a h, que es el coeficiente de transferencia convectiva de calor. Sin embargo el cálculo de este coeficiente no es asunto sencillo: se relaciona con el mecanismo de flujo del fluido, las propiedades del mismo y la geometría del sistema específico que se esté estudiando.

Como el coeficiente de transferencia convectiva de calor se relaciona íntimamente con el movimiento del fluido, es de esperarse que muchos de los detalles de la transferencia de calor sean de interés. En los siguientes análisis se utilizarán repetidamente los desarrollos y conceptos de los capítulos 4 a 14.

19.1 CONSIDERACIONES FUNDAMENTALES ACERCA DE LA TRANSFERENCIA CONVECTIVA DE CALOR

Como se dijo en el capítulo 12, las partículas de fluido inmediatamente adyacentes a una frontera sólida permanecen estacionarias y una delgada capa

de fluido cercana a la superficie experimentará un flujo laminar, independientemente de la naturaleza de la corriente libre. Por lo tanto, el intercambio de energía molecular o los efectos de la conducción se encontrarán presentes simpre y jugarán un papel importante en cualquier proceso de convección. Si el flujo de un fluido es laminar, entonces toda la transferencia de energía entre una superficie y el líquido que está en contacto con ella o la transferencia entre capas adyacentes de fluido se realiza por medios moleculares. Si, por otra parte, el flujo es turbulento, entonces hay mezcla global de partículas de fluido entre las regiones que se encuentran a temperaturas diferentes y la rapidez de transferencia de energía aumenta. La distinción entre flujo laminar y flujo turbulento será de importancia en cualquier situación convectiva.

Existen dos clasificaciones principales de la transferencia convectiva de calor, relacionadas con la fuerza responsable del flujo del fluido. Las palabras convección *natural* o *libre*, sirven para designar el tipo de proceso en el cual se produce un movimiento de fluido a partir de la transferencia de calor. Cuando se calienta o se enfría un fluido, el cambio de densidad asociado, así como el efecto boyante, producen una circulación natural en la cual el fluido afectado se mueve por sí mismo alrededor de la superficie sólida; el fluido que lo reemplaza es afectado por la transferencia de energía de manera similar y el proceso se repite. La *convección forzada* es la clasificación que se utiliza para describir aquellos casos de convección en los que la circulación del fluido es producida por un agente externo tal como un ventilador o una bomba.

La capa límite hidrodinámica que se analizó en el capítulo 12, juega un papel muy importante en la transferencia convectiva de calor, como es de esperarse. Además, se definirá y analizará la *capa térmica límite*, que también es vital para el análisis de los procesos de transferencia convectiva de energía.

Hay cuatro métodos de evaluación del coeficiente de transferencia convectiva de calor, los cuales se estudiarán en este libro. Son los siguientes:

a) Análisis dimensional, que necesita basarse en resultados experimentales para ser útil.
b) Análisis exacto de la capa límite.
c) Análisis integral aproximado de la capa límite y
d) Analogía entre las transferencias de energía y de momento.

19.2 PARAMETROS IMPORTANTES EN LA TRANSFERENCIA CONVECTIVA DE CALOR

Se encontrará que ciertos parámetros son útiles en la correlación de datos relativos a los coeficientes de transferencia convectiva de calor. Algunos parámetros de esta clase ya se han estudiado con anterioridad, estos incluyen los números de Reynolds y de Euler. Otros parámetros nuevos que se verán en relación con la transferencia de energía surgirán de tal manera que su sentido

físico no se verá claramente. Por esta razón se dedicará una corta sección a la interpretación física de dos de estos términos.

Las difusividades moleculares del momento y la energía se han definido anteriormente en la forma siguiente:

$$\text{difusividad de momento} = \qquad \nu \equiv \frac{\mu}{\rho}$$

y

$$\text{difusividad térmica} = \qquad \alpha \equiv \frac{k}{\rho c_p}$$

El hecho de que ambos se denominen en forma similar indica que ambos tienen papeles semejantes en los modos específicos de transferencia lo cual en efecto ocurre de este modo, como se verá en repetidas ocasiones en los desarrollos siguientes. Por ahora deberá notarse que ambas tienen las mismas dimensiones, de L^2/t, por lo que la razón es adimensional. Esta razón, o sea la de difusividad molecular de momento a difusividad molecular de calor, se denomina *número de Prandtl*

$$\text{Pr} \equiv \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu c_p}{k} \tag{19-1}$$

Se puede observar que el número de Prandtl es una combinación de propiedades del fluido, por lo que el mismo Pr es una de ellas. El número de Prandtl es, principalmente, una función de la temperatura y está tabulado en el Apéndice I, a diferentes temperaturas para cada uno de los fluidos ennumerados.

El perfil de la temperatura que corresponde a un fluido que rodea una superficie aparece en la figura 19.1. En la figura, la superficie se encuenttra a una temperatura mayor que la del fluido. El perfil existente de la temperatura

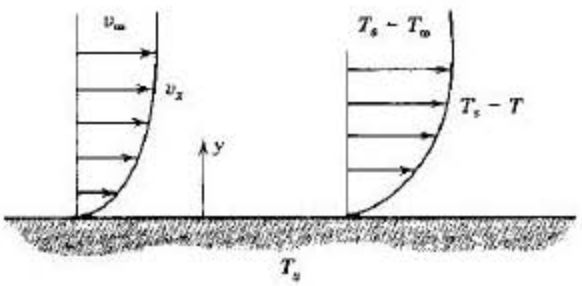


Figura 19.1 Perfiles de la velocidad y la temperatura correspondientes a un fluido que pasa sobre de una placa calentada.

se debe al intercambio de energía que resulta de esta diferencia de temperaturas. En este caso la rapidez de transferencia de energía entre la superficie y el fluido se puede escribir en la forma:

$$q_y = hA(T_s - T_\infty) \tag{19-2}$$

y como la transferencia de calor en la superficie se realiza por conducción

$$q_y = -kA\frac{\partial}{\partial y}(T - T_s)|_{y=0} \tag{19-3}$$

Ambos términos deben ser iguales, por lo tanto:

$$h(T_s - T_\infty) = -k\frac{\partial}{\partial y}(T - T_s)|_{y=0}$$

lo cual puede reacomodarse para obtener:

$$\frac{h}{k} = \frac{\partial(T_s - T)/\partial y|_{y=0}}{T_s - T_\infty} \tag{19-4}$$

La ecuación (19-4) puede hacerse adimensional si se introduce un parámetro de longitud. Si se multiplican ambos lados por una longitud representativa, L, se tendrá:

$$\frac{hL}{k} = \frac{\partial(T_s - T)/\partial y|_{y=0}}{(T_s - T_\infty)/L} \tag{19-5}$$

El lado derecho de la ecuación (19-5) es la razón del gradiente de la temperatura en la superficie entre el gradiente total o de la temperatura de referencia. El lado izquierdo de esta ecuación está escrito en forma semejante a aquella en la que está escrito el módulo de Biot en el capítulo 18 y puede considerarse como la razón de la resistencia térmica de conducción a la resistencia térmica de convección del fluido. Esta razón se denomina *número de Nusselt*,

$$\mathrm{Nu} \equiv \frac{hL}{k} \tag{19-6}$$

donde la conductividad térmica es la del fluido, contrariamente a la del sólido, que fue la que ocurrió en el caso del cálculo del módulo de Biot.

Estos dos parámetros, Pr y Nu, se encontrarán en repetidas ocasiones a continuación.

19.3 ANALISIS DIMENSIONAL DE LA TRANSFERENCIA CONVECTIVA DE ENERGIA

Convección Forzada. La situación específica de convección forzada que se estudiará ahora es la de un fluido que fluye a través de un conducto cerrado a una cierta velocidad promedio, v, donde existe una diferencia de temperaturas entre el fluido y la pared del tubo.

Las variables importantes, sus símbolos y sus representaciones dimensionales, se enumeran a continuación. Es necesario incluir dos dimensiones

más; Q, el calor y T, la temperatura, al grupo estudiado en el capítulo 11, así pues,

Variable	*Símbolo*	*Dimensiones*
Diámetro del tubo	D	L
Densidad del fluido	ρ	M/L^3
Viscosidad del fluido	μ	M/Lt
Capacidad calorífica del fluido	c_p	Q/MT
Conductividad térmica del fluido	k	Q/tLT
Velocidad	v	L/t
Coeficiente de transferencia de calor	h	Q/tL^2T

todas las variables deben expresarse en forma dimensional como una combinación de M, L, t, Q y T. Las variables antes mencionadas incluyen términos descriptivos de la geometría del sistema, propiedades térmicas y de flujo del fluido y la cantidad de mayor interés, h.

Si se utiliza el método de Buckingham de agrupamiento de variables, tal como se introdujo en el capítulo 11, se encontrará que el número requerido de grupos adimensionales es 3. Note que el rango de la matriz dimensional es 4, uno menos que el número de dimensiones fundamentales.

Si se escoge a D, K μ y v como las cuatro variables que comprende el núcleo, se encontrará que los tres grupos π que se forman son:

$$\pi_1 = D^a k^b \mu^c v^d \rho$$

$$\pi_2 = D^e k^f \mu^g v^h c_p$$

y

$$\pi_3 = D^i k^j \mu^k v^l h$$

Al escribir π_1 en forma dimensional,

$$1 = (L)^a \left(\frac{Q}{LtT}\right)^b \left(\frac{M}{Lt}\right)^c \left(\frac{L}{t}\right)^d \frac{M}{L^3}$$

e igualar los exponentes de las dimensiones fundamentales a ambos lados de esta ecuación, se tendrá:

$$L: \quad 0 = a - b - c + d - 3$$

$$Q: \quad 0 = b$$

$$t: \quad 0 = -b - c - d$$

$$T: \quad 0 = -b$$

y

$$M: \quad 0 = c + 1$$

Si se resuelven estas cuatro ecuaciones para encontrar el valor de las cuatro incógnitas, se obtiene:

$$a = 1 \qquad c = -1$$

$$b = 0 \qquad d = 1$$

y π_1 se transforma en:

$$\pi_1 = \frac{Dv\rho}{\mu}$$

que es el número de Reynolds.

Despejando π_2 y π_3 de la misma manera, se obtiene:

$$\pi_2 = \frac{\mu c_p}{k} = \text{Pr} \qquad \text{y} \qquad \pi_3 = \frac{hD}{k} = \text{Nu}$$

El resultado del análisis dimensional correspondiente a la transferencia de calor en la convección forzada en un conducto circular indica que existe una posible relación entre las variables, que es de la forma:

$$\text{Nu} = f_1(\text{Re}, \text{Pr}) \tag{19-7}$$

Si en el caso anterior el grupo principal se hubiera escogido de tal manera que incluyera a ρ μ, C_p y v, el análisis habría producido los grupos:

$$Dv\rho/\mu,\ \mu c_p/k, \quad \text{y} \quad h/\rho v c_p.$$

A los primeros dos de estos se les reconoce como Re y Pr. El tercero es el *número de Stanton*.

$$\text{St} \equiv \frac{h}{\rho v c_p} \tag{19-8}$$

Este parámetro también podría haberse formado tomando la razón Nu/(Re Pr). Por lo tanto, una relación alterna correspondiente a la convección forzada en un conducto cerrado es la siguiente:

$$\text{St} = f_2(\text{Re}, \text{Pr}) \tag{19-9}$$

Convección Natural. En el caso de la transferecia de calor por convección natural desde una pared plana vertical hacia un fluido adyacente, las variables diferirán de manera significativa de las utilizadas en el caso anterior. La velocidad ya no corresponde al grupo de las variables, ya que es el resultado de otros efectos asociados a la transferencia de energía. En el análisis, van a incluirse nuevas variables que se relacionan con la circulación de los fluidos. Pueden encontrarse analizando la relación correspondiente a la fuerza boyante en términos de la diferencia de densidades debida al intercambio de energía.

El coeficiente de expansión térmica, β, está dado por:

$$\rho = \rho_0(1 - \beta\,\Delta T) \tag{19-10}$$

donde ρ_0 es la densidad global del fluido, ρ es la densidad del fluido dentro de la capa calentada y ΔT es la diferencia de temperatura entre el fluido calentado y el valor global. La fuerza boyante por unidad de volumen, F_{boyante}, es:

$$F_{\text{boyante}} = (\rho_0 - \rho)g$$

lo cual se transforma, al sustituir en la ecuación (19-10), en

$$F_{\text{boyante}} = \beta g \rho_0\,\Delta T \tag{19-11}$$

La ecuación (19-11) sugiere la inclusión de las variables β, g y ΔT en la lista de las variables importantes en el caso de la convección natural.

La lista de variables correspondientes al problema que se está estudiando, es la que aparece a continuación:

Variable	*Símbolo*	*Dimensiones*
Longitud significativa	L	L
Densidad del fluido	ρ	M/L^3
Viscosidad del fluido	μ	M/Lt
Capacidad calorífica del fluido	c_p	Q/MT
Conductividad térmica del fluido	k	Q/LtT
Coeficiente de expansión térmica del fluido	β	$1/T$
Aceleración gravitacional	g	L/t^2
Diferencia de temperatura	ΔT	T
Coeficiente de transferencia de calor	h	Q/L^2tT

El teorema Pi de Buckingham indica que el número de parámetros adimensionales independientes aplicables a este problema es $9 - 5 = 4$. Si se escoge: L, μ, k, g y β como grupo principal podrá observarse que los grupos π que se van a formar son:

$$\pi_1 = L^a\mu^b k^c \beta^d g^e c_p$$
$$\pi_2 = L^f\mu^g k^h \beta^i g^j \rho$$
$$\pi_3 = L^k\mu^l k^m \beta^n g^o\,\Delta T$$

y

$$\pi_4 = L^p\mu^q k^r \beta^s g^t h$$

Despejando los exponentes en la forma usual, se obtiene:

$$\pi_1 = \frac{\mu c_p}{k} = \mathrm{Pr} \qquad \pi_3 = \beta\,\Delta T$$

$$\pi_2 = \frac{L^3 g \rho^2}{\mu^2} \qquad \text{y} \qquad \pi_4 = \frac{hL}{k} = \mathrm{Nu}$$

El producto de π_2 y π_3, que debe ser adimensional, es $(\beta g \rho^2 L^3 \Delta T)/\mu^2$. Este parámetro, que se utiliza en la correlación de los datos correspondientes a la convección natural, es el número de Grashof:

$$\mathrm{Gr} \equiv \frac{\beta g \rho^2 L^3 \Delta T}{\mu^2} \tag{19-12}$$

A partir del breve análisis dimensional anterior, se han obtenido las posibles formas de correlación de datos correspondientes a la convección siguientes:

a) Convección forzada $\mathrm{Nu} = f_1(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr})$ (19-7)

ó

$\mathrm{St} = f_2(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr})$ (19-9)

b) Convección natural $\mathrm{Nu} = f_3(\mathrm{Gr}, \mathrm{Pr})$ (19-13)

La semejanza entre las relaciones de las ecuaciones (19-7) y (19-13) es obvia. En la ecuación (19-13), Gr ha reemplazado a Re en la relación indicada por medio de la ecuación (19-7). Debe notarse que el *número de Stanton* solamente puede usarse en la correlación de datos de convección forzada. Esto se hace obvio cuando se observa que la velocidad, v, está contenida en la expresión que corresponde a St.

19.4 ANALISIS EXACTO DE LA CAPA LAMINAR LIMITE

En la sección 12.5 se estudió una solución a un caso especial de la capa laminar límite hidrodinámica. La solución de Blasius a la capa laminar límite en una placa plana puede extenderse hasta incluir el problema de transferencia de calor convectiva correspondiente a la misma geometría y al mismo flujo laminar.

Las ecuaciones de capa límite analizadas anteriormente incluyen a la ecuación bidimensional e incompresible de continuidad:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \tag{12-10}$$

y a la ecuación de movimiento en la dirección de x,

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = v_\infty \frac{dv_\infty}{dx} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \tag{12-9}$$

Recuerde que la ecuación de movimiento en la dirección de y dio como resultado una presión constante en toda la capa límite. La forma apropiada de la ecuación de energía será, por lo tanto, la ecuación (16-14), para un flujo isobárico, escrito en su forma bidimensional en la forma:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \tag{19-14}$$

Con respecto a la capa térmica límite que aparece en la figura 19.2, $\partial^2 T/\partial x^2$ es de magnitud mucho menor que $\partial^2 T/\partial y^2$.

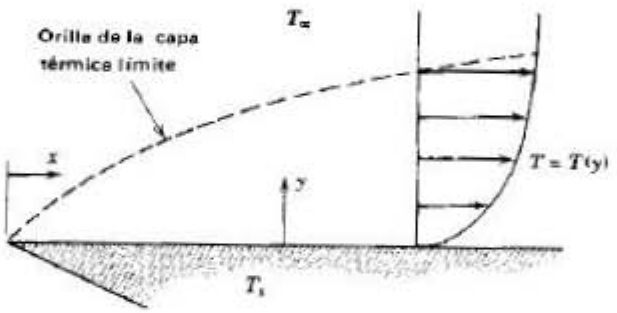


Figura 19.2 La capa térmica límite para un flujo que pasa sobre de una superficie plana.

En el flujo isobárico permanente, incompresible y bidimensional, la ecuación de energía que se utiliza es,

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{19-15}$$

Si se recuerda el capítulo 12, la ecuación aplicable del movimiento con velocidad uniforme de corriente libre es:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \tag{12-11a}$$

y la ecuación de continuidad es:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \tag{12-11b}$$

Las últimas dos ecuaciones anteriores fueron resueltas originalmente por Blasius y dieron los resultados que se estudiaron en el capítulo 12. La solución se basó en las siguientes condiciones de frontera:

$$\frac{v_x}{v_\infty} = \frac{v_y}{v_\infty} = 0 \qquad \text{en } y = 0$$

y

$$\frac{v_x}{v_\infty} = 1 \qquad \text{en } y = \infty$$

La semejanza de forma entre las ecuaciones (19-15) y (12-11a) salta a la vista. Esta situación sugiere la posibilidad de aplicar la solución de Blasius a la ecuación de energía. Para que esto sea posible, deben satisfacerse las condiciones siguientes:

1. Los coeficientes de los términos de segundo orden deben ser iguales. Esto requiere que $\nu = \alpha$ o que $\Pr = 1$.

2. Las condiciones de frontera de la temperatura deben ser compatibles con las de la velocidad. Esto puede realizarse cambiando la variable dependiente de T a $(T - T_s)/(T_\infty - T_s)$. Ahora las condiciones de frontera son:

$$\frac{v_x}{v_\infty} = \frac{v_y}{v_\infty} = \frac{T - T_s}{T_\infty - T_s} = 0 \qquad \text{en } y = 0$$

$$\frac{v_x}{v_\infty} = \frac{T - T_s}{T_\infty - T_s} = 1 \qquad \text{en } y = \infty$$

Si se imponen estas condiciones al conjunto de ecuaciones (19-15) y (12-11a), se pueden escribir, ahora, los resultados obtenidos por Blasius en el caso de la transferencia de energía. Usando la nomenclatura del capítulo 12,

$$f' = 2\frac{v_x}{v_\infty} = 2\frac{T - T_s}{T_\infty - T_s} \tag{19-16}$$

$$\eta = \frac{y}{2}\sqrt{\frac{v_\infty}{\nu x}} = \frac{y}{2x}\sqrt{\frac{x v_\infty}{\nu}} = \frac{y}{2x}\sqrt{\mathrm{Re}_x} \tag{19-17}$$

y aplicando el resultado obtenido por Blasius, se obtiene:

$$\left.\frac{df'}{d\eta}\right|_{y=0} = f''(0) = \left.\frac{d[2(v_x/v_\infty)]}{d[(y/2x)\sqrt{\mathrm{Re}_x}]}\right|_{y=0}$$

$$= \left.\frac{d\{2[(T - T_s)/(T_\infty - T_s)]\}}{d[(y/2x)\sqrt{\mathrm{Re}_x}]}\right|_{y=0} = 1.328 \tag{19-18}$$

Deberá notarse que, de acuerdo con la ecuación (19-16), el perfil adimensional de la velocidad en la capa laminar límite es idéntica al perfil adimensional de

temperatura. Esta es una consecuencia de que Pr = 1. Una consecuencia lógica de esto es que las capas límite hidrodinámica y térmica son de igual grosor. Es importante el hecho de que los números de Prandtl, en la mayoría de los casos son suficientemente cercanos a la unidad que las capas límite hidrodinámica y térmica son de tamaño semejante.

El gradiente de la termperatura en la superficie puede obtenerse así:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0} = (T_\infty - T_s)\left[\frac{0.332}{x}\mathrm{Re}_x^{1/2}\right] \tag{19-19}$$

Si se aplican, ahora, las ecuaciones de Newton y Fourier, se obtendrá:

$$\frac{q_2}{A} = h_x(T_s - T_\infty) = -k\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0}$$

a partir de lo cual se deduce que:

$$h_x = -\frac{k}{T_s - T_\infty}\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0} = \frac{0.332k}{x}\mathrm{Re}_x^{1/2} \tag{19-20}$$

ó

$$\frac{h_x x}{k} = \mathrm{Nu}_x = 0.332\ \mathrm{Re}_x^{1/2} \tag{19-21}$$

Pohlhausen* estudió el mismo problema con el efecto adicional de un número de Prandtl diferente de la unidad y pudo demostrar que la relación entre las capas límite hidrodinámica y térmica en el flujo laminar, es aproximadamente igual a

$$\frac{\delta}{\delta_t} = \mathrm{Pr}^{1/3} \tag{19-22}$$

El factor adicional $\mathrm{Pr}^{1/3}$ multiplicado por η permite extender la solución a la capa límite térmica a valores de Pr diferentes de la unidad. En la figura 19.3 aparece una gráfica de la temperatura adimensional contra ηpr 1/3. La variación de temperatura que se observa en esta forma conduce a una expresión correspondiente al coeficiente de transferencia convectiva de calor, semejante a la ecuación (19-20). En y = 0, el gradiente es:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0} = (T_\infty - T_s)\left[\frac{0.332}{x}\mathrm{Re}_x^{1/2}\,\mathrm{Pr}^{1/3}\right] \tag{19-23}$$

el cual, cuando se usa con las ecuaciones de Fourier y de Newton de rapidez de transferencia, produce el resultado:

$$h_x = 0.332\frac{k}{x}\mathrm{Re}_x^{1/2}\,\mathrm{Pr}^{1/3} \tag{19-24}$$

*E. Pohlhausen, *ZAMM*, 1, 115 (1921).

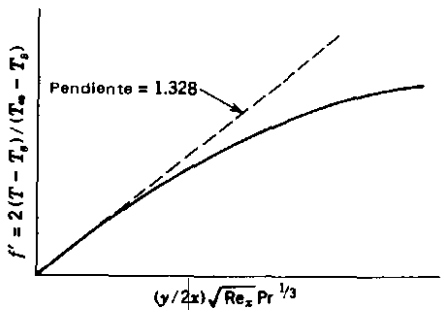


Figura 19.3 Variación de temperatura correspondiente a un flujo laminar sobre una placa plana.

ó

$$\frac{h_x x}{k} = Nu_x = 0.332\,Re_x^{1/2}\,Pr^{1/3} \tag{19-25}$$

La inclusión del factor $Pr^{1/3}$ en estas ecuaciones amplía la posibilidad de aplicación de las ecuaciones (19-20) y (19-21) a situaciones en las que el número de Prandtl difiere considerablemente de la unidad. El coeficiente medio de transferencia de calor aplicado a una placa de ancho w y longitud L, puede obtenerse por integración. Para una placa de estas dimensiones:

$$q_y = hA(T_s - T_\infty) = \int_A h_x(T_s - T_\infty)\,dA$$

$$h(wL)(T_s - T_\infty) = 0.332kw\,Pr^{1/3}(T_s - T_\infty)\int_0^L \frac{Re_x^{1/2}}{x}\,dx$$

$$hL = 0.332k\,Pr^{1/3}\left(\frac{v_\infty \rho}{\mu}\right)^{1/2}\int_0^L x^{-1/2}\,dx$$

$$= 0.664k\,Pr^{1/3}\left(\frac{v_\infty \rho}{\mu}\right)^{1/2} L^{1/2}$$

$$= 0.664k\,Pr^{1/3}\,Re_L^{1/2}$$

El número medio de Nusselt, se transforma en:

$$Nu_L = \frac{hL}{k} = 0.664\,Pr^{1/3}\,Re_L^{1/2} \tag{19-26}$$

y puede observarse que

$$Nu_L = 2\,Nu_x \qquad \text{en } x = L \tag{19-27}$$

Al aplicar los resultados del análisis anterior, se acostumbra evaluar todas las propiedades del fluido a la *temperatura de película*, que se define así:

$$T_f = \frac{T_s + T_\infty}{2} \tag{19-28}$$

y es la media aritmética entre las temperaturas de la pared y global.

19.5 ANALISIS INTEGRAL APROXIMADO DE LA CAPA TERMICA LIMITE

La aplicación de la solución de Blasius a la capa térmica límite que se hizo en la sección 19.4 resultó conveniente, aunque su alcance fue muy limitado. Para flujos no laminares o para configuraciones que no sean superficies planas debe usarse otro método para calcular el coeficiente de transferencia convectiva de calor. Un método aproximado de análisis de la capa térmica límite es el que emplea el análisis integral tal como lo usó von Kármán en la capa hidrodinámica límite. En el capítulo 12 se estudió este método.

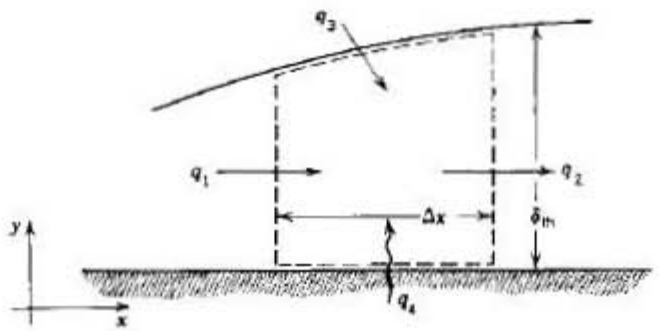


Figura 19.4 Volumen de control del análisis integral de la energía.

Analicemos el volumen de control indicado por medio de líneas punteadas en la figura 19.4, aplicado a un flujo paralelo a una superficie plana sin gradiente de presión, de ancho Δx, altura igual al grosor de la capa térmica límite, δ_t y profundidad unitaria. Una aplicación de la primera ley de la termodinámica en su forma integral,

$$\frac{\delta Q}{dt} - \frac{\delta W_s}{dt} - \frac{\delta W_\mu}{dt} = \iint_{c.s.} (e + P/\rho)\rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dA + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{c.v.} e\rho\,dV \tag{6-10}$$

da las siguientes condiciones en el estado permanente:

$$\frac{\delta Q}{dt} = -k\,\Delta x \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0}$$

$$\frac{\delta W_s}{dt} = \frac{\delta W_\mu}{dt} = 0$$

$$\iint_{\text{c.s.}} (e + P/\rho)\rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dA = \int_0^{\delta_t} \left(\frac{v_x^2}{2} + gy + u + \frac{P}{\rho}\right)\rho v_x\,dy\Big|_{x+\Delta x} - \int_0^{\delta_t} \left(\frac{v_x^2}{2} + gy + u + \frac{P}{\rho}\right)\rho v_x\,dy\Big|_x - \frac{d}{dx}\int_0^{\delta_t} \left[\rho v_x\left(\frac{v_x^2}{2} + gy + u + \frac{P}{\rho}\right)\Big|_{\delta_t}\right] dy\,\Delta x$$

y

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\text{c.v.}} e\rho\,dV = 0$$

En ausencia de efectos gravitacionales de importancia, los términos del flujo correspondientes al flujo convectivo de energía se transforman en:

$$\frac{v_x^2}{2} + u + \frac{P}{\rho} = h_0 = c_p T_0$$

donde h_0 es la entalpía de estancamiento y c_p la capacidad calorífica a presión constante. La temperatura de estancamiento ahora se escribirá simplemente T (sin subíndice) para evitar confusiones y la expresión completa correspondiente a la energía será

$$-k\,\Delta x \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0} = \int_0^{\delta_t} \rho v_x c_p T\,dy\Big|_{x+\Delta x} - \int_0^{\delta_t} \rho v_x c_p T\,dy\Big|_x - \rho c_p\,\Delta x \frac{d}{dx}\int_0^{\delta_t} v_x T_\infty\,dy \quad (19\text{-}29)$$

La ecuación (19-29) también puede escribirse en la forma: $q_4 = q_2 - q_1 - q_3$. En la figura 19.4 aparecen estas cantidades. En la ecuación (19-29), T_∞ representa la temperatura de estancamiento de corriente libre. Si el flujo es incompresible y se utiliza un valor promedio de c_p, el producto ρc_p se puede considerar fuera de los términos integrales de esta ecuación. Al dividir ambos lados de la ecuación (19-29) entre Δx y evaluar el resultado en el límite, cuando Δx tiende a cero, se obtiene:

$$\frac{k}{\rho c_p}\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0} = \frac{d}{dx}\int_0^{\delta_t} v_x(T_\infty - T)\,dy \quad (19\text{-}30)$$

La ecuación (19-30) es análoga a la relación integral de momento, ecuación (12-37), cuando sus términos correspondientes al momento se reeemplazan por su correspondientes de energía. Esta ecuación se puede resolver si, tanto

el perfil de la velocidad como el de la temperatura se conocen. Por lo tanto, en la ecuación de la energía, las variaciones de v_x y de T con y se presuponen. Esto contrasta ligeramente con la solución de momento integral en la cual solamente se presupuso el perfil de la velocidad.

Un perfil de temperatura que se haya supuesto deberá satisfacer las condiciones de frontera:

(1) $T - T_s = 0$ en $y = 0$

(2) $T - T_s = T_\infty - T_s$ en $y = \delta_t$

(3) $\dfrac{\partial}{\partial y}(T - T_s) = 0$ en $y = \delta_t$

(4) $\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}(T - T_s) = 0$ en $y = 0$ [véase la ecuación (19-15)]

Si se presupone una expresión para la variación de temperatura en series de potencia, de la forma

$$T - T_s = a + by + cy^2 + dy^3 \tag{19-31}$$

la aplicación de las condiciones de frontera dará origen a la expresión de $T - T_s$,

$$\frac{T - T_s}{T_\infty - T_s} = \frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta_t}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta_t}\right)^3 \tag{12-40}$$

Si se presupone el perfil de la velocidad en la misma forma, entonces la expresión resultante es la que se encontró en el capítulo 12:

$$\frac{v}{v_\infty} = \frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3$$

Cuando se sustituyen las ecuaciones (19-31) y (12-40) en la expresión integral y se resuelve ésta, se obtiene:

$$\mathrm{Nu}_x = 0.36\,\mathrm{Re}_x^{1/2}\,\mathrm{Pr}^{1/3} \tag{19-32}$$

lo cual es aproximadamente 8% mayor que el resultado exacto expresado en la ecuación (19-25).

Este resultado, aunque inexacto, es suficientemente aproximado al valor conocido como para indicar que puede usarse el método integral con confianza en situaciones en las que no se conozca la solución exacta. Es interesante notar que la ecuación (19-32) de nuevo incluye a los parámetros predichos por el análisis dimensional.

19.6 ANALOGIAS ENTRE TRANSFERENCIAS DE ENERGIA Y MOMENTO

Varias veces durante el estudio de la transferencia de calor hemos encontrado semejanzas entre ésta y la transferencia de momento, tanto en el mecanismo mismo de transferencia como en su descripción cuantitativa. En esta sección se tratarán y se utilizarán estas analogías para obtener relaciones que puedan describir la transferencia de energía.

Osborne Reynolds fue el primero que se dio cuenta en 1874,* de la semejanza entre los mecanismos de transferencia de energía y momento. En 1883 presentó † los resultados de su trabajo acerca de la resistencia de la fricción al flujo de los fluidos dentro de los conductos, haciendo posible la analogía cuantitativa entre ambos fenómenos de transferencia.

Tal como se hizo notar en secciones anteriores, en un flujo que pasa alrededor de una superficie sólida y cuyo número de Prandtl es igual a la unidad, los gradientes adimensionales de velocidad y temperatura se relacionan en la siguiente forma:

$$\left.\frac{d}{dy}\frac{v_x}{v_\infty}\right|_{y=0} = \left.\frac{d}{dy}\left(\frac{T-T_s}{T_\infty-T_s}\right)\right|_{y=0} \tag{19-33}$$

Cuando Pr = $\mu c_p/k = 1$, se tiene: $\mu c_p = k$, y se puede reescribir la ecuación (19-33) en la forma:

$$\mu c_p \left.\frac{d}{dy}\left(\frac{v_x}{v_\infty}\right)\right|_{y=0} = k \left.\frac{d}{dy}\left(\frac{T-T_s}{T_\infty-T_s}\right)\right|_{y=0}$$

lo cual puede transformarse en:

$$\left.\frac{\mu c_p}{v_\infty}\frac{dv_x}{dy}\right|_{y=0} = -\frac{k}{T_s-T_\infty}\left.\frac{d}{dy}(T-T_s)\right|_{y=0} \tag{19-34}$$

Si se recuerda la relación anterior correspondiente al coeficiente de transferencia convectiva de calor:

$$\frac{h}{k} = \left.\frac{d}{dy}\left[\frac{(T_s-T)}{(T_s-T_\infty)}\right]\right|_{y=0} \tag{19-4}$$

podrá observarse que todo el lado derecho de la ecuación (19-34) puede reemplazarse por h, obteniéndose:

$$h = \left.\frac{\mu c_p}{v_\infty}\frac{dv_x}{dy}\right|_{y=0} \tag{10-35}$$

Ahora se introducirá el coeficiente de fricción superficial:

$$C_f \equiv \frac{\tau_0}{\rho v_\infty{}^2/2} = \left.\frac{2\mu}{\rho v_\infty{}^2}\frac{dv_x}{dy}\right|_{y=0}$$

*O. Reynolds, *Proc. Manchester Lit. Phil. Soc.*, 14.7 (1874).
† O. Reynolds, *Trans Roy. Soc.*, (London) 174 A, 935 (1883).

con ayuda del cual, la ecuación (19-35) puede escribirse:

$$h = \frac{C_f}{2}(\rho v_\infty c_p)$$

lo que, escrito en forma adimensional queda:

$$\frac{h}{\rho v_\infty c_p} = \mathrm{St} = \frac{C_f}{2} \tag{19-36}$$

La ecuación (19-36) es la analogía de Reynolds y es un excelente ejemplo de la semejanza entre la naturaleza de las transferencias de energía y momento. En los casos que satisfacen las bases sobre las que se desarrolló la ecuación (19-36), el conocimiento del coeficiente de arrastre friccional nos permitirá calcular fácilmente el coeficiente de transferencia convectiva de calor.

Las restricciones acerca del uso de la analogía de Reynolds deben tenerse en mente; son las siguientes: (1) $\mathrm{Pr} = 1$ y (2) no hay arrastre de forma. La segunda restricción fue el punto de partida del desarrollo anterior y lógicamente, deberá satisfacerse. Esto último tiene sentido solamente cuando se da uno cuenta de que, al relacionar dos mecanismos de transferencia, la forma de expresarlos cuantitativamente debe ser consistente. Obviamente la descripción del arrastre en términos del coeficiente de fricción superficial requiere que el arrastre sea de naturaleza totalmente viscosa. Por lo tanto, la ecuación (19-36) es aplicable solamente en aquellas situaciones en las que el arrastre no se encuentra presente. Algunas áreas posibles de aplicación son los flujos paralelos a las superficies planas o los flujos en los conductos. El coeficiente de fricción superficial ya se ha demostrado que es equivalente al factor de fricción de Fanning, el cual puede evaluarse usando la figura 14.1.

Si se examinan de nuevo los resultados exactos obtenidos en el caso de la capa límite en una placa plana, podrá recordarse lo siguiente:

$$\mathrm{Nu}_x = \frac{h_x x}{k} = 0.332\,\mathrm{Re}_x^{1/2}\,\mathrm{Pr}^{1/3} \tag{19-25}$$

y

$$C_f = \frac{0.664}{\mathrm{Re}_x^{1/2}}$$

Si se dividen ambos lados de la ecuación (19-25) entre el producto $\mathrm{Re}_x\,\mathrm{Pr}^{1/3}$, se tendrá:

$$\frac{\mathrm{Nu}_x}{\mathrm{Re}_x\,\mathrm{Pr}^{1/3}} = \frac{0.332}{\mathrm{Re}_x^{1/2}} = \frac{C_f}{2}$$

El lado izquierdo de esta ecuación también puede alterarse, obteniéndose

$$\frac{\mathrm{Nu}_x}{\mathrm{Re}_x \mathrm{Pr}^{1/3}} \frac{\mathrm{Pr}^{2/3}}{\mathrm{Pr}^{2/3}} = \frac{\mathrm{Nu}_x}{\mathrm{Re}_x \mathrm{Pr}} \mathrm{Pr}^{2/3} = \mathrm{St}\, \mathrm{Pr}^{2/3}$$

y la expresión resultante se transforma en:

$$\mathrm{St}\, \mathrm{Pr}^{2/3} = \frac{C_f}{2} \tag{19-37}$$

La ecuación (19-37) es un resultado exacto del caso de la capa laminar límite en una placa plana. Esta relación es particularmente útil en el caso del flujo totalmente desarrollado de líquido dentro de tuberías. Colburn* aplicó algunas correlaciones de este tipo a una gran cantidad de datos de flujo y configuraciones de todas clases y encontró que el método era muy exacto y confiable siempre que se cumplieran las condiciones siguientes: (1) que no hubiera arrastre de forma y (2) $0.5 < \mathrm{Pr} < 50$. Como resultado del trabajo de Colburn con este tipo de relaciones, se ha llamado a la ecuación (19-37) con el nombre de *Analogía de Colburn*.

La analogía de Colburn se escribe a menudo así:

$$j_H = \frac{C_f}{2} \tag{19-38}$$

donde

$$j_H = \mathrm{St}\, \mathrm{Pr}^{2/3} \tag{19-39}$$

se llama factor j de Colburn de transferencia de calor. En el capítulo 28 se estudiará un factor j de transferencia de masa, j_D.

Note que, cuando $\mathrm{Pr} = 1$, las analogías de Colburn y Reynolds son las mismas. La ecuación (19-37) es, por lo tanto, una extensión de la analogía de Reynolds para los fluidos cuyos números de Prandtl son diferentes de la unidad, dentro de los valores de 0.5 a 50 como se especificó anteriormente. Los fluidos cuyos números de Prandtl están fuera de estos valores son, o aceites espesos o metales líquidos.

19.7 CONSIDERACIONES ACERCA DEL FLUJO TURBULENTO

El efecto del flujo turbulento en la transferencia de energía es directamente análogo a sus efectos semejantes en la transferencia de momento, tal como se estudió en el capítulo 13. Supongamos que la variación del perfil de la temperatura que aparece en la figura 19.5, existe en un flujo turbulento.

*A. P. Colburn, *Trans*, A. J. CH. E., 29, 174 (1933).

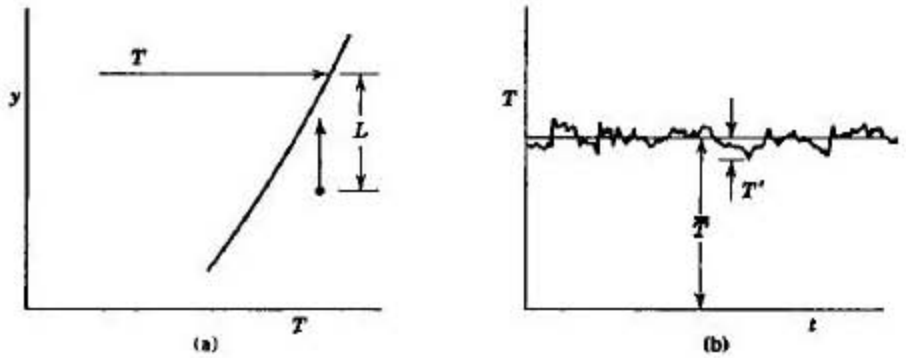


Figura 19.5 Variación de la temperatura en el flujo turbulento.

La distancia que recorre un "paquete" de fluido en la dirección de y que es normal a la dirección de flujo global, se denota por medio de L, la longitud de Prandtl de mezclado. El paquete de fluido que se mueve una distancia L aleja a la temperatura media de su punto de origen y al llegar a su destino el paquete diferirá en temperatura de la del fluido adyacente en una cantidad $T|_{y\pm L} - T|_y$. La longitud de mezclado se supone lo suficientemente pequeña para permitirnos escribir la diferencia de temperatura en la forma:

$$T|_{y\pm L} - T|_y = \pm L \left.\frac{dT}{dy}\right|_y \tag{19-40}$$

Ahora se definirá la cantidad T' como la temperatura fluctuante, gemela de la componente fluctuante de la velocidad, v_x', descrita en el capítulo 13. La temperatura instantánea es la suma de los valores medio y fluctuante, tal como lo indica la figura 19.5 (b) o puesto en forma de ecuación:

$$T = \bar{T} + T' \tag{19-41}$$

Cualquier cantidad importante de transferencia de energía en la dirección de y, en un flujo global que ocurre en la dirección de x, se realiza a causa de la fluctuación en la temperatura, por lo tanto, puede observarse en las ecuaciones (19-40) y (19-41) que:

$$T' = \pm L \frac{d\bar{T}}{dy} \tag{19-42}$$

Ahora puede escribirse el flujo en la dirección de y en la forma

$$\left.\frac{q_y}{A}\right|_y = \rho c_p T v_y' \tag{19-43}$$

donde v_y' puede ser positiva o negativa. Sustituyendo a T por su equivalente, de acuerdo con la ecuación (19-41)

$$\left.\frac{q_y}{A}\right|_y = \rho c_p v_y' (\bar{T} + T')$$

y tomando el promedio del tiempo, se obtiene la siguiente expresión, que corresponde al flujo de energía en la dirección de y, debida a efectos de turbulencia:

$$\left.\frac{q_y}{A}\right|_{\text{turb}} = \rho c_p \overline{(v_y' T')} \tag{19-44}$$

o, con T', en términos de la longitud de mezclado,

$$\left.\frac{q_y}{A}\right|_{\text{turb}} = \rho c_p \overline{v_y' L \frac{d\bar{T}}{dy}} \tag{19-45}$$

El flujo total de energía debido a contribuciones microscópicas y turbulentas, puede escribirse en la forma

$$\frac{q_y}{A} = -\rho c_p [\alpha + \overline{|v_y' L|}] \frac{d\bar{T}}{dy} \tag{19-46}$$

Como α es la difusividad molecular del calor, la cantidad $\overline{|v_y' L|}$ es la difusividad de remolino del calor, llamada ϵ_H. Esta cantidad es el análogo exacto de la difusividad de remolino del momento ϵ_M, tal como se le definió en la ecuación (13-9). En una región de flujo turbulento, $\epsilon_H \gg \alpha$ para todo fluido exceptuando metales.

Como el número de Prandtl es la razón de las difusividades moleculares de momento y calor, se puede formar un análogo a él, el *número turbulento de Prandtl*, que es la razón: ϵ_M/ϵ_H. Si se utilizan las ecuaciones (19-46) y (13-13), se obtendrá:

$$\text{Pr}_{\text{turb}} = \frac{\epsilon_M}{\epsilon_H} = \frac{L^2 |dv_x/dy|}{\overline{|Lv_y'|}} = \frac{L^2 |dv_x/dy|}{L^2 |dv_x/dy|} = 1 \tag{19-47}$$

Así pues, en una región de flujo totalmente turbulenta, el número efectivo de Prandtl es igual a la unidad y la analogía de Reynolds se aplica en la ausencia de arrastre de forma.

En términos de la difusividad de remolino de calor, el flujo de calor se puede expresar en la forma:

$$\left.\frac{q_y}{A}\right|_{\text{turb}} = -\rho c_p \epsilon_H \frac{dT}{dy} \tag{19-48}$$

El flujo total de calor, incluyendo a las contribuciones moleculares y turbulentas, se transforma, entonces, en:

$$\frac{q_y}{A} = -\rho c_p (\alpha + \epsilon_H) \frac{d\bar{T}}{dy} \tag{19-49}$$

La ecuación (19-49) puede aplicarse tanto en la región donde el flujo es laminar, en la cual $\alpha \gg \epsilon_H$, como en la región donde el flujo es turbulento y $\epsilon_H \gg \alpha$. Es en esta última región en la que puede aplicarse la analogía de Rey-

nolds. Prandtl* logró una solución que incluye las influencias, tanto de subcapa laminar como del núcleo turbulento. En este análisis se obtuvieron soluciones en cada una de las regiones y después se unieron en $y = \xi$, la distancia hipotética a la pared que se toma como la frontera que separa ambas regiones.

En la subcapa laminar, las ecuaciones de momento y flujo de calor se reducen a:

$$\tau = \rho\nu\frac{dv_x}{dy} \quad \text{(constante)}$$

y

$$\frac{q_y}{A} = -\rho c_p \alpha \frac{dT}{dy}$$

Cuando se hace una separación de variables y se integra entre los límites $y = 0$ e $y = \xi$, se tiene como expresión de momento, la siguiente:

$$\int_0^{v_x|_\xi} dv_x = \frac{\tau}{\rho\nu}\int_0^{\xi} dy$$

y como expresión correspondiente al flujo de calor,

$$\int_{T_s}^{T_\xi} dT = -\frac{q_y}{A\rho c_p \alpha}\int_0^{\xi} dy$$

Si se despejan los perfiles de la velocidad y la temperatura en la subcapa laminar, se tendrá:

$$v_x|_\xi = \frac{\tau\xi}{\rho\nu} \tag{19-50}$$

$$T_s - T_\xi = \frac{q_y\xi}{A\rho c_p \alpha} \tag{19-51}$$

y eliminando la distancia ξ entre ambas expresiones, se obtiene:

$$\frac{\rho\nu v_x|_\xi}{\tau} = \frac{\rho A c_p \alpha}{q_y}(T_s - T_\xi) \tag{19-52}$$

Si se dirige, ahora, la atención, al núcleo turbulento donde puede aplicarse la analogía de Reynolds, se puede escribir la ecuación (19-36)

$$\frac{h}{\rho c_p (v_\infty - v_x|_\xi)} = \frac{C_f}{2} \tag{19-36}$$

*L. Prandtl, *Zeit. Physik*, 11, 1072 (1910).

y si se expresan h y C_f en términos de las relaciones que las definen, se obtiene:

$$\frac{q_y/A}{\rho c_p(v_\infty - v_x|_\xi)(T_\xi - T_\infty)} = \frac{\tau}{\rho(v_\infty - v_x|_\xi)^2}$$

Si se multiplica y se reordena esta expresión, se tendrá:

$$\frac{\rho(v_\infty - v_x|_\xi)}{\tau} = \frac{\rho A c_p}{q_y}(T_\xi - T_\infty) \tag{19-53}$$

Esta expresión es una forma modificada de la analogía de Reynolds que puede aplicarse de $y = \xi$ a $y = y_{máx}$.

Cuando se elimina a T_ξ de las ecuaciones (19-52) y (19-53), se obtiene:

$$\frac{\rho}{\tau}\left[v_\infty + v_x|_\xi\left(\frac{\nu}{\alpha} - 1\right)\right] = \frac{\rho A c_p}{q_y}(T_s - T_\infty) \tag{19-54}$$

Se introducirá ahora el coeficiente de fricción superficial:

$$C_f = \frac{\tau}{\rho v_\infty{}^2/2}$$

así como el coeficiente de transferencia convectiva de calor:

$$h = \frac{q_y}{A(T_s - T_\infty)}$$

Así puede reducirse la ecuación a (19-54) a

$$\frac{v_\infty + v_x|_\xi(\nu/\alpha - 1)}{v_\infty{}^2 C_f/2} = \frac{\rho c_p}{h}$$

Si se invierten ambos lados de esta expresión y se le hace adimensional, se obtiene:

$$\frac{h}{\rho c_p v_\infty} \equiv \mathrm{St} = \frac{C_f/2}{1 + (v_x|_\xi/v_\infty)[(\nu/\alpha) - 1]} \tag{19-55}$$

Esta ecuación incluye la razón ν/α, que ya anteriormente se definió como número de Prandtl. Cuando Pr = 1, la ecuación (19-55) se reduce a la analogía de Reynolds. Cuando Pr $\neq$ 1, el número de Stanton es función de C_f, Pr y la razón $v_x\ \xi\ /v_\infty$. Sería conveniente eliminar la razón de velocidades, lo cual puede realizarse recordando algunos resultados obtenidos en el capítulo 13.

En el borde de la subcapa laminar,

$$v^+ \doteq y^+ = 5$$

y por definición, $v^+ = v_x/(\sqrt{\tau/\rho})$. Así pues, en este caso,

$$v^+ = v_x|_\xi/(\sqrt{\tau/\rho}) = 5$$

Introduzcamos de nuevo el coeficiente de fricción superficial en la forma:

$$C_f = \frac{\tau}{\rho v_\infty^2/2}$$

de acuerdo con esto, puede escribirse:

$$\sqrt{\frac{\tau}{\rho}} = v_\infty \sqrt{\frac{C_f}{2}}$$

lo cual, al combinarse con la expresión anterior, correspondiente a la razón de velocidades, da:

$$\frac{v_x|_\xi}{v_\infty} = 5\sqrt{\frac{C_f}{2}} \tag{19-56}$$

Al sustituir la ecuación (19-56) en la (19-55), se obtiene:

$$\mathrm{St} = \frac{C_f/2}{1 + 5\sqrt{C_f/2}(\mathrm{Pr} - 1)} \tag{19-57}$$

que se conoce con el nombre de analogía de Prandtl. Esta ecuación se escribe totalmente en términos de cantidades mesurables.

Von Kármán* amplió el trabajo de Prandtl incluyendo el efecto de la transición o capa de amortiguamiento, además de la subcapa laminar y el núcleo turbulento. El resultado que obtuvo, o sea la analogía de von Kármán, se expresa en la forma:

$$\mathrm{St} = \frac{C_f/2}{1 + 5\sqrt{C_f/2}\{\mathrm{Pr} - 1 + \ln[1 + \frac{5}{6}(\mathrm{Pr} - 1)]\}} \tag{19-58}$$

Nótese que, igual que en el caso de la analogía de Prandtl, la ecuación (19-58) se reduce a la analogía de Reynolds cuando el número de Prandtl es igual a la unidad.

La aplicación de las analogías de Prandtl y von Kármán está, lógicamente, restringida a aquellos casos en los que el arrastre de forma es despreciable. Estas ecuaciones arrojan los resultados más exactos cuando los números de Prandtl son mayores que la unidad.

El ejemplo que se ofrece a continuación servirá para demostrar la manera de usar las cuatro relaciones obtenidas en esta sección.

*T. von Karman, *Trans. ASME*, 61, 705 (1939).

EJEMPLO 1

Entra agua a 50 °F en un tubo cambiador de calor, cuyo diámetro interior es de 1 in y una longitud de 10 ft. El agua fluye a razón de 20 gal/min. Si la temperatura de la pared es constante, de 210 °F, calcúlese la temperatura de salida del agua, usando: (a) la analogía de Reynolds (b) la analogía de Colburn, (c) la analogía de Prandtl (d) la analogía de von Kármán. Deberán despreciarse los efectos de entrada y las propiedades del agua pueden evaluarse a la temperatura media aritmética global.

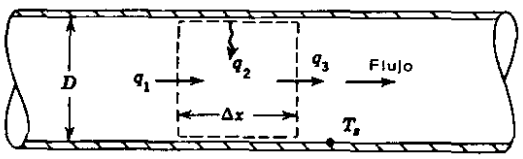


Figura 19.6 Análisis análogo de agua que fluye a través de un tubo circular.

Si se toma en cuenta la porción del tubo cambiador de calor que aparece en la figura 19.6, se verá que al aplicar la primera ley de la termodinámica al volumen de control indicado, se obtendrá:

{Rapidez de calor transferido al volumen de control por medio del flujo de fluido} + {rapidez de calor transferido al volumen de control por convección} = {rapidez de calor transferido hacia afuera del volumen de control por el flujo de fluido}

Si se denominan estas cantidades de rapidez de transferencia de calor, q_1, q_2, q_3, se pueden evaluar de la manera siguiente:

$$q_1 = \rho \frac{\pi D^2}{4} v_x c_p T\Big|_x$$

$$q_2 = h\pi D\, \Delta x (T_s - T)$$

y

$$q_3 = \rho \frac{\pi D^2}{4} v_x c_p T\Big|_{x+\Delta x}$$

La sustitución de estas cantidades en la expresión correspondiente al equilibrio de energía, da:

$$\rho \frac{\pi D^2}{4} v_x c_p [T|_{x+\Delta x} - T|_x] - h\pi D\, \Delta x (T_s - T) = 0$$

lo cual puede simplificarse y reordenarse en la forma:

$$\frac{D}{4} \frac{T|_{x+\Delta x} - T|_x}{\Delta x} + \frac{h}{\rho v_x c_p}(T - T_s) = 0 \qquad (19\text{-}59)$$

Si se evalúa la ecuación (19-59) en el límite, cuando $\Delta x \to 0$, se reducirá a:

$$\frac{dT}{dx} + \frac{h}{\rho v_x c_p} \frac{4}{D}(T - T_s) = 0 \tag{19-60}$$

y separando las variables se obtiene:

$$\frac{dT}{T - T_s} + \frac{h}{\rho v_x c_p} \frac{4}{D} dx = 0$$

e integrando entre los límites indicados, se obtiene

$$\int_{T_0}^{T_L} \frac{dT}{T - T_s} + \frac{h}{\rho v_x c_p} \frac{4}{D} \int_0^L dx = 0$$

$$\ln \frac{T_L - T_s}{T_0 - T_s} + \frac{h}{\rho v_x c_p} \frac{4L}{D} = 0 \tag{19-61}$$

La ecuación (19-61) se puede resolver para T_L. Observe que el coeficiente del término que aparece del lado derecho, $h/\rho v_x c_p$, es el número de Stanton. Este parámetro se logró en forma muy natural al hacer el análisis.

El coeficiente de fricción superficial se puede evaluar con la ayuda de la figura 14.1. La velocidad será:

$$v_x = 20 \text{ gal/min } (\text{ft}^3/7.48 \text{ gal})[144/(\pi/4)(1^2)]\text{ft}^2(\text{min}/60 \text{ s}) = 8.17 \text{ fps}$$

La viscosidad cinemática del agua a 70° F (suponiendo $T_{\text{prom global}}$) es $\nu = 1.06 \times 10^{-5}$ ft^2/seg, por lo que el número de Reynolds se transforma en:

$$\text{Re} = \frac{Dv_x}{\nu} = \frac{(\frac{1}{12} \text{ ft})(8.17 \text{ ft/s})}{1.06 \times 10^{-5} \text{ ft}^2/\text{s}} = 64\,200$$

El factor de fricción, f_f, con este valor de Re, suponiendo que el tubo es liso, es de 0.005. Ahora ya puede evaluarse el número de Stanton para cada una de las cuatro analogías:

a) Analogía de Reynolds

$$\text{St} = \frac{C_f}{2} = 0.0025$$

b) Analogía de Colburn

$$\text{St} = \frac{C_f}{2} \text{Pr}^{-2/3}$$

$$= 0.0025(6.82)^{-2/3} = 0.000695$$

c) Analogía de Prandtl

$$\mathrm{St} = \frac{C_f/2}{1 + 5\sqrt{C_f/2}(\mathrm{Pr} - 1)}$$

$$= \frac{0.0025}{1 + 5(0.05)(5.82)}$$

$$= 0.00102$$

d) Analogía de von Kármán

$$\mathrm{St} = \frac{C_f/2}{1 + 5\sqrt{C_f/2}\{\mathrm{Pr} - 1 + \ln[1 + \frac{5}{6}(\mathrm{Pr} - 1)]\}}$$

$$= \frac{0.0025}{1 + 5(0.05)[5.82 + \ln 5.85]}$$

$$= 0.000863$$

Los resultados obtenidos anteriormente, sustituidos en la ecuación (19-61), dan, para la temperatura de salida, T_L

(a) $T_L = 162°F$

(b) $T_L = 95°F$

(c) $T_L = 112°F$

y

(d) $T_L = 104°F$

La temperatura global promedio será entre 70° y 80° F, haciendo innecesario un ajuste en propiedades del agua que se utilicen, siendo la temperatura global de 70° F.

El valor de la analogía de Reynolds es muy diferente de los demás resultados obtenidos, lo cual no es sorprendente ya que el número de Prandtl era considerablemente mayor de 1. Las últimas tres analogías arrojan resultados muy consistentes. La analogía de Colburn es la más sencilla y es preferible desde ese punto de vista.

CONCLUSION

En este capítulo se han introducido los conceptos fundamentales de transferencia convectiva de calor. Los nuevos parámetros implicados en la convección son los números de Prandt, Nusselt, Stanton y Grashof.

Se estudiaron cuatro métodos para analizar procesos de transferencia de calor por convección:

(1) análisis dimensional acoplado con la experimentación
(2) análisis exacto de la capa límite

(3) análisis integral de la capa límite
(4) analogía entre las transferencias de momento y energía

En los capítulos siguientes se darán diversas ecuaciones empíricas para la predicción de los coeficientes de transferencia convectiva de calor.

PROBLEMAS

19.1 Demuestre, usando el análisis dimensional, que los parámetros son

$$\frac{T-T_\infty}{T_0-T_\infty} \quad \frac{x}{L} \quad \frac{\alpha t}{L^2} \quad \text{y} \quad \frac{hL}{k}$$

combinaciones posibles de las variables apropiadas para describir la conducción en estado no permanente en una pared plana.

19.2 El análisis dimensional ha demostrado que los parámetros siguientes son útiles en la convección forzada:

$$\frac{xv_\infty\rho}{\mu} \quad \frac{\mu c_p}{k} \quad \frac{hx}{k} \quad \frac{h}{\rho c_p v_\infty}$$

Calcule cada uno de estos parámetros a 340 K, correspondientes a: aire, agua, benceno, mercurio y glicerina. La distancia x es de 0.3 m, v_∞ = 15 m/seg. y h = 34 W/m^4 · K.

19.3 Grafique los parámetros $xv_\infty\rho/\mu$, $\mu c_p/k$, hx/k, y $h/\rho c_p v_\infty$ contra la temperatura, para: aire, agua y glicerina, tomando los valores de x, h y v, del problema 19.2.

19.4 Fluye nitrógeno a 100 ° F y 1 atm. con una velocidad de 10 fps. Una placa plana de 6 in de ancho, a una temperatura de 200 ° F se coloca en forma paralela a la dirección de flujo. Determine, a 4 ft del borde de ataque, lo siguiente:

(a) δ; (b) δ_t; (c) C_{fx}; (d) C_{fL}; (e) h_x; (f) h; (g) la fuerza total de arrastre, y (h) la transferencia total de calor.

19.5 Las placas de combustible de un reactor nuclear son de 4 ft de longitud y están colocadas con un espacio de 1/2 in entre ambas. El flujo de calor a lo largo de las superficies de las placas varía de manera senoidal, de acuerdo con la ecuación:

$$\frac{q}{A} = \alpha + \beta \operatorname{sen}\frac{\pi x}{L}$$

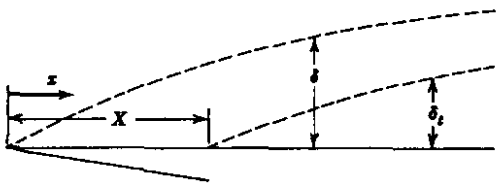
donde $\alpha = 250$ Btu/h ft^2, $\beta = 1500$ Btu/h ft^2, x es la distancia del borde de ataque de las placas y L es la longitud total de las placas. Si se utiliza aire a 120° F y 80 psi, que fluye a una velocidad de masa de 6000 lb_m /h ft^2, para enfriar las placas, haga gráficas que muestren

a) el flujo de calor contra x

b) la temperatura media del aire contra x

19.6 Dada la información del problema 19.5, determine el calor total transferido para un haz de placas con un área superficial combinada de 640 ft^2. Cada placa tiene 4 ft de anchura.

19.7 En la figura puede verse el caso de un fluido que fluye paralelamente a una placa plana en la que, a una distancia x del borde de ataque, la placa y el fluido están a la misma temperatura. La placa se mantiene a una



temperatura constante T_s para valores de $x > X$, donde $T_s > T_\infty$. Presuponiendo un perfil cúbico en las capas límite térmica e hidrodinámica, demuestre que la razón del grosor, ξ, se expresa así:

$$\xi = \frac{\delta_t}{\delta} \cong \frac{1}{\mathrm{Pr}^{1/3}}\left[1 - \left(\frac{X}{x}\right)^{3/4}\right]^{1/3}$$

Demuestre también que el número local de Nusselt se puede expresar por medio de la ecuación:

$$\mathrm{Nu}_x \cong 0.33\left(\frac{\mathrm{Pr}}{1-(X/x)^{3/4}}\right)^{1/3} \mathrm{Re}_x^{1/2}$$

19.8 Demuestre que, en el caso de la convección natural adyacente a una pared plana vertical, las ecuaciones apropiadas correspondientes a las capas límite hidrodinámica y térmica son:

$$\alpha \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0} = \frac{d}{dx}\int_0^{\delta_t} v_x(T_\infty - T)\, dy$$

y

$$-\nu \left.\frac{\partial v_x}{\partial y}\right|_{y=0} + \beta g \int_0^{\delta_t} (T - T_\infty)\, dy = \frac{d}{dx}\int_0^{\delta} v_x^{\,2}\, dy$$

19.9 Si se usan las relaciones integrales del problema 19.8 y los perfiles de la velocidad y la temperatura se suponen de la forma:

$$\frac{v}{v_x} = \left(\frac{y}{\delta}\right)\left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2$$

y

$$\frac{T - T_\infty}{T_s - T_\infty} = \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2$$

donde δ es el grosor de las capas límite hidrodinámica y térmica, demuestre que las soluciones en términos de δ y v_x, de cada una de las ecuaciones integrales, se reducen a:

$$\frac{2\alpha}{\delta} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\delta v_x}{30}\right)$$

y

$$-\frac{\nu v_x}{\delta} + \beta g\, \Delta T \frac{\delta}{3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\delta v_x^2}{105}\right)$$

En seguida, suponiendo que, tanto δ como v_x varían con x, de acuerdo con:

$$\delta = Ax^a \qquad \text{y} \qquad v_x = Bx^b$$

demuestre que la expresión resultante, correspondiente a δ, se transforma en:

$$\delta/x = 3.94 \mathrm{Pr}^{-1/2}(\mathrm{Pr} + 0.953)^{1/4}\, \mathrm{Gr}_x^{-1/4}$$

y que el número local de Nusselt es:

$$\mathrm{Nu}_x = 0.508\, \mathrm{Pr}^{1/2}(\mathrm{Pr} + 0.953)^{-1/4}\, \mathrm{Gr}_x^{1/4}$$

19.10 Usando las relaciones del problema 19.9, determine en el caso de aire a 310 k, adyacente a una pared vertical cuya superficie se encuentra a 420 K,

a) el grosor de la capa límite para x = 15 cm, 30 cm, 1.5 m

b) la magnitud de h_x a 15 cm, 30 cm y 1.5 m.

19.11 Determine la transferencia total de calor de la pared vertical descrita en el problema 19.10 al aire circundante por metro de ancho, si la pared tiene una altura de 2.5 m.

19.12 Las relaciones simplificadas que corresponden a la convección natural del aire son de la forma:

$$h = \alpha(\Delta T/L)^\beta$$

donde α, β, son constantes, L es una longitud significativa en ft, ΔT es $T_s - T_\infty$ en °F y h es el coeficiente de transferencia convectiva de calor, en Btu/h ft^2 °F. Determine los valores de α y β en la pared plana vertical usando la ecuación del problema 19.9.

19.13 Obtenga expresiones integrales correspondientes al número local de Nusselt en términos de Re_x y Pr, para perfiles de la velocidad y la temperatura de la forma:

$$v = a + by, \qquad T - T_s = \alpha + \beta y$$

usando las fórmulas integrales apropiadas para flujos paralelos en una superficie plana con una velocidad constante de corriente libre.

19.14 Repita el problema 19.13 en el caso en que los perfiles de la temperatura y la velocidad sean de la forma:

$$v = a + by + cy^2 \qquad T - T_s = \alpha + \beta y + \gamma y^2$$

19.15 Repita el problema 19.13 para perfiles de velocidad y temperatura de la forma:

$$v = a \operatorname{sén} by \qquad T - T_s = \alpha \operatorname{sen} \beta y$$

19.16 En el caso de una capa límite turbulenta en una placa plana, se ha demostrado que el perfil de la velocidad es de la forma:

$$\frac{v}{v_\infty} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}$$

Suponiendo un perfil de temperatura de la misma forma, esto es

$$\frac{T - T_s}{T_\infty - T_s} = \left(\frac{y}{\delta_t}\right)^{1/7}$$

y suponiendo, también que $\delta = \delta_t$, use la relación integral de la capa límite para despejar h_x y Nu_x. El gradiente de la temperatura en la superficie se puede considerar semejante al gradiente de la velocidad en $y = 0$ dado por la ecuación (13-26).

19.17 Se utiliza un tubo de 1 in de diámetro inferior dentro del cual circula agua a 60 °F, para enfriar un reactor nuclear. La rapidez de flujo del agua es de 30 gal/min. Determine la transferencia total de calor así como la temperatura de salida del agua en un tubo de 15 ft de longitud, si la temperatura superficial del tubo tiene un valor constante de 300°F. Compare la respuesta obtenida usando las analogías de Reynolds y Colburn.

19.18 Se utiliza un tubo de 1 in de diámetro inferior dentro del cual circula agua a 60° F, para enfriar un reactor nuclear. La rapidez de flujo del agua es de 30 gal/min. Determine la transferencia total de calor así como la temperatura de salida del agua y la temperatura de la pared a la salida de

un tubo de 15 ft de longitud, si las condiciones que prevalecen en la pared son las de un flujo uniforme de calor de 500 Btu/h ft^2.

19.19 Resuelva el problema 19.18 en el caso de un flujo de calor en una pared, el cual varía de acuerdo con la expresión:

$$\frac{q}{A} = \alpha + \beta \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L}$$

donde $\alpha = 250$ Btu/h ft^2, $\beta = 1500$ Btu/h ft^2, x es la distancia desde la entrada y L, la longitud del tubo.

19.20 Resuelva el problema 19.17 para el caso en que el fluido sea aire a 15 fps.

19.21 Resuelva el problema 19.18 para el caso en que el fluido sea aire a 15 fps.

19.22 Resuelva el problema 19.17 para el caso en que el fluido sea sodio entrando al tubo a 200° F.

19.23 Resuelva el problema 19.18 para el caso en que el fluido sea sodio entrando al tubo a 200° F.

19.24 Utilice los resultados del problema 19.7, junto con los del capítulo 12 para determinar el valor de δ, C_{fx}, δ_t y h_x a una distancia de 40 cm del borde de ataque de una placa plana. Fluye aire, paralelamente a la superficie de la placa, con una velocidad de corriente libre de 5 m/seg y $T_\infty = 300$ K. Los primeros 20 cm de la placa no están calentados, la temperatura superficial se mantiene a 400 K después de ese punto.

19.25 Fluye glicerina paralelamente a una placa que mide 2 ft por 2 ft, con una velocidad de 10 fps. Encuentre los valores del coeficiente medio de transferencia convectiva de calor y la fuerza de arrastre asociada que actúa sobre la placa cuando la temperatura de la glicerina es de 30, 50 y 180° F. ¿Cuál será el flujo de calor en cada uno de los casos, si la temperatura de la placa es 50° mayor que la de la glicerina?

19.26 Dada la información del problema 19.25, construya una gráfica de coeficiente de transferencia convectiva de calor contra la posición sobre la placa, cuando la temperatura de la glicerina es de 30, 50 y 180° F.

20
CORRELACIONES EN LA TRANSFERENCIA CONVECTIVA DE CALOR

En el capítulo 19 se estudió la transferencia de calor convectivo desde un punto de vista analítico. Aunque el método analítico tiene mucho significado, puede no ofrecer una solución práctica a cada problema. Existen muchas situaciones para las cuales aún no se ha encontrado un modelo matemático que tenga éxito. Aun en los casos en que es posible encontrar una solución analítica, es necesario verificar los resultados por medio del experimento. En este capítulo se presentarán algunas de las relaciones experimentales más útiles de que se dispone acerca de la transferencia de calor. La mayoría de estas relaciones aparecen en la forma indicada por el análisis dimensional.

Las siguientes secciones incluyen análisis y relaciones acerca de la convección natural, convección forzada en un flujo interno y convección forzada en un flujo externo, respectivamente. En cada uno de estos casos, las relaciones analíticas disponibles se presentan junto con las relaciones empíricas más satisfactorias para una geometría y condición de flujo particulares.

20.1 CONVECCION NATURAL

El mecanismo de transferencia de energía por convección natural incluye el movimiento de un fluido alrededor de una frontera sólida, como resultado de las diferencias de densidad que resultan del intercambio de energía. A causa de esto, es muy natural que los coeficientes de transferencia de calor así como las ecuaciones que la relacionan, varíen de acuerdo con la geometría de un sistema dado.

Superficies Verticales. El sistema de convección natural que acepta con más facilidad el tratamiento analítico es el de un fluido adyacente a una pared

vertical o a un cilindro de gran diámetro. Lorenz* logró la primera solución analítica. Estudió la transferencia de energía entre un pared vertical isotérmica y un gas adyacente en un flujo laminar. Además de considerar uniforme la temperatura de la pared, Lorenz supuso que la velocidad y la temperatura del

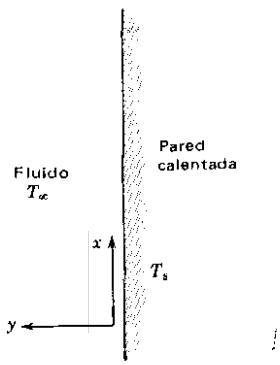


Figura 20.1 Sistema de coordenadas usado en el análisis de la convección natural adyacente a la pared vertical calentada.

gas eran funciones únicamente de la dirección normal a la pared vertical, que aparece en la figura 20.1. Las ecuaciones de movimiento y de transferencia de energía a las que conducen estas suposiciones son:

$$0 = \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + (\rho_\infty - \rho) g \tag{20-1}$$

y

$$v_x \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k}{\rho_\infty c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{20-2}$$

Las ecuaciones (20-1) y (20-2) se pueden aplicar al gas que se encuentra próximo a la pared. Lorenz hizo uso de las condiciones de frontera,

$$T = T_s \qquad v_x = 0 \qquad \text{at } y = 0$$
$$T = T_\infty \qquad v_x = 0 \qquad \text{at } y = \infty$$

logrando la siguiente expresión, correspondiente al número de Nusselt:

$$\mathrm{Nu}_L = \frac{hL}{k} = 0.548 \left[L^3 \rho^2 \frac{g \beta c_p}{\mu k} (T_s - T_\infty) \right]^{1/4} \tag{20-3}$$

En forma sencilla, esta ecuación se transforma en:

$$\mathrm{Nu}_L = 0.548 (\mathrm{Gr}\,\mathrm{Pr})^{1/4} \tag{20-4}$$

*L. Lorenz, *Wiedemann Ann. d. Phys.*, 13, 582 (1881).

Si se utiliza la expresión de Lorenz, se puede expresar el flujo de calor en la forma:

$$q/A = h(T_s - T_\infty)$$
$$= 0.548\left[\frac{\rho^2 g\beta c_p k^3}{\mu L}\right]^{1/4}(T_s - T_\infty)^{5/4} \qquad (20\text{-}5)$$

La relación encontrada por Lorenz, o sea, la ecuación (20-3) es, cuando más, una aproximación a causa de las suposiciones sobre las que está basada. Sin embargo esta solución fue la primera en incorporar todas las variables significativas para la convección natural. Las relaciones que incluían los números de Grashof y Prandtl no eran muy conocidas en la época en que Lorenz hizo este trabajo; sin embargo, la ecuación (20-3), se reduce de manera natural a la forma de la ecuación (20-4) tal como lo predice el análisis dimensional. La solución de Lorenz también fue la primera en establecer el hecho de que la rapidez de transferencia de calor es una función de la diferencia de temperatura, $T_s - T_\infty$, elevado a la potencia 5/4.

Schmidt y Beckmann* midieron la temperatura y velocidad del aire en diferentes puntos cerca de una placa vertical, y encontraron una variación importante en ambas cantidades, en dirección paralela a la placa, lo cual se opone a la suposición de Lorenz. Las variaciones de la velocidad y la temperatura en una placa vertical de 12.5 cm de altura, aparecen en las figuras 20.2 y 20.3, bajo las siguientes condiciones: $T_s = 65°C$, $T_\infty = 15°C$.

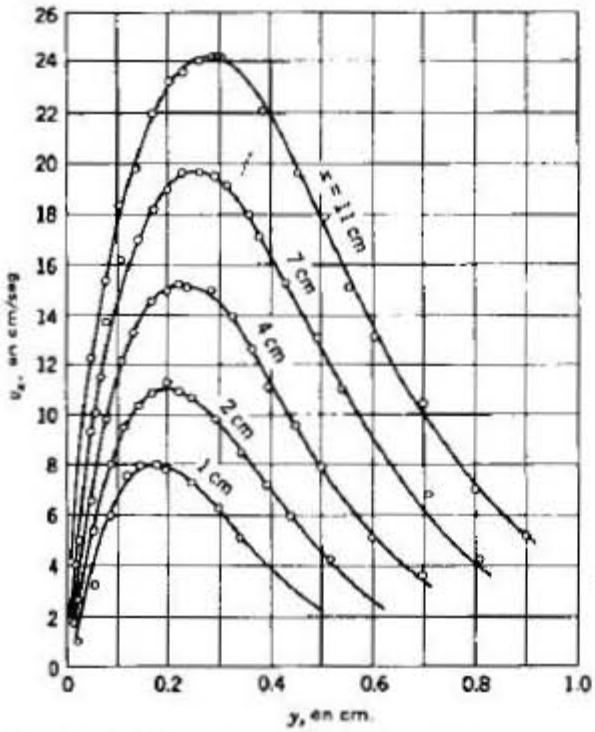


Figura 20.2 Distribución de velocidades en la vecindad de una placa calentada vertical colocada en aire.

*E. Schmidt y W. Beckmann, *Tech. Mech. U. Thermodynamik*, 1,341 y 391 (1930).

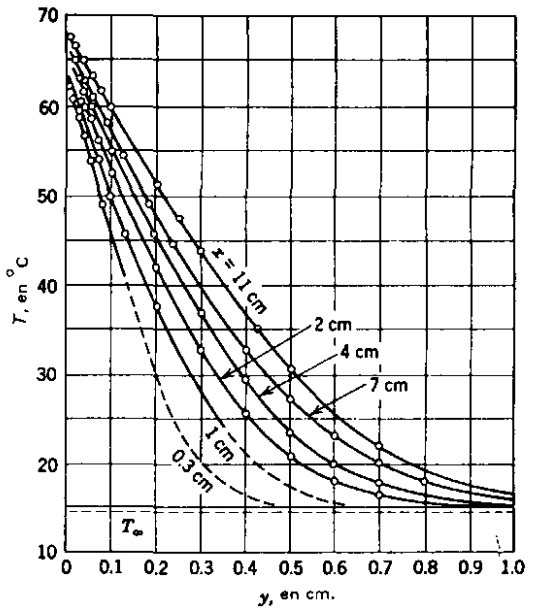


Figura 20.3 Distribución de temperaturas en la vecindad de una placa vertical calentada colocada en aire.

Las ecuaciones que se utilizan en la región cercana a la placa vertical son las siguientes (ρ y μ se consideran constantes, excepto en el caso del término boyante de la ecuación de momento):

continuidad:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0 \tag{20-6}$$

ecuación de movimiento:

$$\rho v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+\rho v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}=\mu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+(\rho_\infty-\rho)g \tag{20-7}$$

y *ecuación de energía:*

$$v_x\frac{\partial T}{\partial x}+v_y\frac{\partial T}{\partial y}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{20-8}$$

Schmidt y Beckmann obtuvieron la expresión siguiente, correspondiente al número de Nusselt

$$\mathrm{Nu}_x=0.508\left[\frac{gx^3(T_s-T_\infty)}{4\nu^2 T_\infty}\right]^{1/4} \tag{20-9}$$

o, en términos del número de Grashof, definido en la forma

$$\mathrm{Gr} = \frac{g x^3 (T_s - T_\infty)}{\nu^2 T_\infty} \tag{20-10}$$

la expresión correspondiente al número de Nusselt se transforma en:

$$\mathrm{Nu}_x = 0.359(\mathrm{Gr})^{1/4} \tag{20-11}$$

Eckert*, tomando una capa límite laminar, obtuvo la expresión siguiente, en el caso de una placa vertical:

$$\mathrm{Nu}_x = 0.508\left(\frac{\mathrm{Pr}}{0.952+\mathrm{Pr}}\mathrm{Gr}_x\,\mathrm{Pr}\right)^{1/4} \tag{20-12}$$

El número promedio de Nusselt, hL/k, puede obtenerse por medio del proceso de integración indicado en la ecuación (15-12),

$$h = \frac{1}{L}\int_0^L h_x\,dx$$

Al sustituir la expresión del coeficiente de transferencia convectiva de calor, de la ecuación (20-12) en la de arriba, se obtiene, para el número promedio de Nusselt,

$$\mathrm{Nu}_L = 0.678\left(\frac{\mathrm{Pr}}{0.952+\mathrm{Pr}}\mathrm{Gr}_L\,\mathrm{Pr}\right)^{1/4} \tag{20-13}$$

Para el caso de una capa límite totalmente turbulenta, Eckert y Jackson obtuvieron la ecuación:

$$\mathrm{Nu}_L = 0.0246\left(\frac{\mathrm{Gr}_L}{1+0.494\,\mathrm{Pr}^{2/3}}\right)^{2/5}\mathrm{Pr}^{7/15} \tag{20-14}$$

La transición de flujo laminar a turbulento, se ha encontrado experimentalmente que ocurre entre los valores $10^8 < \mathrm{Gr}_L\ \mathrm{Pr} < 10^{10}$. Eckert y Jackson recomiendan las siguientes ecuaciones, para los valores indicados:

$$\mathrm{Gr}_L\,\mathrm{Pr} < 10^9 \qquad \mathrm{Nu}_L = 0.555(\mathrm{Gr}_L\,\mathrm{Pr})^{1/4} \tag{20-15}$$

$$\mathrm{Gr}_L\,\mathrm{Pr} > 10^9 \qquad \mathrm{Nu}_L = 0.0210(\mathrm{Gr}_L\,\mathrm{Pr})^{2/5} \tag{20-16}$$

En la figura 20.4 puede verse la forma en la que las ecuaciones (20-15) y (20-16) relacionan los datos experimentales.

*E. R. G. Eckert, *Introduction to the Transfer of Heat and Mass*, McGraw Hill Book Company, Nueva York, 1951.

†E. R. G. Echert y T. W. Jackson, NACA RFM 50 D25 Julio de 1950.

Superficies Horizontales. Mc.Adams* relacionó los datos experimentales obtenidos en la convección natural de cilindros horizontales a gases y líquidos, tal como puede verse en la figura 20.5. Mc.Adams sugiere, para la parte superior de la curva, entre los valores $10^4 < Gr_D\ Pr < 10^9$, la relación adimensional en la forma:

$$Nu = 0.53(Gr_D\ Pr)^{1/4} \tag{20-17}$$

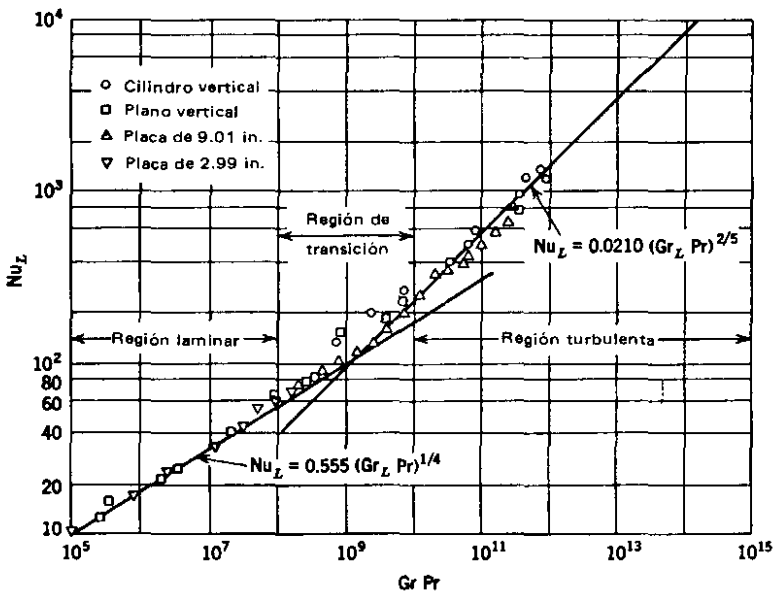


Figura 20.4 Correlación de datos de transferencia de calor por convección natural en superficies verticales (De E.R.G. Eckert y T. W. Jackson, NACA RFM 50 D25, Julio (1950).)

Al irse reduciendo el diámetro del cilindro, en el caso del alambre el número de Grashof se vuelve muy pequeño. Elenbaas† obtuvo, para valores de $Gr_D\ Pr < 10^4$, la ecuación

$$235Nu^3\, e^{-6/Nu} = Gr_D\ Pr \tag{20-18}$$

Lo cual concuerda perfectamente con los datos experimentales. Hsu§ recomienda que se utilice la ecuación (20-19) en el flujo de línea de corriente de

* W. A. McAdams, *Heat Transmission*, Segunda Edición, McGraw Hill Book Company, Nueva York, 1942.
† W. Elenbaas, J. Appl. Phys, 19, 1148 (1948).
‡ W. Elenbaas, Philips Res. Dept., 3,338 y 450 (1948).
§ S. T. Hsu, *Engeneering Heat Transfer*, Van Nostrand, Princeton, N. J. 1968.

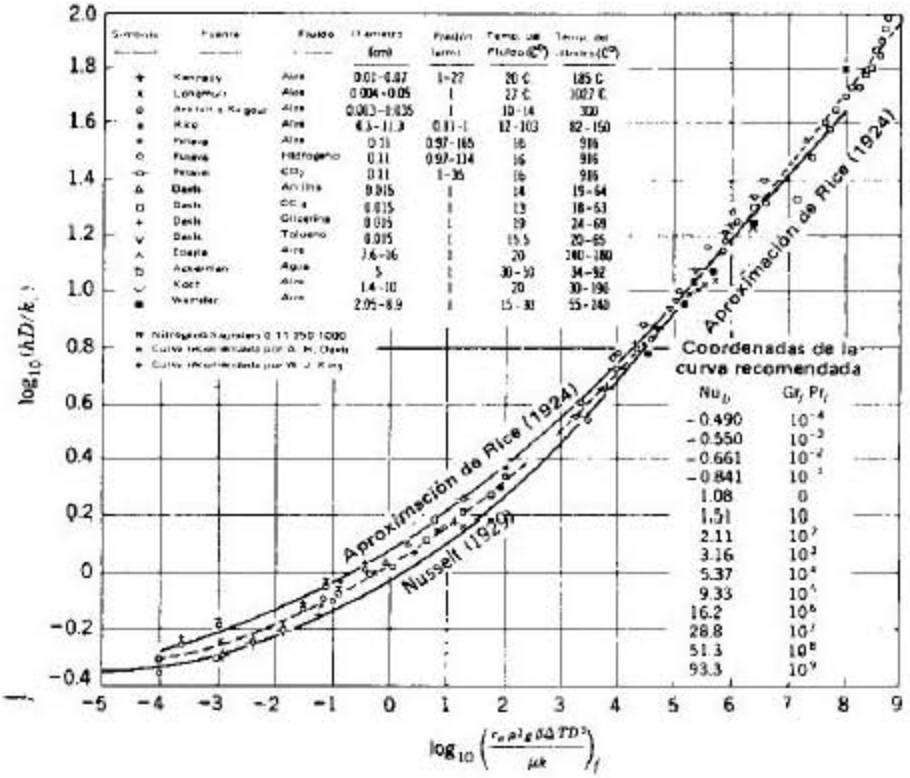


Figura 20.5 Convección natural de cilindros horizontales a gases y líquidos (Todas las cantidades designadas por medio de subíndice f, deberán evaluarse a la temperatura de la película). (De W.H.McAdams, *Heat Transmission*, Tercera Edición, McGraw Hill Book Company, New York, 1954, pág. 176 con licencia de los editores).

fluidos metálicos y no metálicos sobre cilindros más grandes que los alambres:

$$\mathrm{Nu}_D = 0.53\left(\frac{\mathrm{Pr}}{0.952+\mathrm{Pr}}\mathrm{Gr}_D\,\mathrm{Pr}\right)^{1/4} \tag{20-19}$$

McAdams* recomienda que se usen las siguientes relaciones para placas horizontales. En el caso de placas calentadas colocadas hacia arriba o de placas enfriadas colocadas hacia abajo, entre los valores $10^5 < \mathrm{Gr}_L\,\mathrm{Pr} < 2 \times 10^7$,

$$\mathrm{Nu}_L = 0.54(\mathrm{Gr}_L\,\mathrm{Pr})^{1/4} \tag{20-20}$$

y en el conjunto de valores $2\times10^7 < \mathrm{Gr}_L\,\mathrm{Pr} < 3\times10^{10}$

$$\mathrm{Nu}_L = 0.14(\mathrm{Gr}_L\,\mathrm{Pr})^{1/3} \tag{20-21}$$

Cuando se trata de placas calentadas colocadas hacia abajo o de placas enfriadas colocadas hacia arriba, la ecuación que debe usarse es:

$$\mathrm{Nu}_L = 0.27(\mathrm{Gr}_L\,\mathrm{Pr})^{1/4} \tag{20-22}$$

* McAdams, *Heat Transmission*, Tercera Edición, McGraw Hill Book Company, Nueva York, 1954.

entre los valores laminares de $3 \times 10^5 < \mathrm{Gr}_L \, \mathrm{Pr} < 10^{10}$.

En cada una de las relaciones anteriores, la longitud característica usada para calcular los número de Nusselt y Grashof es la longitud de uno de los lados de una superficie cuadrada, la media de las dos dimensiones de una superficie rectangular o 0.9 veces el diámetro de un disco circular.

En el caso de esferas o sólidos rectangulares, King sugiere el uso de las ecuaciones correspondientes a los cilindros horizontales de longitud característica, L, calculadas a partir de las dimensiones horizontal y vertical, de acuerdo con la ecuación:

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_{\text{horiz}}} + \frac{1}{L_{\text{vert}}} \tag{20-23}$$

Se puede ver fácilmente que, en una esfera, L se transforma en $D/2$.

Como el fluido asociado con la mayoría de las situaciones de convección natural es el aire a presión atmosférica, las relaciones anteriores se han simplificado para poderlas aplicar al aire, con el coeficiente de transferencia convectiva de calor representado por la ecuación:

$$h = C\left(\frac{\Delta T}{L}\right)^n \tag{20-24}$$

La longitud significativa, L, se encuentra en la misma forma estudiada anteriormente y sus unidades deben ser pies, el exponente n toma valores de 1/3 o 1/4 y la constante C varía considerablemente en diferentes geometrías. En la tabla 20.1 aparece un resumen de valores de C, n y L. Todas las constantes de la tabla son las sugeridas por McAdams.

Tabla 20.1 Valores de C, n y L que deben usarse en la expresión simplificada de convección natural para aire, ecuación (20-24).

Geometría	*Rangos de aplicación.*	C	n	L
Planos y cilindros verticales	$10^4 < \mathrm{Gr}_L \, \mathrm{Pr} < 10^9$	0.29	$\frac{1}{4}$	altura
	$10^9 < \mathrm{Gr}_L \, \mathrm{Pr} < 10^{12}$	0.19	$\frac{1}{3}$	1
Cilindros horizontales	$10^3 < \mathrm{Gr}_D \, \mathrm{Pr} < 10^9$	0.27	$\frac{1}{4}$	diámetro
	$10^9 < \mathrm{Gr}_D \, \mathrm{Pr} < 10^{12}$	0.18	$\frac{1}{3}$	1
Placas horizontales: placas calientes colocadas hacia arriba o placas frías colocadas hacia abajo.	$10^5 < \mathrm{Gr}_L \, \mathrm{Pr} < 2 \times 10^7$	0.27	$\frac{1}{4}$	long. del lado
	$2 \times 10^7 < \mathrm{Gr}_L \, \mathrm{Pr} < 3 \times 10^{10}$	0.22	$\frac{1}{3}$	1
Placas frías colocadas hacia arriba o placas calientes colocadas hacia abajo.	$3 \times 10^5 < \mathrm{Gr}_L \, \mathrm{Pr} < 3 \times 10^{10}$	0.12	$\frac{1}{4}$	long. del lado

Los valores que se dan en la tabla 20.1 para usarse en la ecuación (20-24) son para cuando las unidades de h son Btu/h ft^2 °F y la diferencia de tempe-

*W. J. King, *Mech. Engr.*, 54, 347 (1932).

ratura $T_s - T_\infty$ en °F. En esta tabla pueden usarse los valores dados para los cilindros horizontales en esferas, si el radio de la esfera se usa en L.

Pueden hacerse algunas generalizaciones concernientes a la información que aparece en la tabla 20.1. En una capa límite turbulenta, las expresiones simplificadas correspondientes al aire indican que el coeficiente de transferencia convectiva de calor, h, varía en la forma $T_s - T_\infty$ a la potencia 1/3, en tanto que el exponente de ΔT es 1/4 para una capa laminar límite. También es interesante notar que h, en el caso turbulento, se expresa independientemente de cualquier longitud significativa de las configuraciones estudiadas.

La expresión simplificada que corresponde al aire, ecuación (20-24), ofrece una gran reducción de tiempo y tedio en cuanto a la solución de problemas de transferencia convectiva de calor. El siguiente ejemplo servirá para demostrar esto:

EJEMPLO 1

Se sumerge un transformador en un baño de aceite y la combinación se mete dentro de un recipiente cilíndrico de 2 1/2 ft de diámetro y 4 ft de altura. Despreciando la transferencia de energía del fondo del tanque, calcúlese la temperatura superficial del tanque si la pérdida eléctrica es de 1.5 kW. Se supone que toda pérdida se debe a la convección natural del aire circundante que se encuentra a 70° F.

Las dos áreas que van a examinarse son:

$$A_{\text{arriba}} = \frac{\pi}{4}(2.5)^2 = 4.91 \text{ ft}^2$$

y

$$A_{\text{lado}} = \pi(2.5)(4) = 31.42 \text{ ft}^2$$

La transferencia de calor es la suma de las contribuciones de cada una de las superficies. Individualmente esta rapidez de transferencia de calor es:

$$q_{\text{arriba}} = (4.91)(h_{\text{arriba}})(T - 70) \text{ Btu/hr}$$

y

$$q_{\text{lado}} = (31.42)(h_{\text{lado}})(T - 70) \text{ Btu/hr}$$

Si se calculan h_{arriba} y h_{lado}, se usa la ecuación (20-24) y sustituyen los valores de la tabla 20.1 suponiendo que se trata de una capa límite laminar, se obtienen los dos valores de q:

$$q_{\text{arriba}} = (4.91)(0.27)\left(\frac{T-70}{0.9\times 2.5}\right)^{1/4}(T-70)$$

y

$$q_{\text{lado}} = (31.42)(0.29)\left(\frac{T-70}{4}\right)^{1/4}(T-70)$$

y realizando el cálculo indicado e igualando la suma de las q a 1.5 kW, se obtiene:

$$q = (1.5\text{ kW})(3413\text{ Btu/kW hr}) = 5120\text{ Btu/hr}$$

$$q_{\text{arriba}} = q_{\text{lado}} = (1.082 + 6.44)(T - 70)^{5/4}\text{ Btu/hr}$$

$$T - 70 = \left(\frac{5120}{7.522}\right)^{4/5} = 185°\text{F} \qquad (358\text{ K})$$

y

$$T_{\text{superficie}} = 185 + 70 = 255°\text{F} \qquad (397\text{ K})$$

Finalmente se revisa esta solución para verificar que las constantes y los exponentes utilizados en las expresiones correspondientes a h sean correctos, esto es, asegurarse de que el producto Gr Pr está dentro de los valores requeridos. Es muy sencillo verificar esto.

La solución al ejemplo 1 se simplificó mucho más empleando la ecuación (20-24) de lo que se habría simplificado usando las ecuaciones (20-20) y (20-15). La mayor dificultad con que se tropieza al usar estas últimas expresiones es la temperatura a la que se van a evaluar las propiedades físicas del fluido. Por lo general se utiliza la temperatura de la película, pero si no se conoce la temperatura superficial, como ocurrió en el ejemplo 1, es necesario seguir el procedimiento de prueba y error para calcular Gr, Pr y, finalmente, h. Este procedimiento es particularmente tedioso en la convección natural debido al número de variables que forman el número de Grashof.

20.2 CONVECCION FORZADA EN EL FLUJO INTERNO

Indudablemente, el proceso más importante de transferencia de calor convectivo desde el punto de vista de la industria es el del calentamiento o enfriamiento de un fluido que circula a través de un conducto cerrado. La transferencia de momento que se asocia con este tipo de flujo se estudió ya en el capítulo 14. En esta sección se utilizarán muchos de esos conceptos y terminología sin mayor explicación.

La transferencia de energía asociada con la convección forzada se estudiará separadamente en el flujo laminar y en el turbulento. El estudiante recordará que el número crítico de Reynolds correspondiente al flujo dentro de los conductos es de 2300.

Flujo Laminar. La primera solución analítica para la convección forzada con flujo laminar dentro de un tubo, fue formulada por Graetz* en 1885. Las suposiciones básicas de Graetz para encontrar su solución fueron:

1) El perfil de la velocidad es parabólico y totalmente desarrollado antes de ocurrir el intercambio de calor entre la pared del tubo y el fluido.

*L. Graetz, *An Phys u Chem*, 25, 337 (1885).

2) Todas las propiedades del fluido son constantes.
3) La temperatura superficial del tubo es constante a un valor T_s, durante la transferencia de energía.

Si se analiza el sistema de la figura 20.6, podrá escribirse el perfil de la velocidad en la forma:

$$v_x = v_{máx}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \tag{8-7}$$

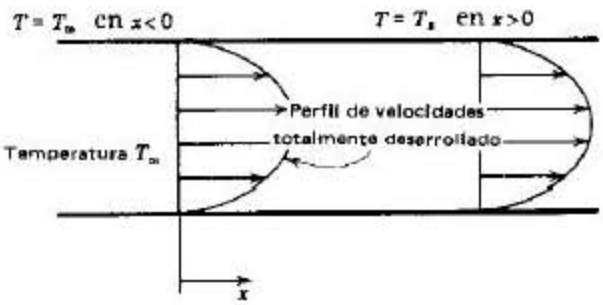


Figura 20.6 Condiciones de frontera y de flujo en la solución de Graetz.

o si se recuerda que $v_{máx} = 2\,v_{prom}$, se podrá escribir:

$$v_x = 2v_{prom}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \tag{20-25}$$

La forma aplicable de la ecuación de energía escrita en coordenadas cilíndricas, suponiendo que la simetría es radial, y despreciando el término $\partial^2 T/\partial_x{}^2$ (conducción axial) en comparación con la variación radial de temperatura es

$$v_x\frac{\partial T}{\partial x} = \alpha\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)\right] \tag{20-26}$$

Cuando se sustituye el valor de v_x la ecuación (20-25) en la (20-26), se obtiene:

$$2v_{avg}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]\frac{\partial T}{\partial x} = \alpha\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)\right] \tag{20-27}$$

que es la ecuación que se va a resolver, con las siguientes condiciones de frontera:

$$T = T_e \qquad \text{at } x = 0 \quad \text{for} \quad 0 \le r \le R$$

$$T = T_s \qquad \text{at } x > 0, \qquad r = R$$

y

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \qquad \text{at } x > 0, \qquad r = 0$$

La solución a la ecuación (20-27) toma la forma:

$$\frac{T-T_e}{T_s-T_e}=\sum_{n=0}^{\infty} c_n f\left(\frac{r}{R}\right)\exp\left[-\beta_n{}^2\frac{\alpha}{Rv_{\text{av}_R}}\frac{x}{R}\right] \qquad (20\text{-}28)$$

Los términos c_n, $f(r/R)$ y β_n son coeficientes que deberán evaluarse usando las condiciones apropiadas de fontera.

El argumento de la exclusión exponencial de β_n, esto es, $(\alpha/Rv_{\text{prom}})\,(x/R)$, puede reescribirse en la forma:

$$\frac{4}{(2Rv_{\text{prom}}/\alpha)\,(2R/x)}=\frac{4}{(Dv_{\text{prom}}\rho/\mu)(c_p\mu/k)(D/x)}$$

o, en términos de los parámetros adimensionales ya introducidos:

$$\frac{4}{\text{Re Pr}\,D/x}=\frac{4x/D}{\text{Pe}}$$

El producto de Re y Pr a menudo se designa como *número de Peclet*, Pe. Otro de los parámetros encontrados en la convección laminar forzada es el *número de Graetz*, Gz, definido así:

$$\text{Gz}\equiv\frac{\pi}{4}\frac{D}{x}\text{Pe}$$

En la literatura pueden encontrarse soluciones detalladas a la ecuación (20-28) y Knudsen y Katz* las resumen muy bien. La figura 20.7 presenta gráficamente los resultados de la solución de Graetz de frontera en la pared:

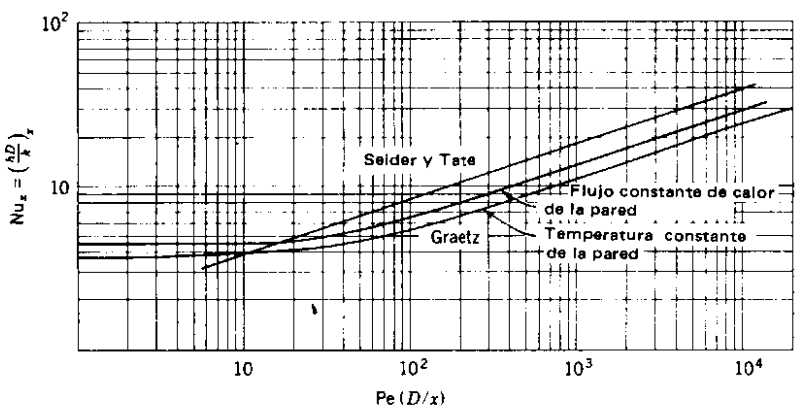


Figura 20.7 Variación del número local de Nusselt correspondiente al flujo laminar en tuberías.

*J. G. Knudsen y D. L. Katz, *Fluid Dynamics and Heat Transfer*, McGraw Hill Book Company, Nueva York, 1958, pág. 370.

(1) temperatura constante de la pared (2) entrada uniforme del calor en la misma.

Seider y Tate* relacionaron los datos experimentales obtenidos en el flujo laminar dentro de un tubo, por medio de la ecuación:

$$\mathrm{Nu}_D = 1.86\left(\mathrm{Pe}\frac{D}{L}\right)^{1/3}\left(\frac{\mu_b}{\mu_w}\right)^{0.14} \tag{20-29}$$

La relación de Seider-Tate también aparece en la figura 20.7 junto con los dos resultados de Graetz. Estos resultados no pueden compararse directamente ya que los resultados de Graetz dan valores locales de h_x y la ecuación de Seider-Tate da valores medios del coeficiente de transferencia de calor. La última parte de la ecuación (20-29), o sea, la razón de la viscosidad a la temperatura global media aritmética a la de la temperatura de la pared, toma en cuenta el efecto significativo que tiene la viscosidad de fluido variable sobre la rapidez de transferencia de calor. Todas las propiedades diferentes de μ_w se calculan a la temperatura global del fluido.

Flujo Turbulento. Al estudiar el intercambio de energía entre la superficie de un conducto y un fluido en flujo turbulento, deben usarse las relaciones de datos experimentales, tal como lo indica el análisis dimensional. Las tres ecuaciones más usadas, de esta naturaleza y las restricciones que existen para su uso son las siguientes:

Diltus y Boelter† propusieron la siguiente ecuación del tipo surgerido anteriormente por el análisis dimensional, ecuación (19-7):

$$\mathrm{Nu}_D = 0.023\,\mathrm{Re}_D^{0.8}\,\mathrm{Pr}^n \tag{20-30}$$

donde:

1) $n = 0.4$ si se está calentando el fluido,
   $n = 0.3$ si se está enfriando;
2) todas las propiedades del fluido se evalúan a la temperatura global mediante aritmética;
3) el valor de Re debe ser $>10^4$;
4) Pr está dentro de los valores $0.7<\mathrm{Pr}<100$,
5) y $L/D>60$.

Colburn‡ propuso una ecuación que utiliza el número de Stanton, St, en lugar de Nu_D, tal como aparece en la ecuación (19-9). Su ecuación es la siguiente:

$$\mathrm{St} = 0.023\,\mathrm{Re}_D^{-0.2}\,\mathrm{Pr}^{2/3} \tag{20-31}$$

*E. N. Seider y G. E. Tate, *Ind. Eng. Chem.*, 28, 1429 (1936).
† F. W. Dittus y L. M. K. boelter, University of California, *Publ. en Ing.*, 2, 443 (1930).
‡ A. P. Colburn, *Trans A. I. CH. E.* 29, 174 (1933).

donde

1) Re y Pr se evalúan a la temperatura de la *película* y St a la temperatura global;
2) Re Pr y L/D deben tomar valores dentro de los límites:

$$\mathrm{Re}_D > 10^4 \qquad 0.7 < \mathrm{Pr} < 160 \qquad \text{y} \qquad L/D > 60$$

Para explicar los fluidos con números altos de Prandt, tales como los aceites, Seider y Tate* propusieron la ecuación:

$$\mathrm{St} = 0.023\,\mathrm{Re}_D^{-0.2}\,\mathrm{Pr}^{-2/3}\left(\frac{\mu_b}{\mu_w}\right)^{0.14} \tag{20-32}$$

donde

1) Todas las propiedades de los fluidos excepto μ_w se calculan a la temperatura global;
2) $\mathrm{Re}_D > 10^4$;
3) $0.7 < \mathrm{Pr} < 17000$

y

4) $L/D > 60$

De las tres ecuaciones presentadas, las primeras dos son las más usadas en los fluidos cuyos números de Prandtl se encuentran dentro de los valores especificados. La ecuación de Dittus-Boelter es más difícil de usar que la de Colburn debido a la evaluación de las propiedades del fluido a la temperatura global.

Los siguientes ejemplos ilustran el uso de algunas expresiones presentadas en esta sección.

EJEMPLO 2

Un fluido hidráulico (MIL-M-5606), con un perfil de velocidad totalmente desarrollado fluye a través de un tubo de cobre de 2 ft de longitud que tiene un diámetro de 1 in DI, a una velocidad promedio de 10 fpm. El aceite entra a 70 °F. Se condensa el vapor en la superficie externa del tubo; el coeficiente asociado de transferencia de calor es de 2000 Btu/h ft^2 °F. Encuéntrese la rapidez de transferencia de calor al aceite.

Para usar una temperatura de película o una temperatura global promedio en la evaluación de las propiedades del fluido, se debe conocer la temperatura de salida. La ecuación (19-61) será útil para efectuar este cálculo.

$$\ln\frac{T_t - T_s}{T_0 - T_s} + 4\frac{L}{D}\frac{h}{\rho v c_p} = 0 \tag{19-61}$$

*E. N. Seider y G. E. Tate, *Ind. Eng. Chem.*, 28, 1429 (1936).

La rapidez de transferencia de calor puede obtenerse, de modo aproximado, en la siguiente forma, despreciando la resistencia del tubo de cobre:

$$q = \frac{A_{sup}\,\Delta T}{1/h_i + 1/h_o} = \rho A v c_p (T_L - T_0)$$

Para determinar el tipo de flujo debe evaluarse Re; se supone una temperatura global del aceite de 100° F,

$$\mathrm{Re}_D = \frac{Dv}{\nu} = \frac{(\frac{1}{12}\ \mathrm{ft})(\frac{10}{60}\ \mathrm{fps})}{10.7\times10^{-5}\ \mathrm{ft^2/s}} = 130$$

y el flujo está dentro de los valores laminares. El coeficiente de la película, h_i, se puede determinar a partir de la ecuación (20-29) en la forma siguiente:

$$h_i = \frac{k}{D}\mathrm{Nu}_D = \frac{k}{D}1.86\left(\mathrm{Pe}\frac{D}{L}\right)^{0.33}\left(\frac{\mu_b}{\mu_w}\right)^{0.14}$$

Como primera aproximación, supondremos que $T_{\text{global}} = 100°\mathrm{F}$ y $T_{\text{pared}} = 210°\mathrm{F}$. Se sustituyen, ahora, los valores apropiados de la tabla 20.1 a estas temperaturas y se obtiene:

$$h_i = \left(\frac{0.0690}{\frac{1}{12}}\ \frac{\mathrm{Btu/hr\ ft\ °F}}{\mathrm{ft}}\right)(1.86)\left[(130)(136)\frac{\frac{1}{12}}{2}\right]^{0.33}\left[\frac{556}{250}\right]^{0.14}$$

$$= 15.56\ \mathrm{Btu/hr\ ft^2\ °F} \qquad (88.4\ \mathrm{W/m^2\cdot K})$$

y sustituyendo esta valor de h en la ecuación (19-61),

$$\ln\frac{T_s - T_L}{T_s - T_0} + \left(\frac{4\times2}{\frac{1}{12}}\right)\frac{15.56\ \mathrm{Btu/hr\ ft^2\ °F}}{(52)\times\frac{1}{6}\times0.467\times3600} = 0$$

se obtiene,

$$\frac{T_s - T_L}{T_s - T_0} = e^{-0.102} = 0.903$$

ó

$$T_L = 210 - 0.903(140) = 83.6°\mathrm{F} \qquad (302\ \mathrm{K})$$

Por lo tanto la temperatura global promedio es:

$$\frac{70 + 83.6}{2} = 76.8°\mathrm{F} \qquad (298\ \mathrm{K})$$

El cálculo de h_i, con esta temperatura, da como resultado:

$$h_i = 12.38\ \mathrm{Btu/hr\ ft^2\ °F}$$

$$T_f = 81°\mathrm{F} \qquad T_b = 75.5°\mathrm{F}$$

Esta concordancia es suficiente, con este valor de h_i la rapidez de flujo de calor es:

$$q = (52.4\ \text{lb}_m/\text{ft}^3)\left(\frac{\pi}{4}\times\frac{1}{144}\ \text{ft}^2\right)(10\times 60\ \text{ft/hr})(0.443\ \text{Btu/lb}_m\ ^\circ\text{F})(11^\circ\text{F})$$

$$= 836\ \text{Btu/hr} \qquad (245\ \text{W})$$

EJEMPLO 3

Entra aire a 1 atmósfera u a 60° F en un tubo cuyo diámetro inferior es 1/2 in DI, con una velocidad de 80 fps. La pared se mantiene a una temperatura constante de 210° F, por medio de la condensación de vapor. Encuéntrese el coeficiente de transferencia convectiva de calor en esta situación si el tubo tiene 5 ft de longitud.

Igual que en el ejemplo 2, será necesario calcular la temperatura de salida del fluido por medio de la ecuación:

$$\ln\frac{T_L - T_s}{T_0 - T_s} + 4\frac{L}{D}\frac{h}{\rho v c_p} = 0 \qquad (19\text{-}61)$$

Otra expresión que deberá satisfacerse es:

$$q = hA_s(T_s - T) = \rho A v c_p(T_L - T_0)$$

Si se evalúa el número de Reynolds a la entrada del tubo, se tendrá:

$$\text{Re} = \frac{Dv}{\nu} = \frac{[(\frac{1}{2})/12]\ \text{ft}(80\ \text{fps})}{0.159\times 10^{-3}\ \text{ft}^2/\text{s}} = 21\,000$$

El flujo es turbulento y Re es lo suficientemente grande como para poder usar las ecuaciones (20-30), (20-31) o (20-32).

Al usar la ecuación (20-31) y suponiendo que la temperatura de salida es de 190° F, la temperatura global media de 125° F y la temperatura de la película de 167° F, se obtiene:

$$\text{St} = \frac{h}{\rho v c_p} = 0.023\ \text{Re}^{-0.2}\ \text{Pr}^{-2/3}$$

$$= 0.023\left[\frac{(\frac{1}{24}\ \text{ft})(80\ \text{fps})(0.0764\ \text{lb}_m/\text{ft}^3)}{1.45\times 10^{-5}\ \text{lb}_m/\text{ft s}}\right]^{-0.2}(0.694)^{2/3}$$

$$= 0.023(0.1416)(1.276) = 0.00416$$

Al sustituir en la ecuación (19-61) se obtiene:

$$\frac{T_L - T_s}{T_0 - T_s} = \exp\left[-4\left(\frac{5}{\frac{1}{24}}\right)(0.00416)\right]$$

$$= \exp\{-1.99\} = 0.136$$

y

$$T_L = 210 - 0.136(150) = 189.6^\circ\text{F} \qquad (361\ \text{K})$$

Esta concordancia es excelente. El coeficiente de transferencia de calor es:

$$h = \rho v c_p(\text{St})$$

$$= (0.0764\ \text{lb}_m/\text{ft}^3)(80\ \text{fps})(0.240\ \text{Btu/lb}_m\ ^\circ\text{F})(0.00416)(3600\ \text{s/hr})$$

$$= 22.0\ \text{Btu/hr ft}^2\ ^\circ\text{F} \qquad (125\ \text{W/m}^2\cdot\text{K})$$

En el caso de flujos en conductos cortos, las correlaciones que se han presentado hasta aquí deben modificarse para explicar los perfiles de la velocidad variable y de la temperatura a lo largo del eje de flujo. Deissler* ha analizado extensamente esta región para el caso de flujo turbulento. Se pueden utilizar las ecuaciones siguientes para modificar los coeficientes de calor en los conductos en los cuales $L/D<60$:

para $2<L/D<20$,

$$\frac{h_L}{h_\infty}=1+(D/L)^{0.7} \tag{20-33}$$

y para $20<L/D<60$,

$$\frac{h_L}{h_\infty}=1+6D/L \tag{20-34}$$

Ambas expresiones son aproximaciones que relacionan el coeficiente apropiado, h_L, en términos de h_∞, donde h_∞ es el valor calculado de $L/D>60$.

20.3 CONVECCION FORZADA EN EL FLUJO EXTERNO

En la práctica existen numerosas situaciones en las que uno está interesado en analizar o describir la transferencia de calor asociada con el flujo de un fluido alrededor de la superficie exterior de un sólido. La esfera y el cilindro son las figuras de mayor interés para la ingeniería y con frecuencia se encuentran casos de transferencia de calor entre estas superficies y un fluido en flujo cruzado.

El lector recordará la naturaleza de los fenómenos de transferencia de momento estudiados en el capítulo 12, referentes al flujo externo. El análisis de este flujo y de la transferencia de calor en tales situaciones se complica cuando se encuentra el fenómeno de separación de la capa límite. Esta separación ocurre en los casos en los que existe un gradiente adverso de presión; tal condición predomina en la mayoría de los casos de interés en ingeniería.

Cilindros en Flujo Cruzado. Eckert y Sochngen† calcularon números locales de Nusselt en diversas posiciones sobre una superficie cilíndrica alrededor de la cual fluía una corriente de aire cuyos números de Reynolds variaban de 20 a 600. En la figura 20.8 aparecen sus resultados. Giedt‡ investigó números de Reynolds de valores mucho más altos. En la figura 20.9 pueden verse los resultados que obtuvo.

Las figuras 20.8 y 20.9 muestran una variación de Nusselt cerca del punto de estancamiento. Para números pequeños de Nusselt el coeficiente de

*R. G. Deissler, *Trad. A.S.M.E.*, 77, 1221 (1955).

†E. R. G. Eckert y E. Sochngen, *Trad A. S. M. E.*, 74, 343, (1952).

‡W. H. Giedt, *Trad A.S.M.E.*, 71, 378 (1949).

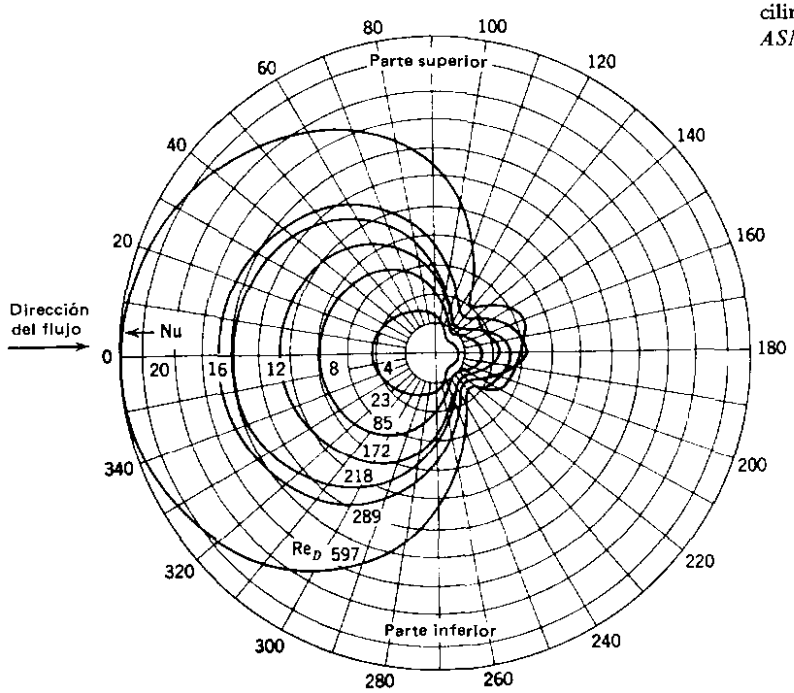
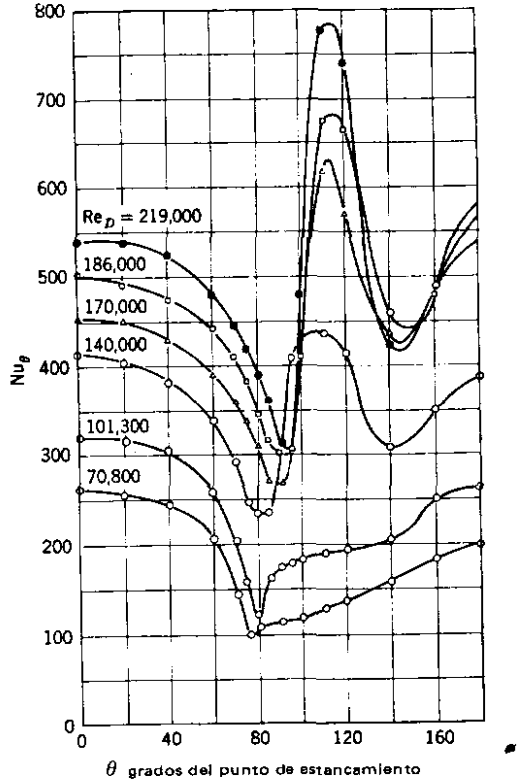


Figura 20.8 Números locales correspondientes al flujo cruzado alrededor de un cilindro circular para números pequeños de Reynolds (De E. R. G. Eckert y E. Soehngen, *Trans A.S.M.E.*, 74, 346 (1952), con licencia de los editores.

Figura 20.9 Números locales de Reynolds para flujo cruzado alrededor de un cilindro circular a números de Re elevados. (de W. H. Giedt, *Trans ASME*, 71, 378 (1949), con licencia de los editores).



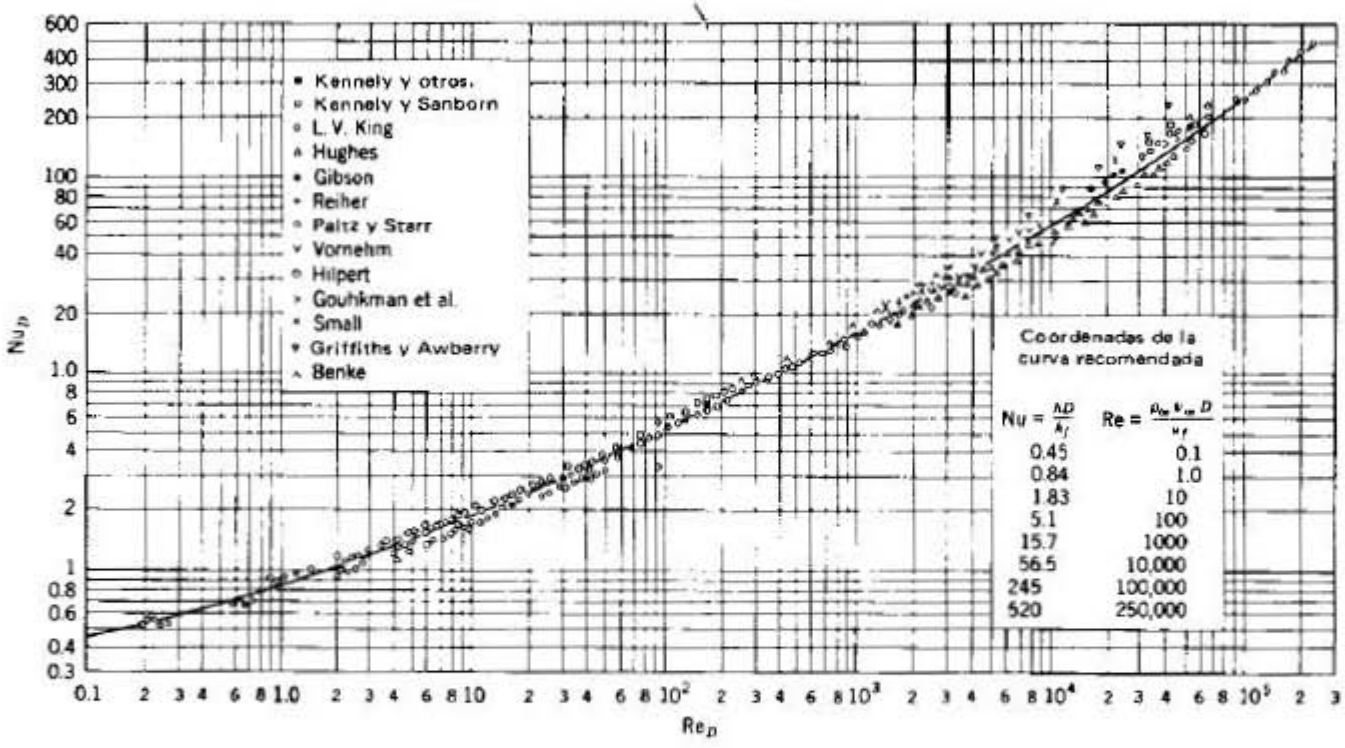


Figura 20.10 Gráfica de Nu contra Re en un flujo normal a cilindros sencillos (De W. H. McAdams, *Heat Transmission*, Tercera Edición, McGraw Hill Book Company, New York, 1954, pág. 259).

la película disminuye casi continuamente desde el punto de estancamiento, la única excepción es un ligero aumento de la región de estela separada del cilindro. Para números grandes de Reynolds, como puede verse en la figura 20.8, el coeficiente de la película alcanza un segundo máximo, que es mayor que el valor alcanzado en el punto de estancamiento. El segundo máximo del número de Nusselt en números grandes de Reynolds se debe al hecho de que la capa límite sufre una transición de flujo laminar a turbulento. En las curvas inferiores de la figura 20.8 la capa laminar límite se separa del cilindro cerca de 80° del punto de estancamiento y no ocurre ningún cambio grande en el número de Nusselt. El efecto de los números de Reynolds más grandes es doble. Primero, el punto de separación se mueve más allá de los 90° cuando la capa límite se transforma en turbulenta, por lo cual una parte menor del cilindro queda envuelta en la estela. El segundo efecto es que el número de Nusselt alcanza un valor más alto que el valor en el punto de estancamiento. El aumento se debe a la mayor conductancia de la capa límite turbulenta.

Es evidente, a juzgar por las figuras, que el coeficiente de transferencia convectiva de calor varía de una manera irregular y compleja en un flujo externo alrededor de un cilindro. En muchas ocasiones se desea en la práctica una h promedio para todo el cilindro, McAdams* hizo una gráfica correspondiente a 13 investigaciones diferentes del flujo de aire en dirección perpendicular a unos cilindros sencillos y logró una concordancia excelente al graficar Nu_D contra Re_D. En la figura 20.10 aparece esta gráfica.

McAdams recomienda el uso de la correlación de estos datos por medio de ecuaciones empíricas de la forma:

$$Nu_D = B(Re)^n \tag{20-35}$$

donde las constantes B y n pueden consultarse en la tabla 20.2 para diferentes valores de números de Reynolds. Todas las propiedades físicas que se usen con la ecuación (20-35) se deben evaluar a la temperatura de la película.

Tabla 20.2 Valores de B y n que deben usarse en la ecuación (20-35)

Re_D	B	n
0.4–4	0.891	0.330
4–40	0.821	0.385
40–4000	0.615	0.466
4,000–40,000	0.174	0.618
40,000–400,000	0.0239	0.805

Douglas y Churchill† relacionaron algunos de los datos de la figura 20.10 de manera distinta. La ecuación que recomiendan usar en el caso de cilindros

*W. H. McAdams, *Heat Transmission*, Tercera Edición, McGraw Hill Book Company, Nueva York, 1949.
† M. J. Douglas y S. W. Churchill, *Chem. Engr. Prog. Symp. Ser.*, 51, 17, 57 (1956).

sencillos en flujo cruzado es:

$$Nu_D = 0.46\,Re_D^{1/2} + 0.00128\,Re_D \tag{20-36}$$

La ecuación (20-36) corresponde bien a los datos, para $Re > 500$. Hsu* sugiere el uso de la ecuación

$$Nu_D = 0.43 + 0.48\,Re^{1/2} \tag{20-37}$$

para valores de $Re < 500$.

Todos los datos y ecuaciones de relación que se estudiaron en el caso de los flujos alrededor de un cilindro en flujo cruzado se refieren al aire. En los casos en los que el fluido sea un líquido, cada uno de los resultados de Nu_D se debe multiplicar por el factor $(1.1\,Pr^{1/3})$.

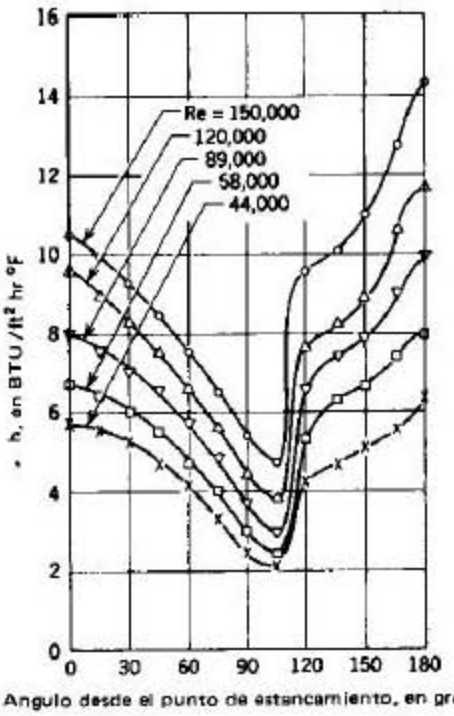


Figura 20.11 Coeficientes de transferencia local de calor en un flujo alrededor de una esfera (De J. R. Cary, Trad. ASME, 75, 485 (1953). Con licencia de los editores.

Esferas Sencillas. Los coeficientes locales de transferencia convectiva de calor en diveras posiciones en relación con el punto anterior de estancamiento en un flujo alrededor de una esfera, aparecen graficados en la figura 20.11, basados en el trabajo de Cary.†

* S. T. Hsu, *Engeneering Heat Transfer*, D. Van Nostrand Company, Inc., Princenton, N. J., 1963.
† J.R. Cary, *Trad. A.S.M.E.* 75, 483 (1953).

McAdams* graficó los datos de diversos investigadores, que relacionan a Nu_D contra Re_D para aire que fluye alrededor de esferas. En la figura 20.12 puede apreciarse la gráfica. Para una configuración tal, con aire que fluye dentro de los valores $20<Re_D<150{,}000$, se recomienda utilizar la ecuación siguiente:

$$Nu_D = 0.31\ Re_D^{0.6} \tag{20-38}$$

en la cual deberán evaluarse las propiedades del fluido a T_f. Para gases diferentes del aire, la ecuación (20-38) se modifica de esta manera:

$$Nu_D = 0.37\ Re_D^{0.6}\ Pr^{1/3} \tag{20-39}$$

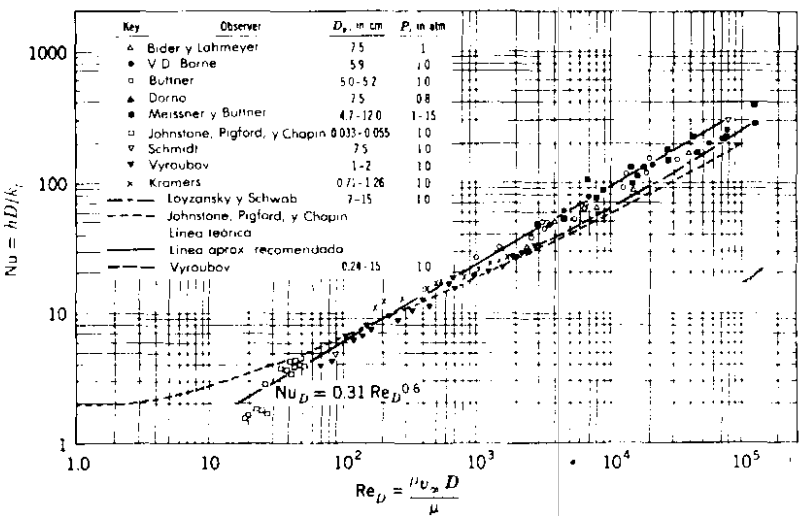


Figura 20.12 Gráfica de Nu contra Re en un flujo de aire alrededor de esferas sencillas (De McAdams, *Heat Transmission*, Tercera Edición, McGraw Hill Book Company, New York, 1954, pág. 266. Con licencia de los editores).

Para valores de Re entre 1 y 25 en un gas, se recomienda el uso de la ecuación

$$St = 2.2/Re_D + 0.48/Re_D^{1/2} \tag{20-40}$$

Si el fluido es un líquido que está entre los valores: $1<Re<70000$ la ecuación que deberá usarse es:

$$Nu_D = 2.0 + 0.60\ Re_D^{1/2}\ Pr^{1/3} \tag{20-41}$$

Cuando el número de Reynolds se acerca a cero, Nu_D se acerca al valor de 2.

* W. H. McAdams, anteriormente citado.

Bancos de Tuberías en Flujo Cruzado. Cuando se colocan varios tubos juntos en un banco o haz, como es el caso de un cambiador de calor, el coeficiente efectivo de transferencia de calor se modifica de acuerdo al arreglo y al espaciamiento, además de que los factores que ya se mencionaron al tratar de flujos alrededor de cilindros sencillos. Varios investigadores han hecho importantes contribuciones al análisis de estas configuraciones.

Como el flujo de un fluido alrededor, y a través de una tubería se relaciona con una trayectoria irregular de flujo, algunos investigadores han escogido longitudes significativas diferentes de D, que es el diámetro del tubo, para calcular números de Reynolds. Uno de estos términos es el diámetro equivalente de un banco de tubos, D_{eq}, definido así:

$$D_{eq} = \frac{4(S_L S_T - \pi D^2/4)}{\pi D} \tag{20-42}$$

donde S_L es la distancia que existe entre los centros de los tubos en la misma dirección del flujo, S_T es la distancia entre los centros de los tubos en dirección *normal* a la de flujo y D es el DE de un tubo.

Bergilin, Colburn y Hull*, estudiaron el flujo de líquidos alrededor de bancos de tubos en la región de flujo laminar con $1 < \mathrm{Re} < 1{,}000$. Sus resultados se graficaron en la forma $\mathrm{St}\,\mathrm{Pr}^{2/3}(\mu_w/\mu_b)^{0.14}$ contra Re, correspondiendo a diversas configuraciones, en la figura 20.13, en la cual todas las propiedades del fluido, excepto μ_w se evaluaron a la temperatura global promedio.

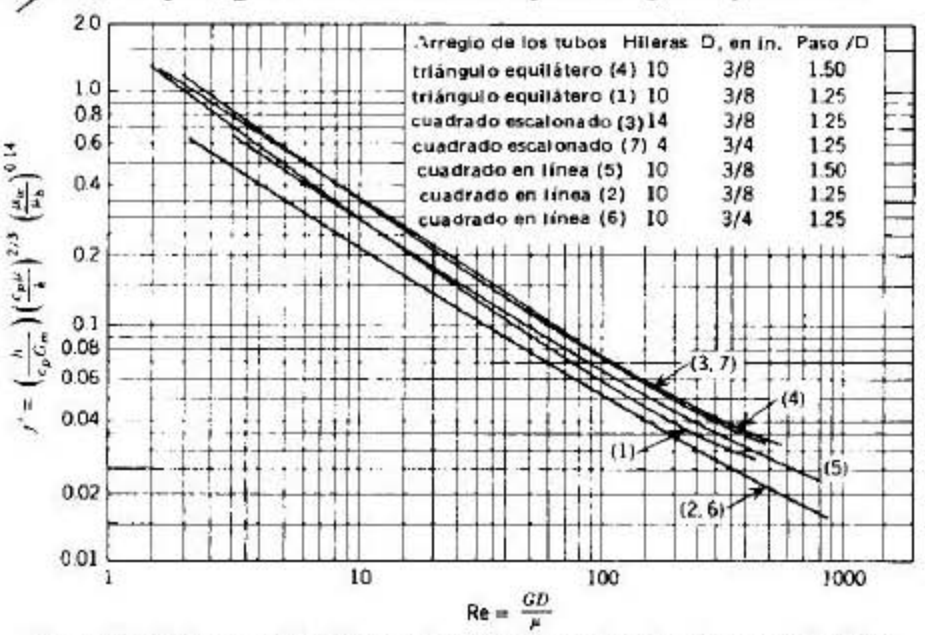


Figura 20.13 Intercambio de transferencia convectiva de calor entre líquidos en flujo laminar y bancos de tubos (De O. P. Bergelin y H. L. Hull, Univ. of Delaware, Engr. Dept, Station Bulletin 10.2, 1950, pág. 8. Con licencia de los editores).

*O. P. Bergelin, A. P. Colburn y H. L. Hull, Delaware Eng. Expt. Sta. Bulletin, No. 2 (1950).

Para líquidos en flujo de transición a través de bancos de tubos, Bergilin, Brown y Doberstein* ampliaron el trabajo antes mencionado, a cinco de los arreglos de tubos, para que incluyeran valores de Re hasta de 10^4. Sus resultados pueden verse, tanto los correspondientes a la transferencia de energía como los de factor de fricción contra Re, en la figura 20.14.

Además del aumento de valores del número de Reynolds, la figura 20.14 incluye el cálculo de Re, usando el diámetro del tubo, D, en contraposición con la figura 20.13, en la cual se usó D_{eq}, definida por medio de la ecuación (20-42).

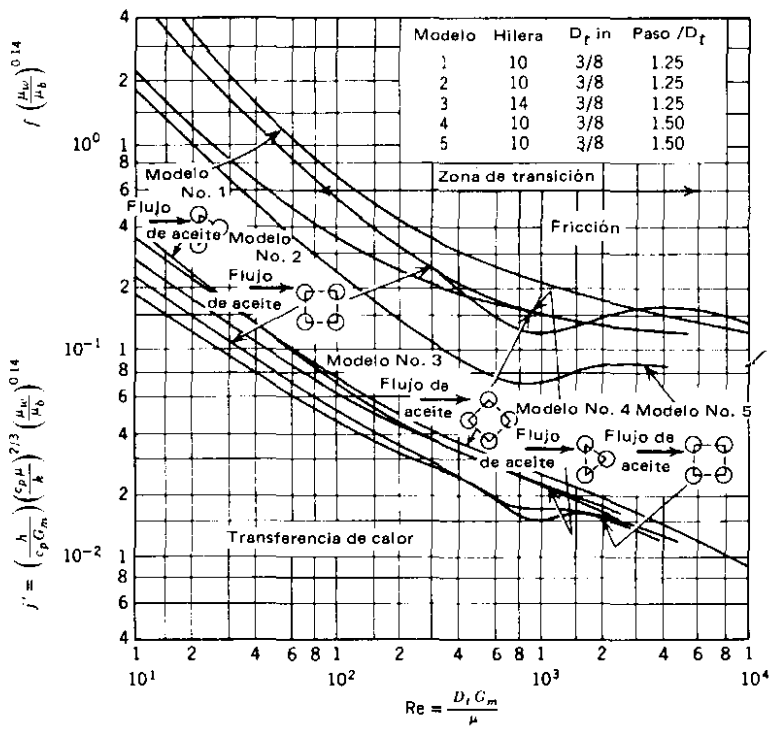


Figura 20.14 Transferencia de energía y pérdida debida a la fricción, en líquidos en flujo de transición alrededor de bancos de tubos (De O. P. Bergelin, G. A. Brown y S. C. Doberstein, *Trad. A.S.M.E.*, 74 1958 (1952). Con licencia de los editores.

Otro trabajo que se relaciona con el flujo de gases alrededor de bancos de tubos, es el realizado por Kays y London†, en tanto en Cess y Grosh‡ estudiaron el flujo externo de metales líquidos alrededor de bancos de tubos.

* O. P. Bergelin, G. A. Brown y S. C. Doberstein, *Trad A.S.M.E.* 74, 953 (1952).

† W. M. Kays y A. L. London, *Compact Heat Exchangers*, McGraw Hill Book Company, Nueva York, 1958.

‡ R. D. Cess y R. J. Grosh, *Trad A.S.M.E.*, 80, 667 y 677 (1958).

20.4 TRANSFERENCIA DE CALOR EN EL PUNTO DE ESTANCAMIENTO

En el punto de estancamiento, el campo de flujo es laminar y la capa límite relativamente delgada. Como el flujo es laminar, se pueden obtener las soluciones analíticas correspondientes al coeficiente de la película; cuando la capa límite es delgada, el coeficiente de la película es muy grande. La variación del número de Nusselt relativo a cilindros y esferas se puede observar en las figuras 20.8, 20.9 y 20.11. Estas figuras muestran que el coeficiente de transferencia convectiva de calor es máximo en el punto de estancamiento en el flujo laminar. Cuando el flujo se transforma en turbulento, el coeficiente de la película alcanza un valor mayor que en el punto de estancamiento. En ambos casos, sin embargo, el coeficiente de la película en el punto de estancamiento es representativo del valor máximo. El modelo analítico simple que se presenta a continuación indica la relación del coeficiente de la película en el punto de estancamiento a la geometría del punto de estancamiento.

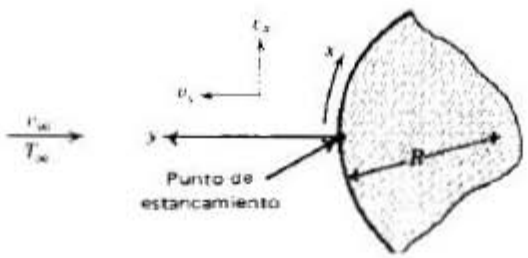


Figura 20.15 Geometría del punto de estancamiento.

La figura 20.15 muestra un punto bidimensional de estancamiento así como el sistema de coordenadas usado para describir los campos de temperatura y velocidad próximos al punto de estancamiento. A lo largo de la línea de corriente de estancamiento, la ecuación de la energía se transforma en:

$$v_y \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{20-43}$$

porque $v_x = 0$ y $\partial^2 T/\partial x^2$ es mucho menor de $\partial^2 T/\partial y^2$. Esta ecuación se puede integrar una vez para resultar:

$$\ln \frac{dT}{dy} = \int_0^y \frac{v_y}{\alpha} dy + \ln C_1 \tag{20-44}$$

y otra vez, dando como resultado:

$$T = C_2 + \int_0^y C_1 \exp\left\{\int_0^y \frac{v_y}{\alpha} d\xi\right\} dy$$

ó

$$T - T_w = C_1 \int_0^y \exp\left\{\int_0^y \frac{v_\xi}{\alpha} d\xi\right\} dy \tag{20-45}$$

donde ξ es una variable ficticia.

A partir de la ecuación (20-44) puede observarse que C_1 es el valor de la derivada de la temperatura en la pared. Así pues, haciendo la integración de $y = 0$ al borde de la capa térmica límite, $y \to \infty$, se puede reordenar la ecuación (20-45) para producir el resultado siguiente:

$$\left.\frac{dT}{dy}\right|_{y=0} = \frac{T_\infty - T_w}{\displaystyle\int_0^\infty \exp\left\{\int_0^y \frac{v_\xi}{\alpha} d\xi\right\} dy}$$

El coeficiente, h de la película, en el punto de estancamiento, está dado por

$$-k\left.\frac{dT}{dy}\right|_{y=0} = h(T_w - T_\infty)$$

y, por lo tanto:

$$h = \frac{k}{\displaystyle\int_0^\infty \exp\left\{\int_0^y \frac{v_\xi}{\alpha} d\xi\right\} dy} \tag{20-46}$$

Para poder mostrar el efecto del campo de flujo en el coeficiente de la película, se puede escribir la ecuación de continuidad y la ecuación del momento en la dirección de x:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \tag{12-10}$$

y

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = v_{x\delta} \frac{dv_{x\delta}}{dx} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \tag{12-9}$$

donde $v_{x\delta}$ es la velocidad en la dirección de x, de la capa límite, Estas ecuaciones indican que v_y depende la viscosidad cinemática, ν y del campo de velocidades de flujo no viscoso fuera de la capa límite. Dando un paso más adelante, se notará que $v_{x\delta}$ y $dv_{x\delta}/dx$ deben depender de v_∞ y de alguna dimensión característica del cuerpo, obtenida a partir de consideraciones dimensionales. La dimensión más notable correspondiente al cuerpo es el radio R en el punto de estancamiento. De ahí que la velocidad $v_{x\delta}$ es función de $\beta(v_\infty/R)$, donde β depende de la geometría. Como $v_{x\delta}(x) = v_{x\delta}(-x)$, se de-

duce que $v_{x\delta}$ debe ser la forma $v_{x_\delta} = x\beta(v_\infty/R)$ cerca de la línea de corriente de estancamiento. Por lo tanto, la velocidad v_y, se determina a partir de la relación implícita

$$F\left(v_y, \frac{\beta v_x}{R}, \nu, y\right) = 0$$

que al aplicar el análisis dimensional se transforma en:

$$F_1\left(\frac{v_y}{\sqrt{\beta v_\infty \nu / R}}, y\sqrt{\frac{\beta v_x}{R\nu}}\right) = 0$$

ó

$$\frac{v_y}{\sqrt{\beta v_\infty \nu / R}} = f\left(y\sqrt{\frac{\beta v_x}{R\nu}}\right) \tag{20-47}$$

Ahora puede integrarse la ecuación (20-46) con conocimiento de la función $f(y\sqrt{\beta v_x/R\nu})$. La integral $\int (v_\xi/\alpha)\, d\xi$ se puede expresar en la forma:

$$\int_0^x \frac{v_\xi}{\alpha} d\xi = \sqrt{\frac{\beta v_x \nu}{R}} \frac{1}{\alpha} \int_0^{y\sqrt{\beta v_x/R\nu}} \frac{f(\eta)\, d\eta}{\sqrt{\beta v_\infty / R\nu}}$$

donde

$$\eta = \xi\sqrt{\frac{\beta v_x}{R\nu}}$$

Por lo tanto:

$$\int_0^x \frac{v_\xi}{\alpha} d\xi = \frac{\nu}{\alpha} \int_0^{y\sqrt{\beta v_x/R\nu}} f(\eta)\, d\eta = \mathrm{Pr} \int_0^{y/R\sqrt{\mathrm{Re}_\beta}} f(\eta)\, d\eta$$

donde $\mathrm{Re}_\beta = \beta v_\infty R/\nu$. El número de Nusselt basado en el radio de curvatura en el punto de estancamiento es, entonces:

$$\mathrm{Nu}_R = \frac{hR}{k} = \left\{\int_0^x \exp\left[\mathrm{Pr}\int_0^{y/R\sqrt{\mathrm{Re}_\beta}} f(\eta)\, d\eta\right] d\left(\frac{y}{R}\right)\right\}^{-1}$$

o, haciendo un cambio de variables: $\lambda = (y/R)\sqrt{\mathrm{Re}_\beta}$, se obtiene:

$$\mathrm{Nu}_R = \frac{\sqrt{\mathrm{Re}_\beta}}{\displaystyle\int_0^\lambda \exp\left\{\mathrm{Pr}\int_0^\lambda f(\eta)\, d\eta\right\} d\lambda}$$

donde la integral del denominador es función del número de Prandtl. El número de Nusselt correspondiente al punto de estancamiento, se convierte en:

$$\mathrm{Nu}_R = \sqrt{\mathrm{Re}_\beta}\,\phi(\mathrm{Pr}) \tag{20-48}$$

El número de Reynolds Re_β se puede expresar en términos del número de Reynolds de corriente libre, $\mathrm{Re}_R \equiv v_\infty R/\nu$, factorizando la β en tanto que la dependencia* del número de Prandtl se puede representar, aproximadamente, por medio de $C(\mathrm{Pr})^n$, de manera que:

$$\frac{\mathrm{Nu}_R}{\sqrt{\mathrm{Re}_R}} = \sqrt{\beta}C(\mathrm{Pr})^n \tag{20-49}$$

En un punto bidimensional de estancamiento, entre los valores de 0.5 a 10, $\phi(\mathrm{Pr}) = 0.57\,(\mathrm{Pr})^{0.4}$ y, por lo tanto,

$$\frac{\mathrm{Nu}_R}{\mathrm{Pr}^{0.4}\sqrt{\mathrm{Re}_R}} = 0.57\sqrt{\beta} \tag{20-50}$$

En el caso de un cuerpo de revolución, la constante es 0.76 y, por lo tanto:

$$\frac{\mathrm{Nu}_R}{\mathrm{Pr}^{0.4}\sqrt{\mathrm{Re}_R}} = 0.76\sqrt{\beta} \tag{20-51}$$

Las derivadas de la velocidad en un flujo no viscoso, para diferentes geometrías, aparecen en la tabla 20.3.

Tabla 20.3 Derivadas de la velocidad en el punto de estancamiento correspondientes a diversas geometrías

Figura	$\beta = \dfrac{R}{v_\infty}\dfrac{dv_{x_\delta}}{dx}\Big\vert_{x=0}$
Cilindro	2
Cilindro-cuerpo posterior recto	~1.85
Chorro bidimensional de grosor $2R$ chocando sobre una placa plana	$\pi/8$
Esfera	1.5
Hemisferio del cilindro	~1.40
Tubo de Pitot en forma de fuente de diámetro $2R$	2
Chorro tridimensional de radio R que choca sobre una placa plana	~0.44

La relación del coeficiente de la película en el punto de estancamiento al radio de curvatura en el punto de estancamiento puede verse en las ecuaciones (20-50) y (20-51). Si se desprecia la influencia de β, que es muy pequeña, podrá

*W. M. Kays, *Convective Heat and Mass Transfer*, McGraw Hill Book Company, Nueva York, 1966.

observarse que el coeficiente de la película h, varía de acuerdo con $1/R^{1/2}$ y, por lo tanto, la rapidez de calor también varía de acuerdo con esta relación. Los diseños de los vehículos de regreso de los programas Mercurio, Géminis y Apolo han tenido, todos ellos, radios en el punto de estancamiento, mayores que el radio del vehículo; este tipo de diseño reduce considerablemente la rapidez de calentamiento.

20.5 CONCLUSION

Muchas de las relaciones más útiles que se han obtenido experimentalmente para la predicción de los coeficientes de transferencia convectiva de calor se han presentado en este capítulo. Las gráficas y ecuaciones que se incluyen, son una pequeña fracción de la información que está disponible en la literatura. La información de este capítulo permitirá al estudiante predecir con cierta confianza los coeficientes de transferencia convectiva de calor más comunes.

Los fenómenos de convección estudiados son los siguientes:

Convección Natural alrededor de superficies verticales y horizontales, además de algunas expresiones simplificadas para el caso del aire;
Convección Forzada en el Flujo Interno, incluyendo relaciones entre flujo laminar y turbulento.
Convección Forzada en el Flujo Externo, siendo las superficies estudiadas: cilindros, esferas y bancos de tubos.

Se recuerda al lector que observe las consideraciones específicas relacionadas con las ecuaciones y gráficas de este capítulo. Tales consideraciones incluyen las siguientes: si se deben calcular las propiedades del fluido a la temperatura global o a la de la película, cuál es la longitud significativa que se utiliza en una relación dada y cuál es el conjunto de valores de los números de Prandtl y Reynolds para un conjunto dado de datos.

PROBLEMAS

20.1 Un calentador de inmersión de 750 W, de forma cilíndrica, con un diámetro de 3/4 in y 6 in de longitud se coloca en agua estancada a 95° F. Calcule la temperatura superficial del calentador, si está orientado con su eje:
a) vertical
b) horizontal

20.2 Repita el problema 20.1 si el líquido estancado es:
a) Bismuto a 700° F.
b) Fluido hidráulico a 0° F.

20.3 Un calentador de inmersión cuya potencia nominal es de 1,000 W, tiene forma de sólido rectangular y sus dimensiones son: 16 cm por 10 cm por 1 cm. Determine la temperatura superficial del calentador si está orientado, en agua a 295 K, con:
a) el lado de 16 cm vertical,
b) el lado de 10 cm vertical.

20.4 Un cilindro de cobre de 2 in de diámetro y 6 in de longitud, a una temperatura de 200° F se sumerge verticalmente dentro de un gran tanque de agua a 50° F.
a) ¿Cuánto tiempo tardará la superficie exterior del cilindro en llegar a los 100° F?
b) ¿Cuál será la temperatura superficial cuando la central sea de 100° F? Puede despreciarse la transferencia de calor de los extremos del cilindro.

20.5 Se modelan pelotas de hule hasta tener esferas y se vulcanizan a 360 K. Después de esta operación se permite que se enfríen a la temperatura ambiente. ¿Qué tiempo transcurrirá para que la temperatura superficial de una bola de hule sólido alcance los 320 K si el aire circundante se encuentra a 295 K? Suponga pelotas cuyos diámetros sean 7.5 cm, y 5 cm y 1.5 cm. Las propiedades del hule que van a utilizarse son: ($k = 0.24$ W/m · K, $\rho = 1120$ kg/m^3, $c_p = 1020$ J/kg · K).

20.6 Determine el tiempo requerido para que las pelotas de hule del problema anterior alcancen una condición tal que su centro llegue a los 320 K. ¿Cuál será entonces su temperatura superficial?

20.7 Un tubo de cobre de 1 in de diámetro y 16 BWG tiene su superficie a una temperatura sostenida de 240° F. Si este tubo está rodeado de aire inmóvil a 60° F, ¿Qué flujo de calor se logrará si el tubo está orientado:
a) horizontalmente?
b) verticalmente?
La longitud del tubo es de 10 ft.

20.8 Resuelva el problema 20.7 si el medio que circunda al tubo es agua estancada a 60° F.

20.9 Se abre la válvula de una tubería de agua caliente apenas lo suficiente para permitir un flujo de 0.06 fps. El agua se mantiene a 180° F y la pared interior de la tubería de agua caliente, de cédula 40 1/2 plg de diámetro se encuentra a 80° F. ¿Cuál será la pérdida total de calor por cada 5 ft de agua de la tubería bajo estas condiciones? ¿Cuál será la temperatura de salida del agua?

20.10 Cuando la válvula de la tubería del problema 20.9 se abre totalmente, la velocidad del agua es de 35 fps. ¿Cuál será la pérdida de calor por cada 5 ft de agua contenidos en la tubería si las temperaturas del agua y la tubería son las mismas que se especifican en el problema 20.6?

20.11 Un tanque esférico de 0.6 m de diámetro contiene oxígeno líquido a 78 K. Este tanque está cubierto con 5 cm de lana de vidrio. Determine la rapidez de aumento de calor si el tanque está rodeado por aire a 278 K. El tanque está construido de acero inoxidable de 0.32 cm de grueso.

20.12 El tanque de un reactor nuclear está formado por 30 placas rectangulares que miden 1 ft de ancho y 3 ft de altura, separados 2 1/2 in, una de la otra y está sumergido en agua a 80° F. Si la temperatura máxima permisible de la placa es de 200° F, ¿Cuál será el nivel máximo de potencia al cual puede operar el reactor?

20.13 Un colector de energía solar que mide 20 ft × 20 ft se encuentra instalando en posición horizontal sobre un techo. El flujo de energía solar incidente es de 200 Btu/h ft^2 y la temperatura superficial del colector es de 150° F. ¿Qué fracción de la energía solar incidente se pierde por convección al aire inmóvil a una temperatura de 50° F? ¿Qué efecto tendría sobre las pérdidas convectivas el hecho de que el colector estuviera entrecruzado con salientes espaciados mutuamente 1 ft?

20.14 Dadas las condiciones del problema 20.13, determine la fracción de energía solar incidente que se pierde por convección al aire circundante que se encuentra a 283 K y fluye paralelamente a la superficie del colector a una velocidad de 6.1 m/seg.

20.15 Fluye vapor a 400 psi a través de una tubería de acero de 8 in de cédula 140 con una rapidez de 10000 lb_m/h. Calcule el valor de h en la parte interior de la superficie de la tubería.

20.16 Si la tubería de vapor descrita en el problema 20.15 está sin aislamiento y rodeada por aire inmóvil a 70° F ¿Cuál será la transferencia total de calor, desde una longitud de 20 ft de tubería sin aislamiento? Suponga que la tubería sin aislamiento es una superficie negra y que el medio circundante también es negro y está a una temperatura de 70° F.

20.17 Resuelva el problema 20.16 en el caso en que la tubería está colocada de manera tal que fluye aire a 295 K, normal al eje de la tubería con una velocidad de 6.5 m/seg.

20.18 Resuelva el problema 20.16 si se coloca en el exterior de la tubería un material aislante de 3 in, cuya conductividad térmica es de 0.060 Btu/h ft ° F. Desprecie la radiación que proviene del material aislante. ¿Cuál será la temperatura de la superficie exterior del material aislante?

20.19 ¿Qué grosor debe tener el material aislante del problema 20.18 para colocarlo en la tubería de vapor del problema 20.15, de manera que la temperatura externa del material aislante no exceda los 250° F?

20.20 Si se agrega un material aislante, cuya conductividad térmica sea de 0.060 Btu/h ft ° F a la parte exterior de la tubería de vapor descrita en el problema 20.15 ¿De que grosor deberá ser este material si las pérdidas debidas a la radiación de la superficie exterior del material aislante no son mayores del 15% del total? Puede suponerse negro el medio circundante y se encuentra a 70° F. ¿Cuál será la temperatura de la superficie externa del material aislante bajo estas condiciones?

20.21 Se calienta aceite a 300 K por medio de vapor que se condensa a 372 K en la parte exterior de unos tubos de acero cuyo DI = 2.09 cm y DE =

2.67 cm. La rapidez de flujo del aceite es de 1.47×10^5 kg/seg; se utilizan seis tubos de 2.5 m de longitud cada uno.
Las propiedades del aceite que se van a emplear son las siguiente:

T, K	ρ, kg/m^3	c_p, J/kg · K	k, W/m · K	μ, Pa · seg
300	910	1.84×10^3	0.133	0.0414
310	897	1.92×10^3	0.131	0.0228
340	870	2.00×10^3	0.130	7.89×10^{-3}
370	865	2.13×10^3	0.128	3.72×10^{-3}

Determine la transferencia total de calor al aceite y su temperatura a la salida del calentador.

20.22 Resuelva el problema 20.21 si, en lugar de seis tubos, se utilizan tres, de 5 m de longitud cada uno, para calentar el aceite.

20.23 Fluye aceite a 60° F y presión atmosférica, dentro de una tubería de cobre de 1 plg de diámetro y 16 BWG, cuya superficie se mantiene a 240° F por medio de condensación de vapor. Encuentre la temperatura del aire después de pasar a través de 20 ft de tubería si su velocidad de entrada es de 40 fps.

20.24 La superficie exterior de una tubería de cobre de 1 plg de diámetro y 16 BWG, se mantiene a 240° F. Se hace pasar aire a 60° F y a la presión atmosférica alrededor de esta tubería con una velocidad de 40 fps. Determine el flujo de calor del tubo al aire si el flujo de aire es:
a) paralelo a la tubería.
b) normal al eje de la tubería.

20.25 Resuelva el problema 20.24 si el medio que fluye alrededor del tubo en convección forzada es agua a 60° F.

20.26 Resuelva el problema 20.24 si el medio que fluye alrededor del tubo en convección forzada es fluido hidráulico MIL-M-5606.

20.27 Las balas del cañón de hierro colado usadas en la guerra de 1812 se calentaban ocasionalmente para que al dispararlas contra edificios o embarcaciones, los hicieran arder. Si una de estas llamadas "balas calientes" de 15 cm de diámetro se calentara a 1300 K, ¿Cuál sería el valor del flujo de calor si se colara súbitamente en aire inmóvil a 270 K? Se pueden usar las siguientes propiedades de fierro colado:

$$k = 39.8 \text{ W/m} \cdot \text{K}$$
$$c_p = 4.8 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$$
$$\rho = 7370 \text{ kg/m}^3$$

20.28 Dada la información del problema 20.27, construya una gráfica de coeficiente convectivo de calor contra temperatura correspondiente a valores de $T_{\text{superficial}}$ entre 420 K y 1300 K. ¿Cuánto tiempo se necesi-

taría para que la temperatura superficial de una bala de cañón alcanzara una temperatura de 600 K? ¿Cuál será la temperatura de su centro en ese momento?

20.29 Resuelva el problema 20.27 con todas las condiciones excepto que la "bala caliente" ahora viaja a través de aire a 270 K con una velocidad de 150 m/seg.

20.30 Se va a calentar el aire a 25 psia, de 60 °F a 100 °F de un tubo de 3/4 in DI cuya superficie se mantiene a una temperatura constante de 120° F. ¿Cuál será la longitud requerida del tubo para una velocidad del aire de 25 fps? ¿y a 15 fps?

20.31 Se cubre un alambre de cobre de 0.5 cm de diámetro con una capa de 0.65 cm de un material aislante cuya conductividad térmica es de 0.242 W/m · K. El aire adyacente al material aislante está a 290 K. Si el alambre lleva una corriente de 400 amps, determine:

a) el coeficiente de transferencia convectiva de calor entre la superficie del aislante y el aire circundante.

b) las temperaturas en el espacio entre el material aislante y el cobre y en la superficie externa del material aislante.

La resistividad del cobre es 1.72×10^{-6} ohm-cm.

20.32 Efectúe el problema 20.31 para un conductor de aluminio del mismo tamaño (la resistividad del aluminio es de 2.83×10^{-6} ohm-cm.).

20.33 ¿Qué resultado se obtendría en el problema 20.31 si un ventilador hiciera circular aire en dirección normal al eje del conductor a una velocidad de 9 m/seg?

20.34 Se transporta aire a través de un conducto rectangular que mide 2 ft por 4 ft. El aire entra a 120 °F y fluye con una velocidad másica de 6 lb_m/seg ft^2. Si las paredes del conducto se encuentran a una temperatura de 80° F, ¿Qué cantidad de calor pierde el aire por cada pie de longitud del conducto? ¿Cuál es la disminución correspondiente de temperatura del aire por pie?

20.35 Un chorro de agua de 0.5 in a 70 fps se dirige hacia una placa de acero a 200° F. Si el agua está a 50° F, ¿cuánto tiempo tardará la superficie de la placa en llegar a 70 °F?

20.36 Compare el valor del número de Nusselt en el punto de estancamiento del cilindro circular de la figura 20.8 calculando los valores por medio de la ecuación 20.50.

21
EBULLICION Y CONDENSACION

Los procesos de transferencia de energía asociados con los fenómenos de ebullición y condensación pueden alcanzar una rapidez de transferencia de calor relativamente grande, en tanto que las diferencias de temperatura pueden ser muy pequeñas. Los fenómenos asociados con el cambio de fase entre un líquido y un vapor son más complicados y, por lo tanto, más difíciles de describir que los procesos de transferencia convectiva de calor estudiados en los capítulos anteriores. Esto se debe a que, además, tienen que tomarse en cuenta otros fenómenos tales como la tensión superficial, el calor latente de vaporización, las características de la superficie y otras propiedades de los sistemas de dos fases, que no se tomaron en cuenta anteriormente. Los procesos de ebullición y condensación se relacionan con efectos opuestos relativos al cambio de fase entre un líquido y su vapor. Estos fenómenos se estudiarán separadamente en las siguientes secciones.

21.1 EBULLICION

La transferencia de calor en la ebullición está relacionada con el cambio de fase de líquido a vapor. Se pueden lograr flujos de calor extremadamente grandes en los fenómenos de ebullición, haciendo su aplicación particularmente valiosa cuando el espacio de que se dispone para realizar una transferencia relativamente grande de energía, es muy reducido. Tal es el caso de los reactores nucleares. El advenimiento de esta aplicación ha aumentado el interés en la ebullición y la investigación que se ha concentrado en esta área en los años recientes ha aclarado mucho lo relacionado con el mecanismo y funcionamiento del fenómeno de ebullición.

Hay dos clases básicas de ebullición: Ebullición de estanque y ebullición de flujo. La primera de ellas es la que se realiza en una superficie calentada sumergida en un estanque líquido que no esté agitado. La ebullición de flujo ocurre en una corriente de fluido y la superficie en ebullición puede ser una porción del paso del fluido. El flujo de líquido y vapor asociados con la ebullición de flujo, es una clase importante de flujo en dos fases.

Regímenes de ebullición. Un alambre horizontal calentado eléctricamente y sumergido en un estanque con agua a su temperatura de saturación, es un sistema conveniente para explicar los regímenes de transferencia de calor por ebullición. Con uno de estos sistemas se asocia una gráfica de flujo de calor como la de la figura 21.2, donde aparecen las ordenadas contra la diferencia de temperatura entre la superficie calentada y el líquido saturado. Existen seis regímenes diferentes de ebullición asociados con el comportamiento que exhibe esta figura.

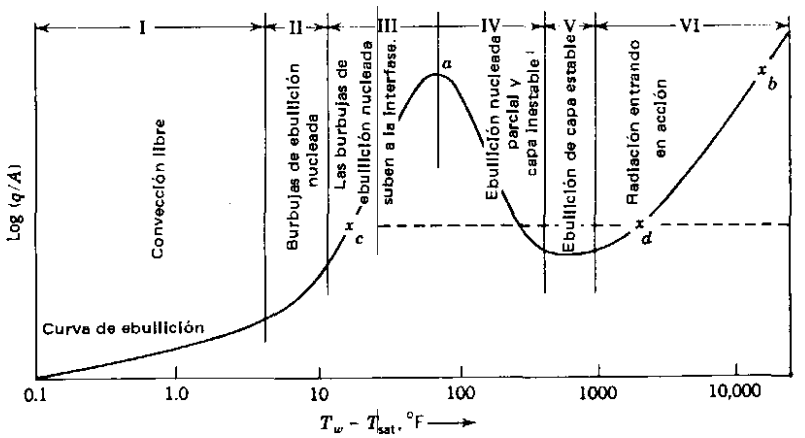


Figura 21.1 Ebullición de estanque de un alambre horizontal a presión atmosférica.

En el régimen I, la temperatura de la superficie del alambre es unos cuantos grados mayor que la del líquido saturado circundante. Las corrientes de convección natural circulan alrededor del líquido sobrecalentado y la evaporación se lleva a cabo en la superficie libre del líquido cuando éste alcanza ese punto.

El aumento de la temperatura del alambre está acompañado de la formación de burbujas de vapor sobre la superficie del alambre. Estas burbujas se forman en ciertos lugares de la superficie donde se encuentran presentes los núcleos de las burbujas de vapor, las cuales se desprenden, alejándose de la superficie del alambre, se elevan y alcanza la superficie libre.* Los regímenes II y III están asociados con la *ebullición nucleada.*

*Este es el proceso que ocurre en el régimen II. A temperaturas aún mayores del alambre, tal como en el régimen III, se forman burbujas más grandes y más numerosas que se desprenden y suben a la superficie.

Más allá del máximo de esta curva empieza el régimen de ebullición de transición. Esta es la región IV de la curva. En este régimen se forma una película de vapor alrededor del alambre y algunas porciones de esta película se desprenden y se elevan, exponiendo brevemente una parte de la superficie del alambre. Este rompimiento de la película así como su nueva formación y la naturaleza inestable de la misma es característica del régimen de transición. Cuando se encuentra presente, la película de vapor presenta una considerable resistencia a la transferencia de calor, por lo que el flujo de calor disminuye.

Cuando la temperatura de la superficie alcanza un valor aproximadamente de 400° F por encima de la del líquido saturado, la película de vapor que circunda al alambre se estabiliza. Este es el régimen V, el régimen de *ebullición de película estable*.

En temperaturas superficiales de 1000° F o mucho más altas que la del líquido saturado, la transferencia de energía radiante entra en juego y la curva de flujo calorífico se eleva una vez más. A esta región se le designa con el número VI en la figura 21.1.

La curva de la figura 21.1 se puede lograr cuando la fuente de energía es un vapor en condensación.

Sin embargo, si se usa el calentamiento por medio de electricidad, entonces probablemente no se obtendrá el régimen IV debido a que se quemará el alambre. Al aumentar el flujo de energía, ΔT aumenta en las regiones I, II y III. Cuando se sobrepasa ligeramente el valor máximo de q/A, la cantidad requerida de energía no se puede transferir por ebullición. El resultado es un aumento en ΔT acompañado de una disminución en el valor posible de q/A. Esta condición continúa hasta que se alcanza el punto c. Como ΔT es extremadamente grande en el punto c, el alambre habrá alcanzado mucho antes su punto de fusión. A menudo se hace referencia al punto a de la curva como el "punto de fusión" debido a estas razones.

Como el mecanismo de transferencia de energía está íntimamente ligado a las fuerzas boyantes, la magnitud de la intensidad de la fuerza del cuerpo modificará, tanto el mecanismo como la magnitud de la transferencia de calor por ebullición. En los vehículos espaciales se pueden observar efectos gravitacionales distintos de los normales.

Nótese el comportamiento anormal que muestra el flujo de calor asociado con la ebullición. Comúnmente se considera que un flujo es proporcional a la fuerza impulsora, por lo tanto puede esperarse que el flujo de calor aumente en forma continua al aumentar la diferencia de temperatura entre la superficie calentada y el líquido saturado. Desde luego; esto no es lo que ocurre; los flujos grandes de calor asociados con las diferencias moderadas de temperatura mucho mayores en el régimen de ebullición nucleada son mucho mayores que los flujos de calor que resultan de diferencias de temperatura mucho mayores en el régimen de ebullición de película. La razón de esto es la presencia de la película de vapor que cubre y aisla la superficie de calentamiento en el segundo caso.

Correlaciones entre los datos de transferencia de calor por ebullición. Como el comportamiento del fluido en ebullición es muy difícil de describir, no existe una solución analítica en el caso de la transferencia de calor por ebullición. Se han logrado varias correlaciones entre los datos experimentales obtenidos en los diferentes regímenes de ebullición. A continuación se proporcionan las más útiles de ellas.

En el régimen de convección natural, *régimen I* de la figura 21.1, pueden utilizarse las correlaciones que aparecen en el capítulo 20.

El *régimen II*, que es el régimen parcial de ebullición nucleada y convección natural, es una combinación de los regímenes I y III y se pueden superponer los resultados de cada uno de ellos para describir un proceso en el régimen II.

El régimen de ebullición nucleada, *régimen III*, es de gran importancia en ingeniería debido a que es posible obtener flujos muy grandes de calor mediante diferencias moderadas de temperatura. Los datos relativos a este régimen se relacionan por medio de ecuaciones de la forma:

$$\mathrm{Nu}_b = \phi(\mathrm{Re}_b, \mathrm{Pr}_L) \tag{21-1}$$

El parámetro Nu_b de la ecuación (21-1) es un número de Nusselt que se define así:

$$\mathrm{Nu}_b \equiv \frac{(q/A)D_b}{(T_s - T_{sat})k_L} \tag{21-2}$$

donde q/A es el flujo total de calor, D_b es el máximo diámetro de la burbuja cuando abandona la superficie, $T_s - T_{sat}$ es el *exceso de temperatura*, o sea, la diferencia de temperatura entre la superficie y el líquido saturado, y k_L es la conductividad térmica del líquido. La cantidad Pr_L es el número de Prandtl del líquido. El número de Reynolds, Re_b de la burbuja se define de la manera siguiente:

$$\mathrm{Re}_b \equiv \frac{D_b G_b}{\mu_L} \tag{21-3}$$

donde G_b es la velocidad promedio de la masa de vapor que abandona la superficie y μ_L es la viscosidad del líquido. El diámetro de la burbuja utilizado en las ecuaciones (21-2) y (21-3), se expresa tal como lo hizo Fritz*, en la forma:

$$D_b = C_d \beta \sqrt{2\sigma / g(\rho_L - \rho_v)} \tag{21-4}$$

donde C_L es una constante cuyo valor es 0.0148 para burbujas de H_2 y H_2O, σ es la tensión superficial del líquido, $\rho_L - \rho_v$ es la diferencia de densidad entre líquido y vapor y β es el ángulo de contacto de la burbuja, medido a través del líquido, en grados.

*W. Fritz, *Zeitschr. Physik*, 36, 379 (1935).

La velocidad de masa, G_b, se puede determinar a partir de:

$$G_b = \frac{q/A}{\rho_v h_{fg}} \rho_L \tag{21-4}$$

donde h_{fg} es el calor latente de vaporización.

Rohsenow* utilizó la ecuación (21-1) para relacionar los datos obtenidos por Adooms† en una ebullición de estanque en el caso de un alambre de platino de 0.024 in de diámetro sumergido en agua. En la figura 21.2 aparece esta correlación, la cual, en forma de ecuación, es:

$$\frac{c_{pL}(T_s - T_{sat})}{h_{fg}} = C_{sf}\left[\frac{q/A}{\mu_L h_{fg}}\sqrt{\sigma/g(\rho_L - \rho_v)}\right]^{1/3} \mathrm{Pr}_L^{1.7} \tag{21-6}$$

donde C_{pL} es la capacidad calorífica del líquido y los demás términos tienen el significado usual.

El coeficiente C_{sf} de la ecuación (21-6) varía de acuerdo con la combinación superficie-fluido. La curva de la figura 21.2 corresponde a $C_{sf} = 0.013$.

Rohsenow y Choi‖ hicieron una tabla de valores de C_{sf} correspondientes a diversas combinaciones de fluidos y superficies, la cual aparece a continuación con el nombre de Tabla 21.1.

El régimen IV, o sea el de ebullición de película inestable, no es de gran interés en ingeniería y aún no se ha encontrado ninguna relación para esta región.

La región de ebullición de película estable, *régimen V*, requiere temperaturas superficiales muy altas, así es que se tienen pocos informes de datos experimentales correspondientes a esta región.

La ebullición de película estable en la superficie de los tubos horizontales y las placas verticales ha sido estudiada analítica y experimentalmente por Bromley.‡§, analizando únicamente la conducción a lo largo de la película en un tubo horizontal, obteniendo la expresión:

$$h = 0.62\left[\frac{k_v^3 \rho_v(\rho_L - \rho_v)g(h_{fg} + 0.4\, c_{pv}\Delta T)}{D_o \mu_v (T_s - T_{sat})}\right]^{1/4} \tag{21-7}$$

donde todos los términos son conocidos, excepto D_o, que es el diámetro exterior del tubo.

Berenson* propuso una modificación para obtener una relación semejante, correspondiente a la ebullición en película estable en una superficie

*W.M. Rohsenow, *Trad. ASME*, 74, 969 (1952).

†J. N. Addoms, Tesis de D. Sc., Chemical Engeneering Department, Massachusets Institute of Technology, junio de 1948.

‖ W. M. Rohsenow y H. Y. Choi, *Heat, Mass and Momentum Transfer*, Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, N. J., 1961.

‡L. A. Bromley, *Chem. Engr. Prog.*, 46, 5, 221 (mayo, 1950).

§L. A. Bromley y asociados, *Ind. Engr. Chem*, 45, 2639 (1953).

*P. Berenson A.I.Ch. E, Trabajo No. 18, *Heat Transfer Conference*, Buffalo, N. Y., agosto 14-17, 1960.

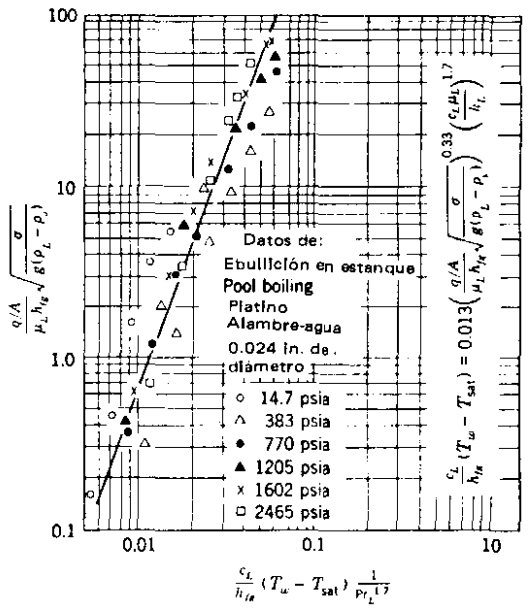


Figura 21.2 Correlación entre los datos de la ebullición de estanque (De W. M. Rohsenow y H. Choi, *Heat, Mass, and Momentum Transfer*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1961 pág. 224. Con licencia de los editores.

Tabla 21.1 Valores de C_{sf} correspondientes a la ecuación (21-6)

Combinación superficie/fluido	C_{sf}
agua/níquel	0.006
agua/platino	0.013
agua/cobre	0.013
agua/bronce	0.006
CCl_4/cobre	0.013
benceno/cromo	0.010
n-pentano/cromo	0.015
alcohol etílico/cromo	0.0027
alcohol isopropílico/cromo	0.0025
35% K_2CO_3/cobre	0.0054
50% K_2CO_3/cobre	0.0027
alcohol n-butílico/cobre	0.0030

horizontal. En la relación de Berenson, el diámetro del tubo, D_o, se reeemplaza por el término $[\sigma/g(\rho_L - \rho_v)]^{1/2}$, y la expresión de Berenson es:

$$h = 0.425\left[\frac{k_{vf}^{\ 3}\rho_{vf}(\rho_L - \rho_v)g(h_{fg} + 0.4c_{pv}\Delta T)}{\mu_{vf}(T_s - T_{sat})\sqrt{\sigma/g(\rho_L - \rho_v)}}\right]^{1/4} \qquad (21\text{-}8)$$

donde k_{vf}, ρ_{vf} y μ_{vf} se deben calcular a la temperatura de la película, tal como se indica.

Hsu y Westwater* estudiaron la ebullición en película en el caso de un tubo vertical. Sus resultados se correlacionan por medio de la ecuación:

$$h\left[\frac{\mu_v^2}{g\rho_v(\rho_L-\rho_v)k_v^3}\right]^{1/3}=0.0020\,\mathrm{Re}^{0.6} \tag{21-9}$$

$$\mathrm{Re}=\frac{4\dot{m}}{\pi D_o\mu_v} \tag{21-10}$$

siendo $\dot{m}$ la rapidez de flujo de vapor en $\mathrm{lb_m}$ /h en el extremo superior del tubo y los otros términos, idénticos a los de la ecuación (21-7). Hsu† establece que la rapidez de transferencia de calor en la ebullición en película es mayor en los tubos verticales que en los horizontales cuando las demás condiciones permanecen iguales.

En el *régimen VI*, las relaciones de ebullición en película siguen siendo válidas; sin embargo, la contribución superpuesta de la radiación es apreciable, haciéndose dominante para valores extremadamente grandes de ΔT. Las dos contribuciones pueden combinarse sin ningún flujo apreciable de líquido, tal como lo indica la ecuación (21-11), que aparece a continuación.

La contribución de la radiación al coeficiente total de transferencia de calor se puede expresar así:

$$h=h_c\left(\frac{h_c}{h}\right)^{1/2}+h_r \tag{21-11}$$

donde h_c es el coeficiente total de transferencia de calor correspondiente al fenómeno de ebullición y h_r es un coeficiente efectivo de transferencia de calor radiante, tomando en cuenta el intercambio entre dos planos paralelos entre los que se encuentra el líquido, a cuya emisividad se le asigna un valor de uno. En el capítulo 23 se estudiará este término.

Cuando existe un flujo apreciable, ya sea de líquido o de vapor, las relaciones anteriores no son satisfactorias. La descripción de la *ebullición de flujo* o *flujo de dos fases*, no se estudiará en este texto. Se sugiere al lector interesado que lea la literatura reciente para el estudio necesario de estos fenómenos. Es evidente que, en el caso de las superficies verticales o los tubos horizontales de gran diámetro, la diferencia de densidades entre líquido y vapor producirá velocidades locales importantes. Cualquier correlación que no incluye las contribuciones del flujo deberá, por lo tanto, manejarse con precaución.

*Y. Y. Hsu y J. Westwater, *A. J. Ch. E. J.*, 4, 59 (1958).
†S. T. Hsu, *Engineering Heat Transfer*, Van Nostrand, Princeton, N. J., 1963.

21.2 CONDENSACION

La condensación se realiza cuando un vapor hace contacto con una superficie que se encuentra a una temperatura inferior a la temperatura de saturación del vapor. Cuando se forma la condensación de líquido sobre la superficie, fluirá bajo el efecto de la gravedad.

Normalmente el líquido moja la superficie, se esparce y forma una película. A este proceso se le denomina *condensación en película*. Si el líquido moja la superficie, entonces se forman gotitas y éstas escurren, uniéndose al hacer contacto con otras gotas de la condensación. Este proceso se denomina *condensación en gotas*. Cuando una película de condensación se ha convertido en una condensación en película, ocurre una condensación adicional en la interfase de líquido y vapor y la transferencia asociada de energía deberá realizarse por conducción a través de la película de condensación. En la condensación en gotas, por otra parte, siempre hay una superficie presente cuando se forma la gota de condensado y escurre. Por lo tanto, la condensación en gotas está asociada con los valores más altos de la rapidez de transferencia de calor de ambos tipos de fenómenos de condensación. Es muy difícil lograr o mantener para el uso comercial, la condensación en gotas, por lo tanto todo el equipo comercial está diseñado para lograr la condensación en forma de película.

Condesación en película: el modelo de Nusselt.* En 1916, Nusselt logró un resultado analítico del problema de condensación en película de un vapor puro sobre una pared vertical. El significado de los diferentes términos de este análisis se aclarará observando la figura 21.3. En dicha figura, el grosor, δ, de la película es igual a cero en la parte superior de la pared vertical, $x = 0$ y aumenta al aumentar el valor de x.

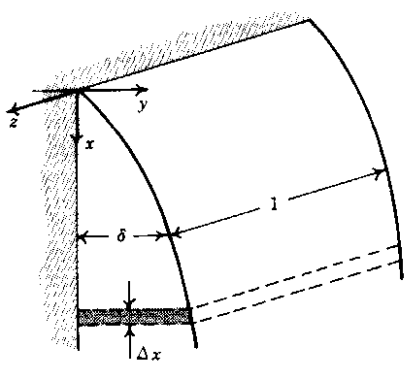


Figura 21.3 Condensación en forma de película sobre una pared vertical plana.

*W. Nusselt, *Zeitchr. d. Ver. Deutsch. Ing.*, 60, 514 (1916).

La suposición inicial de Nusselt era la de que existía un flujo completamente laminar en la película de condensación. Bajo estas condiciones se puede obtener fácilmente el perfil de la velocidad a partir de la ecuación (8-12),

$$v_x = \frac{\rho g L^2 \sin\theta}{\mu}\left[\frac{y}{L} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{L}\right)^2\right] \tag{8-12}$$

En esta aplicación, tomaremos el valor de sen $\theta = 1$ y el de $L = \delta$. También será necesario modificar la densidad. Al obtener la ecuación (8-12) se despreció la densidad del gas o vapor en la superficie líquida. Esto puede ocurrir en muchos procesos de condensación, sin embargo, el proceso puede realizarse a una presión lo suficientemente grande para que la densidad del vapor, ρ_v, sea importante en comparación con la del líquido, ρ_L. Para tomar en cuenta esta posibilidad, la función densidad que se usará en este caso será: $\rho_L - \rho_v$, en lugar de simplemente ρ_L. La expresión resultante que corresponde al perfil de la velocidad en la película de condensación a una distancia particular, x, desde la parte superior de la pared, se transforma en:

$$v_x = \frac{(\rho_L - \rho_v) g \delta^2}{\mu}\left[\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right] \tag{21-12}$$

La rapidez de flujo por unidad de ancho, Γ, correspondiente a cualquier valor, $x>0$, es:

$$\Gamma = \int_0^\delta v_x \, dy$$

$$= \frac{(\rho_L - \rho_v) g \delta^3}{3\mu} \tag{21-13}$$

A partir de esta expresión se puede calcular un cambio diferencial, $d\Gamma$, en la rapidez de flujo:

$$d\Gamma = \frac{(\rho_L - \rho_v) g \delta^2 \, d\delta}{\mu} \tag{21-14}$$

Este resultado se ha obtenido únicamente a partir de consideraciones correspondientes al momento. Ahora estudiaremos, tal como lo hizo originalmente Nusselt, la transferencia relacionada de energía.

Como el flujo de condensación se supone laminar, no es extraño que la transferencia de energía a través de la película, desde la temperatura de la interfase líquido-vapor, T_{sat}, hasta la temperatura de la frontera pared-líquido, se considere realizada puramente por conducción. Sobre esta base, el perfil de la temperatura es lineal y el flujo de calor a la pared es:

$$\frac{q_x}{A} = k\frac{(T_{sat} - T_w)}{\delta} \tag{21-15}$$

Esta misma cantidad de energía debe transferirla el vapor al condensarse y después enfriarse a la temperatura promedio del líquido. Para relacionar ambos efectos, puede escribirse:

$$\frac{q_y}{A} = k\frac{(T_{sat} - T_w)}{\delta} = \rho_L\left[h_{fg} + \frac{1}{\rho_L \Gamma}\int_0^{\delta} \rho_L v_x c_{pL}(T_{sat} - T)\, dy\right]\frac{d\Gamma}{dx}$$

la cual, si se utiliza una variación lineal de temperatura en y se transforma en:

$$\frac{q_y}{A} = \frac{k(T_{sat} - T_w)}{\delta} = \rho_L[h_{fg} + \tfrac{3}{8}c_{pL}(T_{sat} - T_w)]\frac{d\Gamma}{dx} \qquad (21\text{-}16)$$

Si se despeja $d\Gamma$ de la ecuación (21-16) se obtendrá:

$$d\Gamma = \frac{k(T_{sat} - T_w)\, dx}{\rho_L \delta[h_{fg} + \frac{3}{8}c_{pL}(T_{sat} - T_w)]} \qquad (21\text{-}17)$$

lo cual puede igualarse al resultado de la ecuación (21-14), dando como resultado:

$$\frac{(\rho_L - \rho_v)g}{\mu}\delta^2\, d\delta = \frac{k(T_{sat} - T_w)}{\rho_L \delta[h_{fg} + \frac{3}{8}c_{pL}(T_{sat} - T_w)]}dx$$

y simplificando este resultado y despejando δ, se obtiene:

$$\delta = \left[\frac{4k\mu(T_{sat} - T_w)x}{\rho_L g(\rho_L - \rho_v)[h_{fg} + \frac{3}{8}c_{pL}(T_{sat} - T_w)]}\right]^{1/4} \qquad (21\text{-}18)$$

Ahora puede despejarse el coeficiente, h, de la expresión

$$h = \frac{q_y/A}{T_{sat} - T_w} = \frac{k}{\delta}$$

La sustitución de la ecuación (21-18) en esta expresión da:

$$h_x = \left\{\frac{\rho_L g k^3(\rho_L - \rho_v)[h_{fg} + \frac{3}{8}c_{pL}(T_{sat} - T_w)]}{4\mu(T_{sat} - T_w)x}\right\}^{1/4} \qquad (21\text{-}19)$$

El coeficiente promedio de transferencia de calor en una superficie de longitud L, se determina a partir de la ecuación:

$$h = \frac{1}{L}\int_0^L h_x\, dx$$

la cual, al sustituirse en la ecuación (21-19), se transforma en:

$$h = 0.943\left\{\frac{\rho_L g k^3(\rho_L - \rho_v)[h_{fg} + \frac{3}{8}c_{pL}(T_{sat} - T_w)]}{L\mu(T_{sat} - T_w)}\right\}^{1/4} \qquad (21\text{-}20)$$

Se puede lograr una expresión semejante a la ecuación (21-20) para una superficie inclinada a un ángulo θ con respecto a la horizontal si se introduce el sen θ en el término que se encuentra dentro del paréntesis rectangular.

Rohsenow* realizó un análisis integral modificado de este mismo problema, obteniendo un resultado que solamente difiere en que el término $[h_{fg}+\frac{3}{8}c_{pl}(T_{sat}-T_w)]$ se reemplaza por $[h_{fg}+0.68c_{pl}(T_{sat}-T_w)]$. Los resultados de Rohsenow concuerdan bien con los datos experimentales obtenidos para valores de $\Pr>0.5$ y $c_{pL}(T_{sat}-T_w)/h_{fg}<1.0$.

Condensación en película: análisis de la capa límite. La película de condensación, fue analizada como capa límite por Sparrow y Gregg†. Las ecuaciones que pueden aplicarse en este método, son:

continuidad

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0 \tag{20-21}$$

momento

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}=g\left(1-\frac{\rho_v}{\rho_l}\right)+\nu_l\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \tag{20-22}$$

y *energía*

$$v_x\frac{\partial T}{\partial x}+v_y\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{k_L}{\rho_L c_{pL}}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{20-23}$$

Si se introducen las variables

$$\theta=\frac{T_{sat}-T}{T_{sat}-T_w}$$

$$\eta=\left[\frac{g(\rho_L-\rho_v)}{4\nu_L^2\rho_L}\right]^{1/4}\frac{y}{x^{1/4}}$$

y

$$F(\eta)=\frac{\psi}{4\nu_l x^{3/4}}\left[\frac{4\nu_l^2\rho_l}{g(\rho_L-\rho_v)}\right]^{1/4}$$

donde ψ es la función de corriente, se obtiene el sistema de ecuaciones

$$F'''+3FF''-2(F')^2+1=0 \tag{21-24}$$

y

$$\theta''+3\,\Pr F\theta'=0 \tag{21-25}$$

donde ambas expresiones son ecuaciones diferenciales ordinarias en la variable independiente, η.

*W. M. Rohsenow, *Trad. A.S.M.E.* **78**, 1645 (1956).
† E. M. Sparrow y J. L. Gregg, *Trad. A.S.M.E. J.*, Ht Tx, Serie C 13 (1959).

Las condiciones de frontera aplicables son:

$$F = F' = 0 \quad \theta = 1 \qquad \text{en } \eta = 0$$

y

$$F' = 0 \quad \theta = 0 \qquad \text{en } \eta = \infty$$

Sparrow y Gregg resolvieron numéricamente las ecuaciones (21-24) y (21-25). Sus resultados dieron $F(\eta)$ y $\theta(\eta)$ como funciones de Pr y $c_{pL}(T_{sat} - T_w)h_{fg}$.

El coeficiente de transferencia de calor, h, se calcula a partir de:

$$h = \frac{1}{T_{sat} - T_w} k \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}$$

o, en función de las variables reducidas:

$$\left(\frac{d\theta}{d\eta}\right)_{\eta=0} = \text{Nu} \left[\frac{4\nu^2 \rho}{g(\rho_l - \rho_v)x^3}\right]^{1/4} \tag{21-26}$$

Los resultados de Sparrow y Gregg están graficados en la figura 21.4.

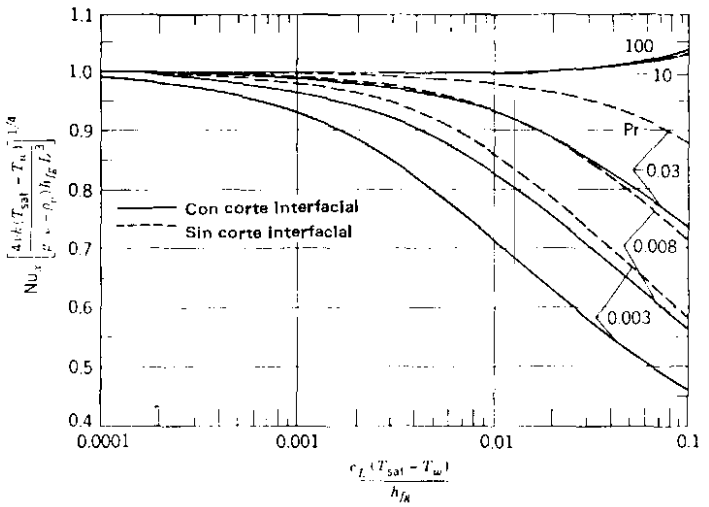


Figura 21.4 Valores de Nu_x correspondientes a la condensación sobre una placa vertical.

Rhosenow, Weber y Ling* analizaron el caso en el que el esfuerzo cortante entre el vapor ascendente y la película líquida descendente es grande. Tal situación puede presentarse en la condensación en tubos verticales o entre placas verticales. En la figura 21.4 aparecen los resultados de este análisis en líneas continuas.

*W. M. Rohsenow, J. H. Webber y A. T. Ling *Trad. A.S.M.E.*, 78, 1637, (1956).

Condensación de Película: análisis del flujo turbulento. Es lógico esperar que el flujo de la película de condensación se convierta en turbulento en las superficies relativamente largas o cuando la rapidez de condensación es grande. El criterio que se utiliza en los casos de flujos turbulentos es el de un número de Reynolds correspondiente a la capa de condensación. En función de un diámetro equivalente, el número aplicable de Reynolds es:

$$\mathrm{Re} = \frac{4A}{P}\frac{\Gamma_c}{\mu_f} \tag{21-27}$$

donde A es el área de flujo de condensación, P el perímetro mojado y Γ_c la rapidez de flujo de masa de condensación. El valor crítico de Re, en este caso, es aproximadamente de 2000.

El primer intento para analizar el caso del flujo turbulento de una película de condensación, fue realizado por Colburn*, quien usó el mismo factor j encontrado en el caso del flujo interno a través de un tubo. Con base tanto en los experimentos como en el análisis, Colburn formuló la gráfica que aparece en la figura 21.5. Los puntos que pueden verse en ella corresponden a

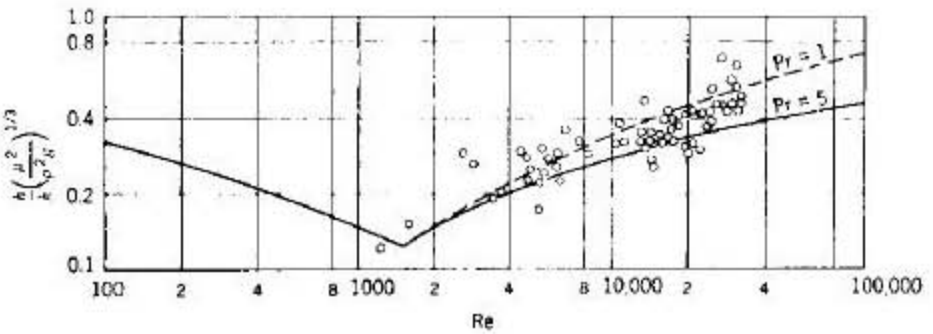


Figura 21.5 Condensación en película incluyendo las regiones de flujo, tanto laminar como turbulento.

los datos de Kirkbride.† Las ecuaciones que relacionan las dos regiones son válidas para valores de $4\,\Gamma_c/\mu_f > 2000$.

$$h_{avg} = 1.51\left(\frac{k^3\rho^2 g}{\mu^2}\right)_f^{1/3}\left(\frac{4\Gamma_c}{\mu_f}\right)^{-1/3} \tag{21-28}$$

y para valores de $4\,\Gamma_c/\mu_f < 2000$.

$$h_{avg} = 0.045\,\frac{(k^3\rho^2 g/\mu^2)_f^{1/3}(4\Gamma_c/\mu_f)\,\mathrm{Pr}^{1/3}}{[(4\Gamma_c/\mu_f)^{4/5} - 364] + 576\,\mathrm{Pr}^{1/3}} \tag{21-29}$$

*A. P. Colburn, *Ind. Eng. Chem.*, 26, 432 (1934).
†C. G. Kirkbride, *Ind. Eng. Chem.*, 26, 4 (1930).

Condensación de Película: análisis del cilindro horizontal. Nusselt* hizo un análisis que produjo la siguiente expresión que corresponde al coeficiente medio de transferencia de calor en un cilindro horizontal:

$$h_{avg} = 0.725\left\{\frac{\rho_L g(\rho_L - \rho_v)k^3[h_{fg} + \frac{3}{8}c_{pL}(T_{sat} - T_w)]}{\mu D(T_{sat} - T_w)}\right\}^{1/4} \tag{21-30}$$

La semejanza entre la ecuación (21-30), correspondiente a un tubo horizontal y la ecuación (21-20), que corresponde a un tubo vertical, es marcada. Si se combinan estas expresiones y se cancelan los términos semejantes, se obtiene:

$$\frac{h_{vert}}{h_{horiz}} = \frac{0.943}{0.725}\left(\frac{D}{L}\right)^{1/4} = 1.3\left(\frac{D}{L}\right)^{1/4} \tag{21-31}$$

En el caso en que los coeficientes de transferencia de calor son iguales, la relación entre D y L es:

$$\frac{L}{D} = 2.86 \tag{21-32}$$

o también, se pueden transferir cantidades iguales de energía desde el mismo tubo ya sea que se encuentre en posición vertical u horizontal, si la razón L/D es 2.86. Para valores de L/D mayores de 2.86 la posición horizontal posee una capacidad mayor de transferencia de calor.

Condensación en película: bancos de tubos horizontales. En un banco de tubos horizontales hay, naturalmente, un valor de h distinto para cada tubo, ya que la película de condensación de un tubo cae en el próximo que se encuentra debajo de él. Este proceso puede observarse en la figura 21.6.

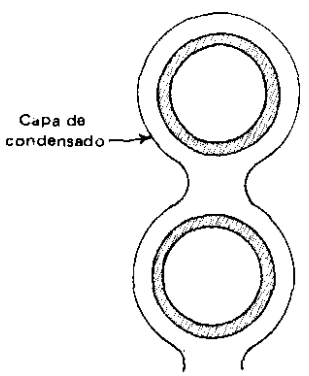


Figura 21.6 Condensación sobre un banco horizontal de tubos.

*W. Nusselt, *Zeitschr. d. Ver. deusthc. Ing.*, **60**, 569 (1916).

Nusselt también estudió esta situación en forma analítica y logró una expresión que corresponde a un banco vertical de n tubos alineados que es la siguiente:

$$h_{avg} = 0.725\left\{\frac{\rho_L g(\rho_L - \rho_v)k^3[h_{fg} + \frac{3}{8}c_{pL}(T_{sat} - T_w)]}{n\,D\mu(T_{sat} - T_w)}\right\}^{1/4} \qquad (21\text{-}33)$$

Esta ecuación produce un coeficiente medio de transferencia de calor promediado entre los n tubos.

Observando que los datos experimentales exceden a los valores predichos en la ecuación (21-33), Chen* modificó esta expresión de manera que incluyera el efecto de la condensación en la capa líquida que se encuentra en medio de los tubos. Su ecuación resultante es

$$h_{prom} = 0.725\left[1 + 0.02\frac{c_{pL}(T_{sat} - T_w)}{h_{fg}}(n-1)\right] \times \left\{\frac{\rho_L g(\rho_L - \rho_v)k^3[h_{fg} + \frac{3}{8}c_{pL}(T_{sat} - T_w)]}{n\,D\mu(T_{sat} - T_w)}\right\}^{1/4} \qquad (21\text{-}34)$$

la que es válida para valores de $c_{pL}(T_{sat} - T_w)(n-1)/h_{fg} > 2$. la ecuación de Chen concuerda razonablemente bien con datos experimentales para condensación en bancos verticales de tubos horizontales.

Condensación en gotas. La condensación en forma de gotas, como se mencionó anteriormente, se asocia con coeficientes de transferencia de calor más grandes que los del fenómeno de condensación en forma de película. Se sabe muy poco acerca del mecanismo de condensación en forma de gotas, sólo que para que ocurra, la superficie no debe ser mojada por la condensación. Normalmente esto requiere se traten las superficies metálidas de manera especial.

Es posible que la condensación en forma de gota, se pueda realizar en la práctica cuando se le conozca mejor, pudiendo así tomar ventaja de los grandes coeficientes de transferencia de calor asociados con ella. Por el momento no poseemos este conocimiento, de manera que la condensación en película sigue siendo la clase de condensación predominante y para la cual *siempre* se hacen los diseños.

21.3 CONCLUSION

Los fenómenos de ebullición y condensación son los que se han examinado en este capítulo. Cada uno de ellos tiene un papel relevante en la práctica de la ingeniería y ambos fenómenos son difíciles de describir en forma analítica. Se han presentado varias relaciones empíricas que corresponden a estos fenómenos en diversas superficies orientadas de diferentes maneras.

*M. M. Chen *(Trad) A.S.M.E.*, Serie C, 83, 48 (1961).

A menudo se descubre la ebullición diciendo que es de varias clases: nucleada, en película, o una combinación de ambas. En el sistema de ebullición nucleada con diferencias de temperatura relativamente pequeñas entre la superficie primaria y la temperatura de saturación del líquido son posibles valores muy altos de la rapidez de la transferencia de calor. La ebullición en película se asocia con una diferencia mayor de temperatura, pero sin embargo, con una rapidez menor de transferencia de energía. Este comportamiento anormal es característico del fenómeno de ebullición.

La condensación se clasifica en: condensación en forma de película y condensación en forma de gota. Esta última se asocia con un coeficiente de transferencia de calor mucho mayor que el de la primera, sin embargo, es difícil de lograr y mantener. Por lo tanto, la condensación en forma de película es de interés primordial. Se han presentado soluciones analíticas junto con resultados empíricos para los casos de: condensación en forma de película sobre placas verticales y horizontales así como cilindros y en bancos de cilindros horizontales.

PROBLEMAS

La tensión superficial del agua, una cantidad necesaria para resolver varios de los siguientes problemas, se relaciona con la temperatura de acuerdo con la expresión: $\sigma = 0.1232[1-0.00146T]$ donde σ está dada en N/m y T está dada en K. En el sistema inglés, σ está dada en lb_f/ft y T en °R y la tensión superficial está dada por medio de la expresión

21.1 Una placa cuadrada calentada eléctricamente y de 20 cm por lado, se sumerge verticalmente en agua a presión atmosférica. Cuando se aumenta la cantidad de energía eléctrica suministrada a la placa, su temperatura superficial se eleva por encima de la del agua saturada adyacente. A niveles bajos de potencia, el mecanismo de transferencia de calor es el de convección natural, transformándose, después, en un fenómeno de ebullición nucleada para valores grandes de ΔT. ¿Para qué valor de ΔT son iguales los flujos de calor debidos a la ebullición y a la convección natural? Grafique $q/A|_{\text{convección}}$, $q/A|_{\text{ebullición}}$ y $q/A|_{\text{total}}$ contra valores de ΔT de 250 K a 300 K.

21.2 Grafique los valores del coeficiente de transferencia de calor en el caso de la ebullición de estanque de agua sobre superficies metálicas horizontales a 1 atmósfera de presión total y con temperaturas superficiales que varían de 390 K a 450 K. Grafique para los siguientes metales: (a) níquel, (b) cobre, (c) platino, (d) bronce.

21.3 Un elemento cilíndrico de cobre, de calentamiento, de 2 ft de longitud y 1/2 in de diámetro se sumerge en agua. La presión del sistema se mantiene a 1 atmósfera y la superficie del tubo se mantiene a 280° F. Determine: el coeficiente de transferencia de calor y la rapidez de disipación de calor en este sistema.

21.4 Si el cilindro descrito en el problema 21.3 se calentara inicialmente a 500° F ¿Cuánto tiempo tardaría el centro del cilindro en enfriarse a 240° F si estuviera construido de

a) cobre?

b) bronce?

c) níquel?

21.5 Hay cuatro calentadores de inmersión de forma cilíndrica, 15 cm de longitud y 2 cm de diámetro sumergidos en un baño de agua a 1 atmósfera de presión total. Cada calentador es de 500 W. Si los calentadores operan a la capacidad marcada, calcule la temperatura de la superficie del calentador. ¿Cuál será el coeficiente de transferencia convectiva de calor en este caso?

21.6 Un cilindro horizontal circular de 1 in de diámetro tiene su superficie exterior a una temperatura de 1200° F. Este tubo se sumerge en agua saturada con una presión de 40 psi. Calcule el flujo de calor debido a la ebullición en película que puede lograrse por medio de esta configuración. A 40 psi. la temperatura del agua saturada es de 267° F.

21.7 Calcule la rapidez de transferencia de calor por pie de longitud, de un alambre de nicromo sumergido en agua a 240° F. La temperatura del alambre es de 2,200° F.

21.8 Se van a disipar dos mil watts de energía eléctrica a través de unas placas de cobre que miden 5 cm por 10 cm por 0.6 cm de grueso sumergidas en agua a 390 K. ¿Cuántas placas recomendaría usted usar? Respalde todos los criterios de diseño utilizados.

21.9 Se extrae una placa de acero de una operación de tratamiento térmico a 600 K e inmediatamente se le sumerge en un baño de agua a 373 K.

a) Construya una gráfica de flujo calorífico contra temperatura de la placa, en este sistema.

b) Construya una gráfica de coeficiente de transferencia convectiva de calor contra temperatura de la placa.

c) Grafique la temperatura de la placa contra el tiempo para una placa de acero de 3 cm de grosor y 30 cm cuadrados.

21.10 El agua que fluye en un tubo va a recibir calor en 3×10^6 Btu/h ft^2 de superficie del tubo. El tubo tiene un diámetro interior de 3/4 in y una longitud de 4 ft. Si el agua se encontrara a 212° F mientras esté dentro del tubo, ¿Cuál es la rapidez de flujo de agua que usted sugeriría para lograr una operación segura? Apoye los resultados con todos los criterios de diseño utilizados.

21.11 Hay vapor saturado, a presión atmósférica dentro de un tubo vertical de 1/2 in de diámetro, cuya superficie está a 160° F. Haga una gráfica de la cantidad de sección transversal de tubo llena de condensación contra distancia a la parte superior del tubo. ¿Qué ocurre cuando la porción de área ocupada por la condensación tiende al tamaño de la sección transversal del área del tubo?

21.12 Fluye vapor saturado, a presión atmosférica, con una rapidez de 0.042 kg./seg/m entre dos superficies verticales que se mantiene a 340 K y están separadas a un centímetro entre sí. ¿Cuál deberá ser la altura de esta configuración para que la velocidad del vapor no exceda los 15 m/seg?

21.13 La superficie inferior de una cacerola circular se mantiene a 200° F y está situada en vapor saturado a 212° F. Construya una gráfica de profundidad de concentración dentro de la cacerola contra tiempo en el que se mantiene esta situación, hasta 1 hora. Los lados de la cacerola pueden considerarse no conductores.

21.14 Se condensa vapor saturado, a 365 K, sobre un tubo de 2 cm cuya superficie se mantiene a 340 K. Determine la rapidez de condensación y el coeficiente de transferencia de calor en el caso de un tubo de 1.5 m de longitud orientado: (a) verticalmente, (b) horizontalmente.

21.15 Si se orientan ocho tubos como los descritos en el problema 21.14 en un banco vertical, ¿cuál será la transferencia de calor que tenga lugar?

21.16 Determine el coeficiente de transferencia de calor en un tubo horizontal de 5/8 in DE cuya superficie se mantenga a 100° F y que esté rodeado de vapor a 200° F.

21.17 Si se ordenan ocho tubos como los decritos en el problema 21.16 en un banco vertical y el flujo se supone laminar, determine (a) el coeficiente promedio de transferencia de calor para el banco, (b) el coeficiente de transferencia de calor en los tubos primero, segundo y octavo.

21.18 Dadas las condiciones del problema 21.16, ¿Qué altura de la pared vertical hará que la película que se encuentra en el fondo del tubo sea turbulenta?

21.19 Una superficie plana vertical de 2 ft de altura se mantiene a 60° F. Si hay amoniaco saturado a 85° F adyacente a la superficie, ¿Qué coeficiente de transferencia de calor se aplicará al proceso de condensación? ¿Cuál será la transferencia total de temperatura?

21.20 Una cacerola de forma cuadrada que mide 40 cm por lado y tiene una orilla alta en sus cuatro lados, tiene su superficie a 350 K. Si se sitúa esta cacerola en vapor saturado a 372 K, ¿cuánto tardará el vapor condensado en desbordarse por la orilla si la cacerola se coloca en forma:
a) horizontal?
b) inclinada a 10° con respecto a la horizontal?
c) inclinada a 30° con respecto a la horizontal?

21.21 Una cacerola cuadrada cuyos lados miden 1 ft y cuya orilla es perpendicular y se extiende 1 in sobre la base, está orientada con su base formando un ángulo de 20° con respecto a la horizontal. La superficie de la cacerola se mantiene a 180° F y se le sitúa en una atmósfera de vapor a 210° F. ¿Cuánto tardará el vapor condensado en desbordarse sobre la orilla de la cacerola?

22
EQUIPO PARA LA TRANSFERENCIA DE CALOR

Un aparato cuyo propósito principal es la transferencia de energía entre dos fluidos se llama *cambiador de calor*. Los cambiadores de calor por lo general se clasifican en tres categorías:

1) regeneradores
2) cambiadores de tipo abierto

y

3) cambiadores de tipo cerrado o recuperadores.

Los generadores son cambiadores en lo que fluyen, alternadamente, fluidos calientes y fríos a través del mismo espacio con la menor mezcla posible entre ambas corrientes. La cantidad de transferencia de energía depende de las propiedades del flujo y del fluido así como de la geometría y de las propiedades térmicas de la superficie. Los medios analíticos que se necesitan para manejar este tipo de cambiador de calor se han estudiado ya en los capítulos anteriores.

Los cambiadores de calor de tipo abierto son, como lo indica su nombre, aparatos donde realmente ocurre la mezcla física de las dos corrientes de fluido. Dos fluidos, uno caliente y uno frío, entran en cambiadores de calor de tipo abierto y salen como una sola corriente. La naturaleza de la corriente de salida se predice por continuidad. No se necesitan ecuaciones de rapidez para analizar este tipo de cambiador.

El tercer tipo de cambiador de calor, el recuperador, es de primordial importancia y a él se dirigirá casi toda la atención. En el recuperador las corrientes caliente y fría de fluido no entran en contacto directo entre sí sino que están separadas por la pared de un tubo o por una superficie que puede ser plana o estar curvada de alguna manera. Por lo tanto, el intercambio de energía se realiza de un fluido a una superficie, por convección; a través de la pared o

placa, por conducción y después, de la superficie al segundo fluido. Cada uno de estos procesos de transferencia de energía se ha estudiado separadamente en los capítulos anteriores. En las siguientes secciones se investigarán las condiciones bajo las cuales actúan estos procesos de triple transferencia en serie, dando como resultado un cambio continuo de temperatura, al menos en uno de los fluidos que intervienen en el proceso. Se efectuará un análisis térmico de estos cambiadores. Un diseño completo de un equipo como éste incluye un análisis de la caída de presión, usando las técnicas del capítulo 14, así como material y estudios estructurales que no están dentro del alcance de este texto.

22.1 TIPOS DE CAMBIADORES DE CALOR

Además de ser considerado un cambiador de tipo cerrado, un recuperador se clasifica de acuerdo con su configuración y el número de veces que una corriente de fluido pasa al atravesar el cambiador de calor.

Un cambiador de calor de *un solo paso* es aquél en el que cada uno de los fluidos pasa a través del cambiador una sola vez. Otros términos descriptivos identifican las direcciones de las dos corrientes: si los fluidos fluyen en la misma dirección, se utilizan los términos *flujo paralelo* o *flujo concurrente*, si fluyen en direcciones opuestas, el flujo se llama flujo de *contracorriente* o, simplemente, *contraflujo* y si ambos fluidos fluyen formando ángulos rectos, entre sí, el fluido se llamará *flujo cruzado*. Una configuración de un solo paso, bastante común, es la de la figura 22.1, de doble tubo. En la figura 22.2 aparece un arreglo de flujo cruzado.

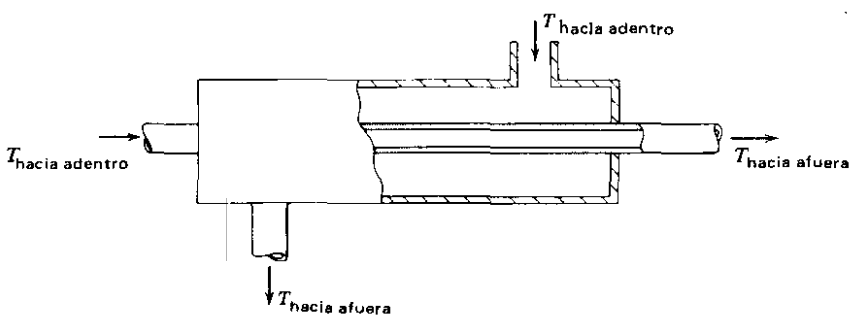


Figura 22.1 Cambiador de calor de doble tubo.

Se presentan variaciones en la configuración de flujo cruzado cuando uno, el otro, o ambos fluidos se mezclan. En el arreglo de la figura 22.2 no se mezcla ninguno de los fluidos. Si no estuvieran presentes los deflectores o partes corrugadas, las corrientes de fluido no estarían separadas, sino mezcladas. En las condiciones de la figura, el fluido que abandona el cambiador por

un extremo del arreglo en forma de emparedado, experimentará una variación no uniforme de temperatura de un lado al otro, ya que cada una de las secciones hace contacto con una corriente adyacente de fluido a diferente temperatura. Es deseable que de preferencia uno de los fluidos, o ambos, permanezcan sin mezclarse.

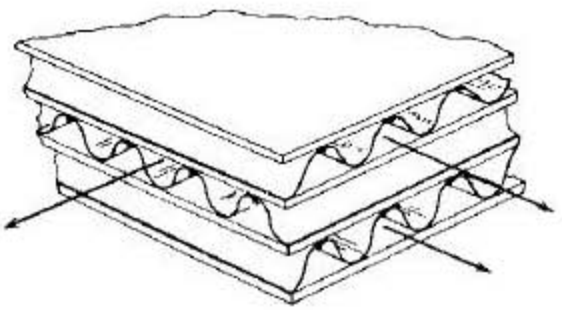


Figura 22.2 Cambiador de calor de flujo cruzado.

Para poder llevar a cabo una transferencia de energía tan grande como se pueda en el menor espacio posible, es deseable utilizar pasos múltiples de uno de los fluidos o de ambos. Una configuración muy común es la de *tubo y coraza*, que puede observarse en la figura 22.3. En dicha figura, el *fluido del lado del tubo* pasa dos veces, en tanto que el del *lado de la coraza*, pasa solamente una vez. Por medio de los deflectores se realiza un buen mezclado del fluido del *lado de la coraza*. Sin estos deflectores el fluido se estanca en ciertas partes de la coraza y se canaliza parcialmente alrededor de estas regiones estancadas o "muertas", alcanzándose, así, un desempeño que dista mucho de ser el óptimo. En numerosas aplicaciones se encuentran variaciones del número de pasos de *tubo y coraza*, pero rara vez se usan más de dos pasos del lado de la coraza.

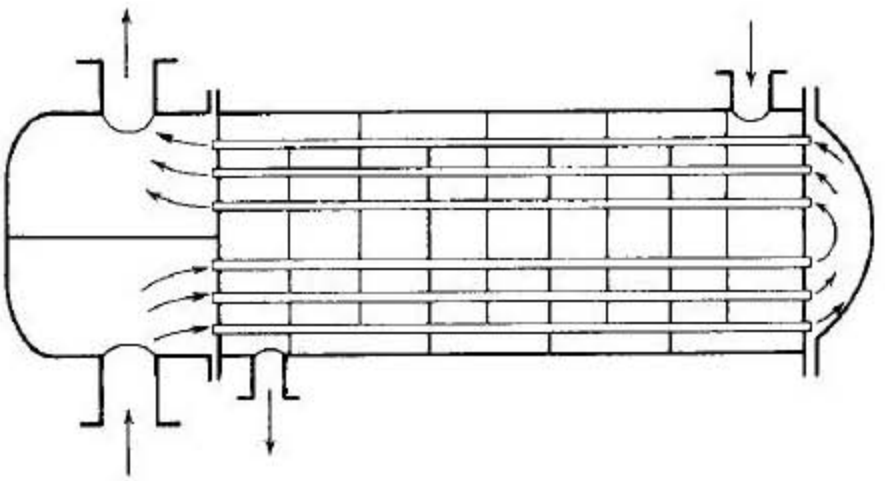


Figura 22.3 Cambiador de calor de tubo y coraza.

Algunas aplicaciones más recientes de transferencia de calor requieren de configuraciones más compactas de las que puede soportar el arreglo de *tubo y coraza*. Kays y London* han investigado y hecho informes cuidadosos y concienzudos acerca del tema de "cambiadores compactos de calor". En la figura 22.4 aparece uno de estos arreglos.

Se utiliza mucho el análisis de los cambiadores de calor: de tubo y coraza o de paso múltiple. Como cada uno de ellos es una composición de diversos arreglos, de un solo paso, se concentrará la atención, inicialmente, en el cambiador de calor de un solo paso.

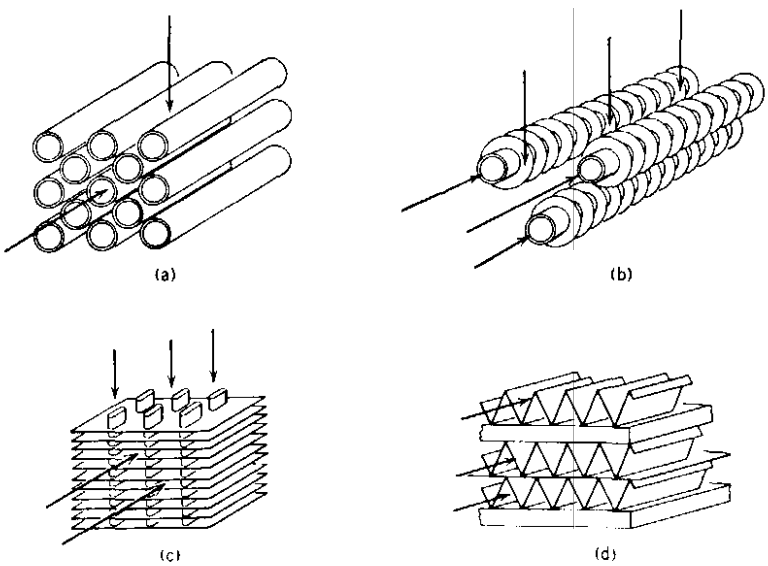


Figura 22.4 Configuraciones de cambiador compacto de calor.

22.2 ANALISIS DE CAMBIADORES DE CALOR DE UN SOLO PASO: DIFERENCIA LOGARITMICA MEDIA DE TEMPERATURA

Al estudiar los cambiadores de calor de un solo paso, paralelos o de contraflujo, es útil hacer un dibujo sencillo que muestre la variación general de temperatura que experimenta cada una de las corrientes de líquido. Hay cuatro perfiles de esta clase en esta categoría, los cuales pueden observarse en la figura 22.5. Todos ellos pueden encontrarse en arreglos de doble tubo.

*W. M. Kays y A. L. London, *Compact Heat Exchangers*, Segunda Edición, McGraw Hill Book Company, 1964.

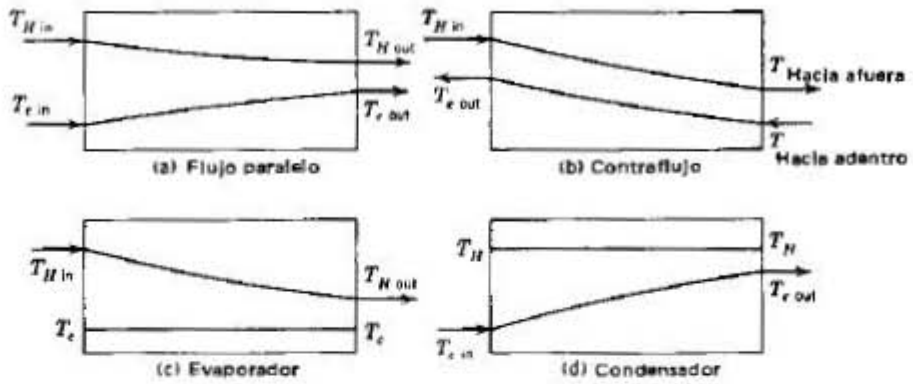


Figura 22.5 Perfiles de temperatura correspondientes a cambiadores de un solo paso y doble tubo.

En las partes (c) y (d) de la figura 22.5 uno de los dos fluidos permanece a una temperatura constante mientras intercambia calor con otro fluido cuya temperatura está variando. Esta situación se presenta cuando la transferencia de energía es el resultado de un cambio de fase y no de temperatura, como en el caso de la evaporación y condensación, que son los que se muestran en la figura. La dirección de flujo del fluido que sufre un cambio de fase no se marcó en la figura ya que no tiene importancia en este análisis. Si la situación surge donde el cambio total de fase, tal como la condensación se realiza dentro del cambiador al mismo tiempo que un subenfriamiento, el diagrama correspondiente será el de la figura 22.6. En este caso sí es importante la dirección de flujo de la corriente de condensación. Para propósitos de análisis se puede considerar este proceso como una superposición de un condensador y un cambiador de contraflujo, tal como se muestra en el diagrama.

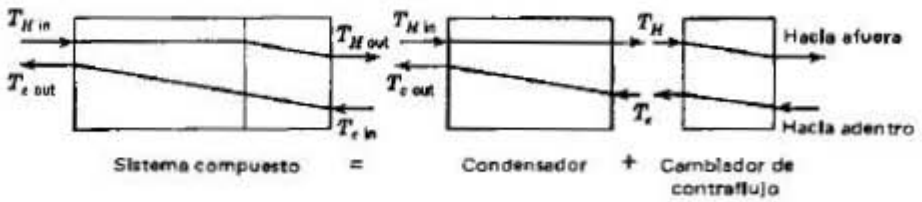


Figura 22.6 Perfil de temperatura de un condensador con subenfriamiento.

Si se observan las partes (a) y (b) de la figura 22.5 se podrá notar claramente la diferencia de perfiles de temperatura que muestran los arreglos paralelo y de contraflujo. Es obvio que las temperaturas de salida de los fluidos caliente y frío, en el caso del flujo paralelo, tienden al mismo valor. Es fácil demostrar que esta temperatura es la resultante de la mezcla de los dos fluidos en un cambiador de calor de tipo abierto.

En el arreglo de contraflujo, al flujo caliente le es posible abandonar el cambiador a una temperatura más baja que aquella a la que sale el fluido frío. Lógicamente esta situación corresponde a un caso de mayor transferencia total de energía por unidad de área de superficie de cambiador de calor, de la que se obrendría si los mismso fluidos entraran en una configuración de flujo paralelo. La conclusión evidente es que la configuración de contraflujo es la más deseable en los arreglos de un solo paso. Por lo tanto, el arreglo de contraflujo de un solo paso, es aquél al que debe dirigirse la atención.

En la figura 22.7 aparecen el diagrama y la nomenclatura a los que se hará referencia en el siguiente análisis detallado del cambiador de calor de contraflujo de un solo paso.

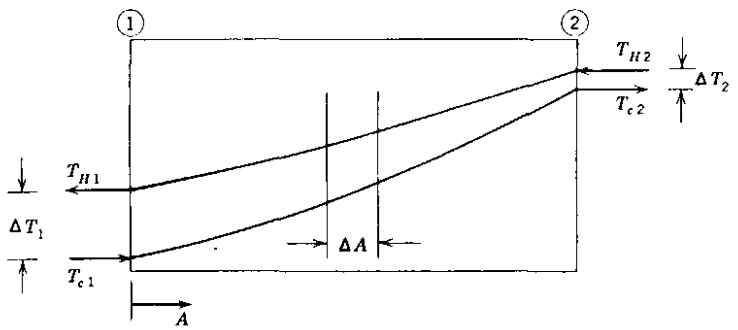


Figura 22.7 Diagrama de temperatura contra área de contacto correspondiente al análisis de contraflujo de un solo paso.

La abscisa de esta figura es el área. En un arreglo de doble tubo, el área de transferencia de calor varía linealmente con la distancia de un extremo del cambiador. En el caso que aparece en la figura, el cero corresponde al extremo del cambiador por el que entra el fluido caliente.

Respecto a un incremento general de área, ΔA, entre los extremos de esta unidad, un análisis de la primera ley de la termodinámica de ambas corrientes de fluido, producirá los siguientes resultados:

$$\Delta q = (\dot{m}c_p)_c \Delta T_c$$

y

$$\Delta q = (\dot{m}c_p)_H \Delta T_H$$

Cuando el área incrementada tiende al tamaño diferencial, se puede escribir

$$dq = (\dot{m}c_p)_c \, dT_c = C_c \, dT_c \tag{22-1}$$

y

$$dq = (\dot{m}c_p)_H \, dT_H = C_H \, dT_H \tag{22-2}$$

donde el coeficiente de capacidad, C, se introduce en lugar del producto $\dot{m}c_p$, que es mucho más difícil de manejar.

Se escribirá, ahora, la ecuación (15-17), correspondiente a la transferencia de energía entre los dos fluidos, en este lugar:

$$dq = U\,dA(T_H - T_c) \tag{22-3}$$

la cual utiliza el coeficiente total de transferencia de calor U_D que se introdujo en el capítulo 15. Si llamamos ΔT a la diferencia $T_H - T_C$, tendremos:

$$d(\Delta T) = dT_H - dT_c \tag{22-4}$$

y si se sustituyen los valores de dT_H y dT_C, de las ecuaciones (22-1) y (22-2), se obtendrá:

$$d(\Delta T) = dq\left(\frac{1}{C_H} - \frac{1}{C_c}\right) = \frac{dq}{C_H}\left(1 - \frac{C_H}{C_c}\right) \tag{22-5}$$

También deberá notarse que dq es igual en todas estas expresiones, por lo tanto pueden igualarse las ecuaciones (22-1) y (22-2) y se las puede integrar de uno a otro extremo del cambiador, obteniéndose la razón C_H/C_C,

$$\frac{C_H}{C_c} = \frac{T_{c2} - T_{c1}}{T_{H2} - T_{H1}} \tag{22-6}$$

que puede sustituirse en la ecuación (22-5) y reacomodarse en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} d(\Delta T) &= \frac{dq}{C_H}\left(1 - \frac{T_{c2} - T_{c1}}{T_{H2} - T_{H1}}\right) = \frac{dq}{C_H}\left(\frac{T_{H2} - T_{H1} - T_{c2} + T_{c1}}{T_{H2} - T_{H1}}\right) \\ &= \frac{dq}{C_H}\left(\frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{T_{H2} - T_{H1}}\right) \end{aligned} \tag{22-7}$$

Si se combinan las ecuaciones (22-3) y (22-7) y se hace notar que $C_H(T_{H2} - T_{H1}) = q$ se tendrá el siguiente valor de la constante U:

$$\int_{\Delta T_1}^{\Delta T_2} \frac{d(\Delta T)}{\Delta T} = \frac{U}{q}(\Delta T_2 - \Delta T_1)\int_0^A dA \tag{22-8}$$

que, después de su integración, se transforma en:

$$\ln\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} = \frac{UA}{q}(\Delta T_2 - \Delta T_1)$$

Por lo general este resultado se escribe de la siguiente manera:

$$q = UA\frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln\dfrac{\Delta T_2}{\Delta T_1}} \tag{22-9}$$

La fuerza impulsora que aparece del lado derecho de la ecuación (22-9) es un tipo particular de diferencia de temperaturas medias entre ambas corrientes de fluido. Esta razón: $(\Delta T_2 - \Delta T_1)/\ln(\Delta T_2/\Delta T_1)$ se denomina ΔT_{lm}, o sea *diferencia logarítmica media de temperatura*, y la expresión correspondiente a q se escribe, simplemente, así:

$$q = UA\,\Delta T_{lm} \tag{22-10}$$

Aunque la ecuación (22-10) se obtuvo para el caso específico del contraflujo, es igualmente válida en cualquiera de las operaciones de un solo paso que aparece en la figura 22.5.

Ya anteriormente se mencionó, pero vale la pena repetirlo, que la ecuación (22-10) se basa en un valor constante del coeficiente total de transferencia de calor, U. En general, este coeficiente no permanecerá constante; sin embargo, los cálculos basados en un valor intermedio de U, entre los extremos del cambiador, son lo suficientemente exactos. Si existe una variación considerable de U entre ambos extremos, entonces se hace necesaria una integración numérica, paso a paso, calculándose repetidamente las ecuaciones (22-1), (22-2) y (22-3) en un número de pequeños incrementos de área.

También es posible que las diferencias de temperatura de la ecuación (22-9), que se calculen en cualquiera de los extremos del cambiador de contraflujo, sean iguales. En tal caso la diferencia logarítmica media de temperaturas es indeterminada, esto es:

$$\frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln(\Delta T_2/\Delta T_1)} = \frac{0}{0}, \qquad \text{if } \Delta T_1 = \Delta T_2$$

en cuyo caso puede aplicarse la regla de L'Hôpital, en la siguiente forma:

$$\lim_{\Delta T_2 \to \Delta T_1} \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln(\Delta T_2/\Delta T_1)} = \lim_{\Delta T_2/\Delta T_1 \to 1} \left[\frac{\Delta T_1\{(\Delta T_2/\Delta T_1) - 1\}}{\ln(\Delta T_2/\Delta T_1)}\right]$$

y cuando la razón $\Delta T_2/\Delta T_1$ se sustituye por F, puede escribirse:

$$= \lim_{F \to 1} \Delta T\left(\frac{F-1}{\ln F}\right)$$

Si se diferencian el numerador y el denominador con respecto a F, se obtiene:

$$\lim_{\Delta T_2 \to \Delta T_1} \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln(\Delta T_2/\Delta T_1)} = \Delta T$$

o puede usarse la ecuación (22-10) en su forma simple:

$$q = UA\,\Delta T \tag{22-11}$$

A partir del análisis anterior, debe hacerse obvio que la ecuación (22-11) puede usarse y obtener una exactitud razonable en tanto que ΔT_1 y ΔT_2 no sean muy diferentes. Resulta que una media artimética simple está dentro del 1% de la diferencia logarítmica media de temperatura, para valores de $(\Delta T_2 / \Delta T_1) < 1.5$.

EJEMPLO 1

Se enfría un aceite lubricante ligero (c_p = 2090 J/kg · K), permitiéndole intercambiar energía con el agua, en un cambiador pequeño de calor. El aceite entra y sale del cambiador a 375 K y 350 K, respectivamente, y fluye con una rapidez de 0.5 kg/seg. Hay agua a 280°K en cantidad suficiente para permitir el uso de 0.201 kg/seg para propósitos de en-

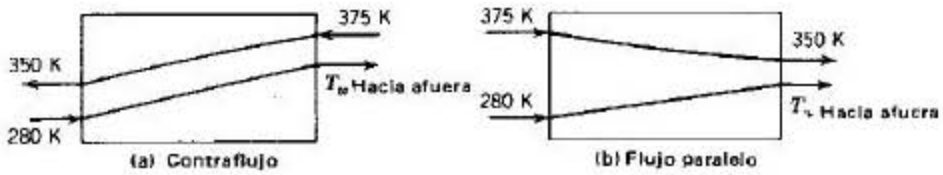


Figura 22.8 Perfiles de temperatura de un solo paso correspondientes al contraflujo y al flujo paralelo.

friamiento. Determínese el área de transferencia de calor requerida en el caso de: (a) contraflujo y (b) operación de flujo paralelo (ver figura 22.8). El valor del coeficiente total de transferencia de calor puede tomarse igual a 250 W/m^2 · K.

La temperatura de salida del agua se determina aplicando las ecuaciones (22-1) y (22-2).

$$q = (0.5\ \text{kg/s})(2090\ \text{J/kg} \cdot \text{K})(25\ \text{K}) = 26\,125\ \text{W}$$
$$= (0.201\ \text{kg/s})(4177\ \text{J/kg} \cdot \text{K})(T_{w\,out} - 280\ \text{K})$$

de las que se obtiene:

$$T_{w\,out} = 280 + \frac{(0.201)(2090)(25)}{(0.5)(4177)} = 311.1\ \text{K} \qquad (100°\text{F})$$

Este resultado es válido tanto para flujos paralelos como para contraflujos. En la configuración de contraflujo, ΔT_{lm} se calcula de la manera siguiente:

$$\Delta T_{lm} = \frac{70 - 63.9}{\ln \dfrac{70}{63.9}} = 66.9\ \text{K} \qquad (120.4°\text{F})$$

y aplicando la ecuación (22-10) puede observarse que el área requerida para realizar esta transferencia de energía es:

$$A = \frac{26\,125\ \text{W}}{(250\ \text{W/m}^2 \cdot \text{K})(66.9\ \text{K})} = 1.562\ \text{m}^2 \qquad (16.81\ \text{ft}^2)$$

Si se realizan cálculos semejantes que correspondan a la situación de flujo paralelo, se obtiene:

$$\Delta T_{lm} = \frac{95 - 38.9}{\ln \dfrac{95}{38.9}} = 62.8\ \text{K} \qquad (113°\text{F})$$

$$A = \frac{26\,125\ \text{W}}{(250\ \text{W/m}^2 \cdot \text{K})(62.8\ \text{K})} = 1.66\ \text{m}^2 \qquad (17.9\ \text{ft}^2)$$

El área que se requiere para transferir 26,125 W es menor, en un 7%, aproximadamente, en un arreglo de contraflujo.

22.3 ANALISIS DE CAMBIADORES DE CALOR DE CONTRAFLUJO Y DE TUBO Y CORAZA

Los arreglos de flujo más complejos que los estudiados en la secciones anteriores, son mucho más difíciles de tratar analíticamente. Los factores de corrección que van a usarse con la ecuación (22-10) han sido presentados por Bowman, Mueller y Nagle,* así como por la Tubular Exchanger Manufacturing Association† en forma de tabla. Las figuras 22.9 y 22.10, muestran factores de corrección correspondientes a seis tipos de configuración de cambiadores de calor. Los primeros tres son para diferentes configuraciones de tubo y coraza y las últimas tres para diferentes condiciones de flujo cruzado.

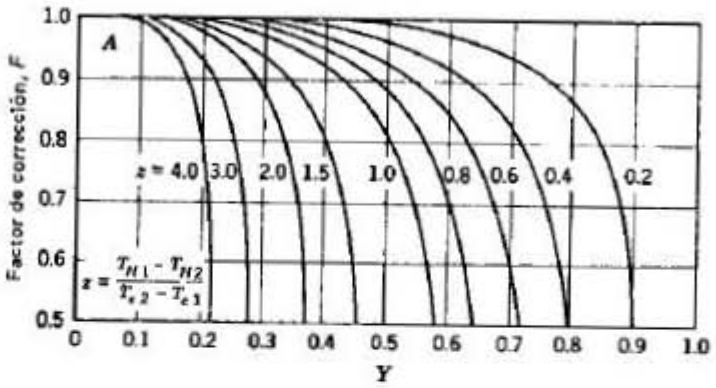
Los parámetros de las figuras 22.9 y 22.10 se calculan como sigue:

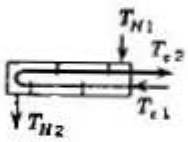
$$Y = \frac{T_{t\,\text{sal}} - T_{t\,\text{en}}}{T_{s\,\text{en}} - T_{t\,\text{en}}} \qquad (22\text{-}12)$$

$$Z = \frac{(\dot{m}c_p)_{\text{tubo}}}{(\dot{m}c_p)_{\text{coraza}}} = \frac{C_t}{C_s} = \frac{T_{s\,\text{en}} - T_{s\,\text{sal}}}{T_{t\,\text{sal}} - T_{t\,\text{en}}} \qquad (22\text{-}13)$$

donde los subíndices s y t se refieren a los fluidos que están del lado de la coraza y del lado del tubo, respectivamente. La cantidad que se lee en la ordenada de cada gráfica, para valores dados en Y y Z, es F, o sea, el factor de corrección que debe aplicarse a la ecuación (22-10) y, por lo tanto, estas configuraciones más complicadas se pueden manejar en la misma forma que el

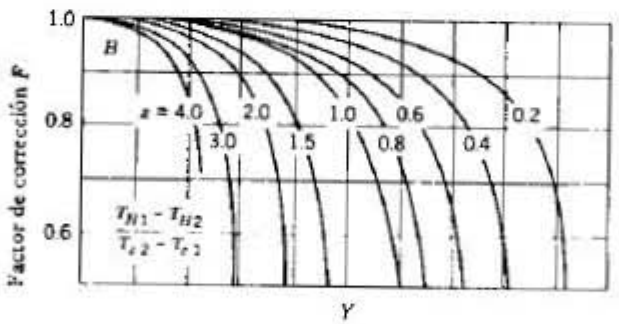
*R. A. Bowman, A. C. Mueller y W. M. Nagle, *Trans. A.S.M.E.*, 62, 283 (1940).
† Tubular Exchanger Manufacturers Association, Standars, TEMA, Tercera Edición, Nueva York, 1952.

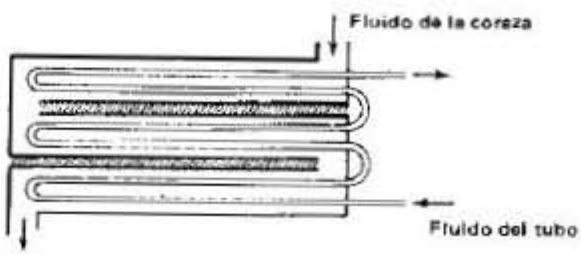




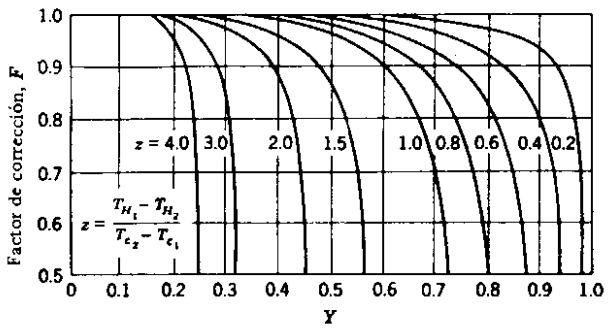
Gráfica de factores de corrección para cambiador con un paso de coraza y dos, cuatro o cualquier múltiplo, de pasos de tubo

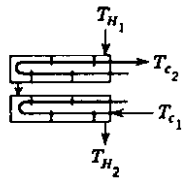
(a)





(b)





Gráfica de factores de corrección para cambiador con dos pasos de corozas y cuatro, ocho o cualquier múltiple de cuatro pasos de tubo

(c)

Figura 22.9 Factores de corrección correspondientes a las configuraciones de tres cambiadores de calor y tubo y coraza. (a) Un paso en la coraza y dos o múltiplo de dos en el tubo. (b) Un paso en la coraza y tres o múltiplo de tres en el tubo. (c) Dos pasos en la coraza y dos o múltiplo de dos en el tubo (de R. A. Bowman, A. C. Mueller y W. M. Nagle, *Trans. A.S.M.E.*, 62, 284, 285 (1940). Con licencia de los editores). Factores de corrección, F, basados en un contraflujo L. M. T. D.

caso de doble tubo de un solo paso. Se hace notar al lector que debe tener cuidado de aplicar la ecuación (22-10), usando el factor como en la ecuación (22-14).

$$q = UA(F\,\Delta T_{lm}) \tag{22-14}$$

calculando la diferencia logarítmica media de temperatura en base al contraflujo.

La forma de usar las figuras 22.9 y 22.10, puede simplificarse mediante la solución del siguiente problema.

EJEMPLO 2

En la transferencia de energía aceite-agua, descrita en el ejemplo 1, compárese el resultado obtenido con el que se obtendría si el cambiador de calor fuera:

a) de flujo cruzado, mezclado con agua.
b) de tubo y coraza con cuatro pasos del lado del tubo, siendo aceite el fluido que se encuentra del lado del tubo.

Debe usarse la figura 22.10b para el inciso (a). Los parámetros que se necesitan para usar esta figura son:

$$Y=\frac{T_{tsal}-T_{tent}}{T_{tent}-T_{tent}}=\frac{25}{95}=0.263$$

y

$$Z=\frac{T_{tent}-T_{tsal}}{T_{tsal}-T_{tent}}=\frac{31.1}{25}=1.244$$

y, usando la figura, se ve que: $F = 0.96$. El área requerida para el inciso (a) es, por lo tanto, igual a $(1.562)/(0.96) = 1.63\ m^2$.

Los valores de Y y Z obtenidos anteriormente son los mismos que en el inciso (b), obteniéndose un valor de $F = 0.97$. El área del inciso (b), se transforma en:

$$(1.562)/(0.97) = 1.61\ m^2.$$

22.4 EL METODO DE NUMERO DE UNIDADES DE TRANSFERENCIA (NUT) DE ANALISIS Y DISEÑO DE CAMBIADORES DE CALOR

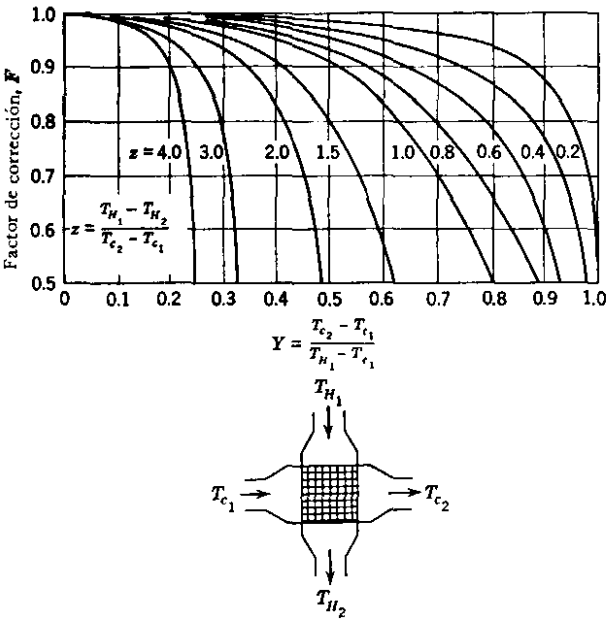
Anteriormente se mencionó el trabajo de Kays y London*, con referencia particular a los cambiadores compactos de calor. El libro "Cambiadores Compactos de Calor", escrito por Kays y London, también incluye tablas útiles para el diseño de cambiadores de calor sobre una base distinta de la estudiada hasta ahora.

Nusselt*, en 1930, propuso un método de análisis basado en la efectividad del cambiador de calor, ξ. Este término se define como la razón de la transferencia real de calor de un cambiador entre la transferencia máxima posible de calor que se llevaría a cabo si se tuviera un área infinita. Observando el diagrama del perfil de la temperatura correspondiente a una operación de contraflujo, como la de la figura 22.11, puede verse que, en general, un fluido sufre un cambio total de temperatura mayor que el otro. Es evidente que el fluido que experimenta el cambio mayor de temperatura es el que tiene un coeficiente menor de capacidad, al que llamaremos $C_{mín}$. Si $C_c = C_{mín}$ como en la figura 22.11a, y si se dispone de un área infinita para la transferencia de energía, la temperatura de salida del fluido frío será igual a la de entrada del fluido caliente. De acuerdo con la definición de efectividad, puede escribirse:

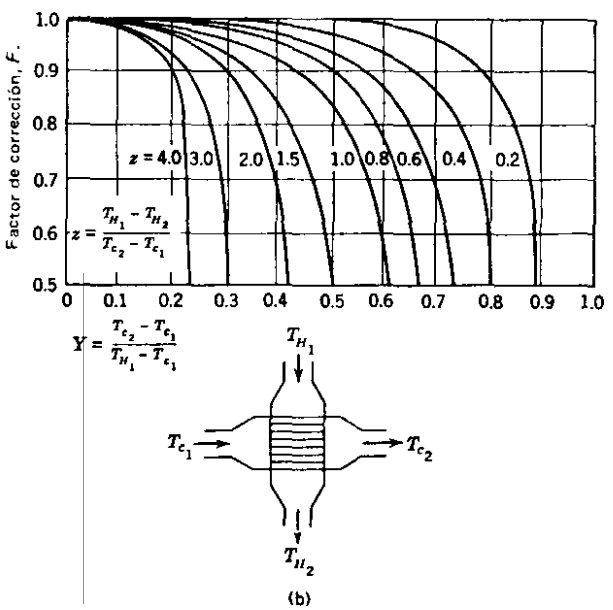
$$\mathscr{E}=\frac{C_H(T_{H\,ent}-T_{H\,sal})}{C_c(T_{c\,sal}-T_{c\,ent})_{máx}}=\frac{C_{máx}\,(T_{H\,ent}-T_{H\,sal})}{C_{mín}\,(T_{H\,ent}-T_{c\,ent})} \qquad (22\text{-}15)$$

Si el fluido caliente es el mínimo, como en la figura 22.11b, la expresión correspondiente a ξ,

*W. M. Kays y A. L. London, citados anteriormente.
*W. Nusselt, *Tech. Mechanik und Thermodynamik*, 12 (1930).


Factor de corrección, F
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
z = 4.0 3.0 2.0 1.5 1.0 0.8 0.6 0.4 0.2
$z = \frac{T_{H_1} - T_{H_2}}{T_{c_2} - T_{c_1}}$
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0
$Y = \frac{T_{c_2} - T_{c_1}}{T_{H_1} - T_{c_1}}$
T_{H_1}
T_{c_1}
T_{c_2}
T_{H_2}

(a)


Factor de corrección, F
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
z = 4.0 3.0 2.0 1.5 1.0 0.8 0.6 0.4 0.2
$z = \frac{T_{H_1} - T_{H_2}}{T_{c_2} - T_{c_1}}$
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0
$Y = \frac{T_{c_2} - T_{c_1}}{T_{H_1} - T_{c_1}}$
T_{H_1}
T_{c_1}
T_{c_2}
T_{H_2}

(b)

$$\mathscr{E} = \frac{C_c(T_{c\ \text{sal}} - T_{c\ \text{ent}})}{C_H(T_{H\ \text{ent}} - T_{H\ \text{sal}})_{\text{máx}}} = \frac{C_{\text{máx}}(T_{c\ \text{sal}} - T_{c\ \text{ent}})}{C_{\text{mín}}(T_{H\ \text{ent}} - T_{c\ \text{ent}})} \qquad (22\text{-}16)$$

Note que los denominadores de las ecuaciones (22-15) y (22-16) son los mismos y que en cada caso, el numerador representa la transferencia real de calor. Por lo tanto, es posible escribir una quinta expresión que corresponda a q, de la manera siguiente:

$$q = \mathscr{E}C_{\text{mín}}(T_{H\,\text{en}} - T_{c\,\text{en}}) \qquad (22\text{-}17)$$

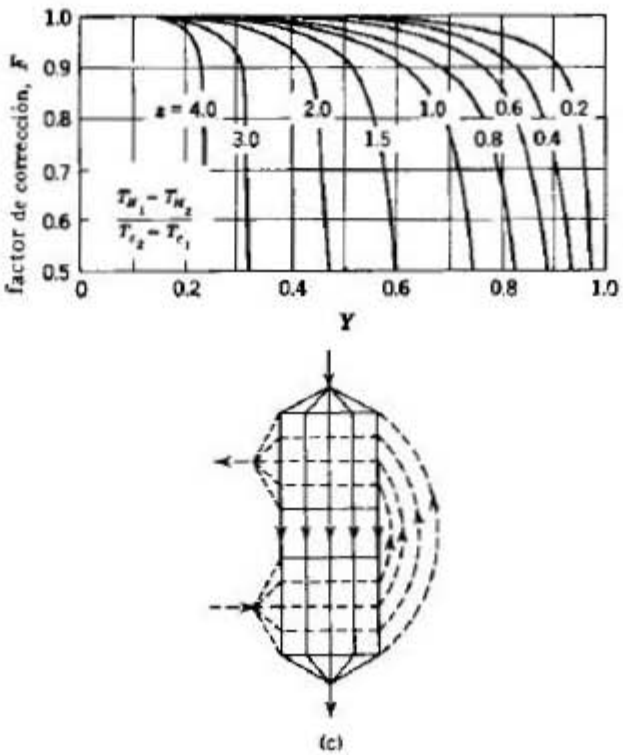


Figura 22.10 Factores de corrección de tres configuraciones de cambiador de calor de flujo cruzado. (*a*) Flujo cruzado, un solo paso, ambos fluidos sin mezclar. (*b*) Flujo cruzado, un solo paso, un fluido sin mezclar. (*c*) Flujo cruzado, pasos de tubo mezclados, el fluido fluye en serie sobre el primero y segundo pasos (de R. A. Browmann, A. C. Mueller y W. M. Nagle, *Trans. A.S.M.E.*, 62, 288, 289 (1940). Con licencia de los editores.

que, junto con las formas integradas de las ecuaciones (21-1) y (21-2), así como las ecuaciones (22-10) y (22-14), expresan a q que es la rapidez de transferencia de calor en todas sus formas útiles en cuanto a análisis y diseño de cambiadores de calor. La ecuación (22-17) destaca de las otras, ya que la diferencia de temperaturas que aparece es únicamente la que se registra en medio de las corrientes de entrada. Esta es una ventaja definitiva cuando se

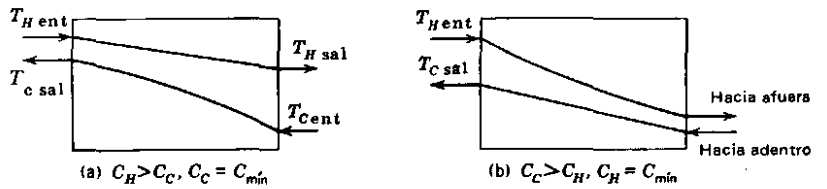


Figura 22.11 Perfiles de temperatura correspondientes a los cambiadores de calor de contraflujo.

va a usar un cambiador de calor dado bajo condiciones diferentes de aquellas para las que fue diseñado. Las temperaturas de salida de ambas corrientes se necesitan conocer y la ecuación (22-17) es, obviamente, el medio más sencillo de lograr este conocimiento si se puede determinar el valor de ξ.

Para determinar el valor de ξ en el caso de un solo paso, se puede escribir la ecuación (22-17), inicialmente, en la forma

$$\mathscr{E} = \frac{C_H(T_{H\,ent} - T_{H\,sal})}{C_{mín}(T_{H\,ent} - T_{c\,ent})} = \frac{C_c(T_{c\,sal} - T_{c\,ent})}{C_{mín}(T_{H\,ent} - T_{c\,ent})} \tag{22-18}$$

La forma apropiada de la ecuación (22-18) depende de cuál de los dos fluidos tenga el valor de C más pequeño. Se considera al fluido frío como el fluido mínimo y se estudiará el caso del contraflujo. La ecuación (22-10) se puede escribir de la siguiente manera (los subíndices numéricos corresponden a la situación de la figura 22.7):

$$q = C_c(T_{c2} - T_{c1}) = UA\frac{(T_{H1} - T_{c1}) - (T_{H2} - T_{c2})}{\ln[(T_{H1} - T_{c1})/(T_{H2} - T_{c2})]} \tag{22-19}$$

La temperatura de entrada del fluido caliente, T_{H2}, puede escribirse en función de ξ usando la ecuación (22-18), obteniéndose:

$$T_{H2} = T_{c1} + \frac{1}{\mathscr{E}}(T_{c2} - T_{c1}) \tag{22-20}$$

y también

$$T_{H2} - T_{c2} = T_{c1} - T_{c2} + \frac{1}{\mathscr{E}}(T_{c2} - T_{c1})$$

$$= \left(\frac{1}{\mathscr{E}} - 1\right)(T_{c2} - T_{c1}) \tag{22-21}$$

De las formas integradas de las ecuaciones (22-1) y (22-2), se obtiene:

$$\frac{C_c}{C_H} = \frac{T_{H2} - T_{H1}}{T_{c2} - T_{c1}}$$

lo cual puede reordenarse en la forma:

$$T_{H1} = T_{H2} - \frac{C_{mín}}{C_{máx}}(T_{c2} - T_{c1})$$

ó

$$T_{H1} - T_{c1} = T_{H2} - T_{c1} - \frac{C_{min}}{C_{max}}(T_{c2} - T_{c1}) \tag{22-22}$$

Si se combina esta expresión con la ecuación (22-20), se obtiene:

$$T_{H1} - T_{c1} = \frac{1}{\mathscr{E}}(T_{c2} - T_{c1}) - \left(\frac{C_{mín}}{C_{máx}}\right)(T_{c2} - T_{c1})$$

$$= \left(\frac{1}{\mathscr{E}} - \frac{C_{mín}}{C_{máx}}\right)(T_{c2} - T_{c1}) \qquad (22\text{-}23)$$

Ahora, sustituyendo las ecuaciones (22-21) y (22-23) en la ecuación (22-19) y reordenando, se obtiene:

$$\ln \frac{1/\mathscr{E} - C_{mín}/C_{máx}}{1/\mathscr{E} - 1} = \frac{UA}{C_{mín}}\left(1 - \frac{C_{mín}}{C_{máx}}\right)$$

Al tomar el antilogaritmo de ambos lados de esta expresión y despejar $\mathscr{E}$, se tiene, finalmente,

$$\mathscr{E} = \frac{1 - \exp\left[-\frac{UA}{C_{mín}}\left(1 - \frac{C_{mín}}{C_{máx}}\right)\right]}{1 - C_{mín}/C_{máx}\exp\left[\frac{UA}{C_{mín}}\left(1 - \frac{C_{mín}}{C_{máx}}\right)\right]} \qquad (22\text{-}24)$$

La razón $UA/C_{mín}$ se llama *número de unidades de transferencia* y se abrevia NUT. La ecuación (22-24) se obtuvo sobre la base de que $C_C = C_{mín}$ si desde el principio se hubiera considerado que el fluido caliente era mínimo, se habría logrado el mismo resultado. Por lo tanto, la ecuación (22-25):

$$\mathscr{E} = \frac{1 - \exp\left[-\text{NTU}\left(1 - \frac{C_{mín}}{C_{máx}}\right)\right]}{1 - (C_{mín}/C_{máx})\exp\left[-\text{NTU}\left(1 - \frac{C_{mín}}{C_{máx}}\right)\right]} \qquad (22\text{-}25)$$

es válida en operaciones de contraflujo en general. Para un flujo paralelo puede hacerse un desarrollo análogo al anterior y se obtendrá:

$$\mathscr{E} = \frac{1 - \exp\left[-\text{NTU}\left(1 + \frac{C_{mín}}{C_{máx}}\right)\right]}{1 + C_{mín}/C_{máx}} \qquad (22\text{-}26)$$

Kays y London* pusieron las ecuaciones (22-25) y (22-26) en forma de gráficas junto con otras expresiones comparables correspondientes a la efectividad de diversos arreglos de tubo y coraza y de contraflujo. Las figuras 22.12 y 22.13 son gráficas de ξ en función de NUT para diversos valores del parámetro $C_{mín}/C_{máx}$.

*W. M. Kays y A. L. London, citados anteriormente.

Con la ayuda de estas figuras se puede usar la ecuación (22-17) tanto como ecuación de diseño original como un medio de evaluar el equipo existente cuando opera en otras condiciones de diseño.

La utilidad del método NUT se pone de manifiesto en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3

Repita los cálculos de los ejemplos 22.1 y 22.2 para determinar el área requerida para la transferencia de calor, bajo las condiciones específicas, si las configuraciones son:

a) de contraflujo
b) de flujo paralelo
c) de flujo cruzado, mezclado con agua

y

d) de tubo y coraza con cuatro pasos del lado del tubo.

Primeramente es necesario determinar los coeficientes de capacidad correspondientes al agua y al aceite, que son:

$$C_{\text{aceite}} = (\dot{m}c_p)_{\text{aceite}} = (0.5 \text{ kg/s})(2090 \text{ J/kg} \cdot \text{K}) = 1045 \text{ J/s} \cdot \text{K}$$

$$C_{\text{agua}} = (\dot{m}c_p)_w = (0.201 \text{ kg/s})(4177 \text{ J/kg} \cdot \text{K}) = 841.2 \text{ J/s} \cdot \text{K}$$

por lo tanto el agua es el fluido mínimo. Se puede evaluar la efectividad empleando la ecuación (22-16), así:

$$\mathscr{E} = \frac{26\,125 \text{ W}}{(841.2 \text{ J/kg} \cdot \text{s})(95 \text{ K})} = 0.327$$

Si se usa la gráfica apropiada de las figuras 22.12 y 22.13, se pueden calcular los valores NUT apropiados y después el área requerida para cada una de las configuraciones de cambiadores de calor:

a) *de contraflujo*

$$\text{NTU} = 0.47$$

$$A = \frac{(0.47)(841.2)}{250} = 1.581 \text{ m}^2$$

b) *de flujo paralelo:*

$$\text{NTU} = 0.50$$

$$A = \frac{(0.50)(841.2)}{250} = 1.682 \text{ m}^2$$

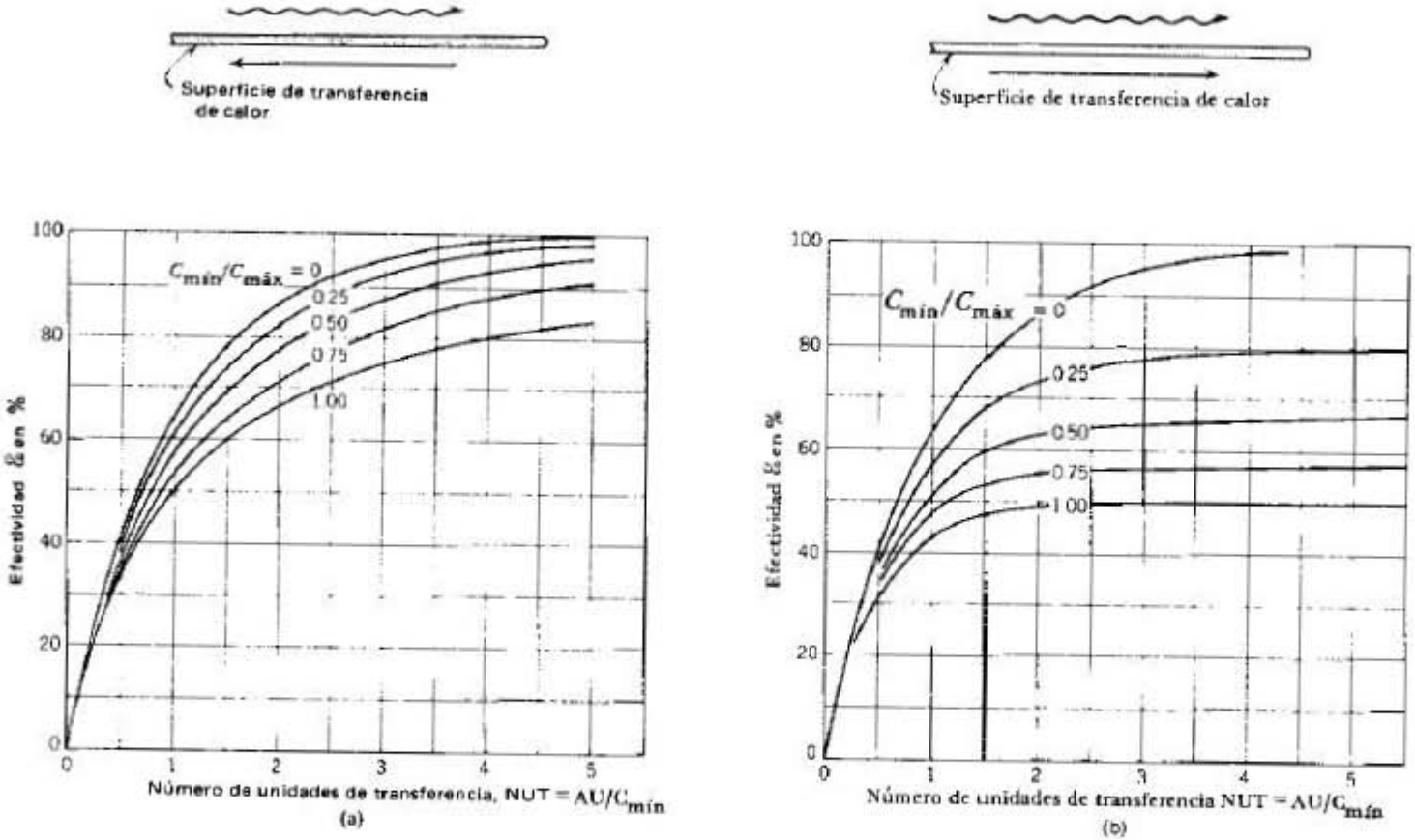


Figura 22.12 Efectividad de un cambiador de calor, correspondiente a tres configuraciones de tubo y coraza (*a*) Contraflujo. (*b*) Flujo paralelo.

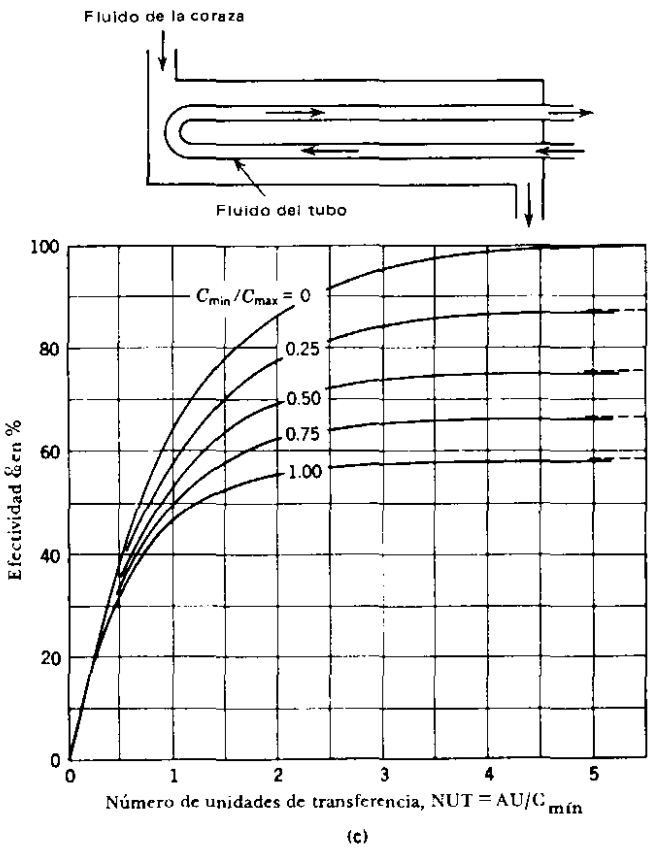


Figura 22.12 Efectividad de un cambiador de calor en tres configuraciones de tubo y coraza (*c*) Un paso de coraza y dos o múltiplo de dos pasos de tubo.

c) de flujo cruzado mezclado con agua:

$$\text{NTU} = 0.48$$

$$A = \frac{(0.48)(841.2)}{250} = 1.615\ \text{m}^2$$

y *d) de tubo y coraza, con cuatro pasos del lado del tubo:*

$$\text{NTU} = 0.49$$

$$A = \frac{(0.49)(841.2)}{250} = 1.649\ \text{m}^2$$

Estos resultados son comparables con los obtenidos anteriormente, aunque con ciertas inexactitudes relacionadas con la lectura de las gráficas.

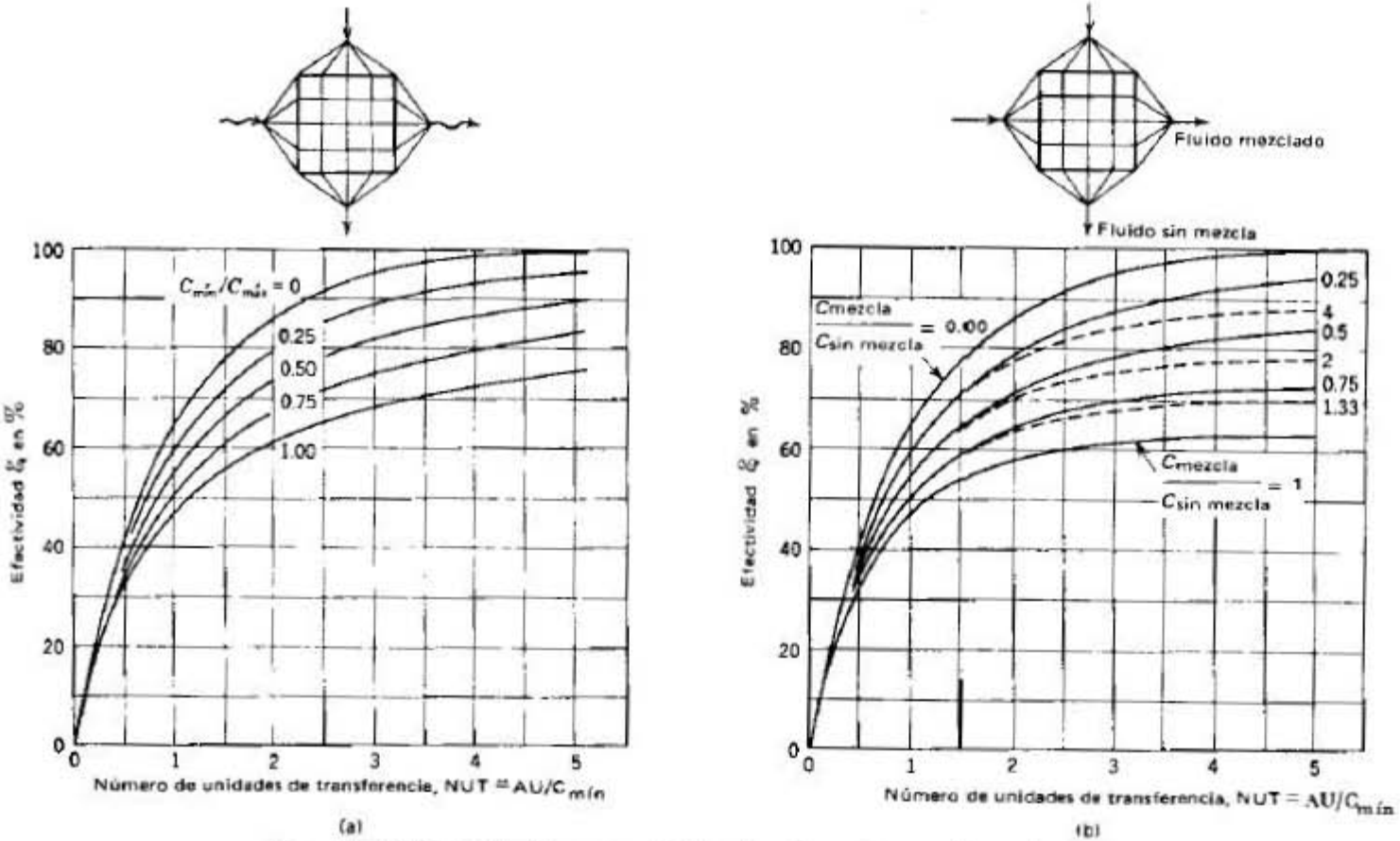


Figura 22.13 Efectividad de un cambiador de calor en tres configuraciones de flujo cruzado. (*a*) Flujo cruzado, ambos fluidos sin mezclar. (*b*) Flujo cruzado, un fluido mezclado.

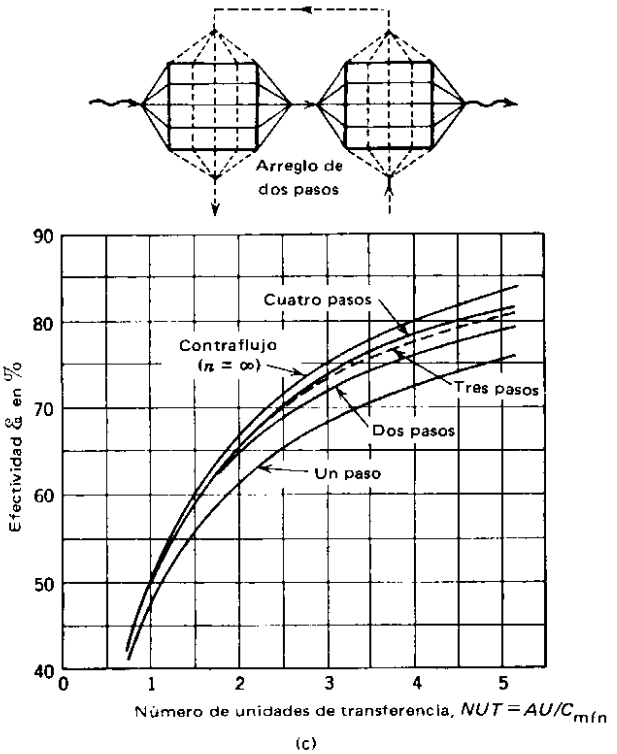


Figura 22.13 Efectividad de un cambiador de calor en tres configuraciones de flujo cruzado. (*c*) Flujo cruzado, paso múltiple.

El método NUT no ofrece ninguna ventaja clara sobre el procedimiento introducido con anterioridad, que incluye el uso de la diferencia logarítmica media de temperatura al realizar los cálculos del tipo de los ejemplos anteriores. Sin embargo, en el ejemplo 4, el método NUT es, obviamente, superior.

EJEMPLO 4

En el intercambio de energía entre el agua y el aceite lubricante de los ejemplos anteriores, se construye un cambiador de calor de flujo cruzado, con un área de transferencia de calor de 16.5 ft^2, con el fluido del lado de la coraza (agua) mezclado. Se agrega una nueva bomba a la línea alimentadora de agua, permitiendo que la rapidez de flujo del agua aumente a 2,200 lb_m/h. ¿Cuáles serán las temperaturas de salida de las corrientes de agua y aceite en esta nueva condición operativa?

Si fuera a usarse el método ΔT_{lm}, tendría que emplearse un procedimiento de prueba y error, ya que ΔT_{lm}, Y y F dependen, todos ellos, de una o ambas temperaturas de las corrientes de salida. Cuando se usa el método NUT, es necesario calcular en primer lugar, los coeficientes de capacidad:

$$C_{\text{aceite}} = (4000\ lb_m/hr)(0.5\ Btu/lb_m\ °F) = 2000\ Btu/hr\ °F$$

y

$$C_w = (2200\ \text{lb}_m/\text{hr})(1\ \text{Btu}/\text{lb}_m\ ^\circ\text{F}) = 2200\ \text{Btu/hr}\ ^\circ\text{F}$$

Ahora el aceite es el fluido "mínimo". Si se usa la igualdad $C_{\text{aceite}} = C_{\text{mín}}$, se obtiene:

$$\text{NTU} = \frac{UA}{C_{\text{mín}}} = \frac{(45\ \text{Btu/hr ft}^2\ ^\circ\text{F})(16.5\ \text{ft}^2)}{2000\ \text{Btu/hr}\ ^\circ\text{F}} = 0.371$$

y, con base en la figura 22.13, la efectividad es:

$$\mathscr{E} = 0.3$$

Se puede evaluar la rapidez total de transferencia de calor

$$q = (0.3)(2000\ \text{Btu/hr}\ ^\circ\text{F})(150^\circ\text{F}) = 90\,000\ \text{Btu/hr}$$

un aumento mayor del 12%. Ahora puede usarse este valor en las ecuaciones (22-1) y (22-2) para obtener las respuestas requeridas:

$$T_{\text{aceite salida}} = 200^\circ\text{F} - \frac{90\,000\ \text{Btu/hr}}{2000\ \text{Btu/hr}\ ^\circ\text{F}} = 155^\circ\text{F}$$

y

$$T_{\text{agua salida}} = 50^\circ\text{F} + \frac{90\,000\ \text{Btu/hr}}{2200\ \text{Btu/hr}\ ^\circ\text{F}} = 90.9^\circ\text{F}$$

22.5 CONSIDERACIONES ADICIONALES ACERCA DEL DISEÑO DE CAMBIADORES DE CALOR

Cuando un cambiador de calor ha estado en servicio durante algún tiempo, su eficiencia puede cambiar debido a la acumulación de una capa de incrustación en una superficie de transferencia de calor debido al deterioro de la superficie por un fluido corrosivo. Cuando se altera la naturaleza de la superficie de manera tal que se afecte la capacidad de transferencia de calor, se dice que la superficie está "sucia".

Cuando hay resistencia por ensuciamiento, la resistencia térmica aumenta y el cambiador de calor transfiere una cantidad de energía menor que aquella para la que se le diseñó. Es muy difícil predecir la rapidez de formación de incrustación o el efecto que tal acumulación tendrá sobre la transferencia de calor. Se pueden efectuar ciertos cálculos después de que un cambiador ha estado en servicio durante algún tiempo, comparando su eficiencia con la que tenía cuando sus superficies estaban limpias. La resistencia interna de la capa de óxido se determina por medio de la ecuación:

$$R_{sc} = \frac{1}{U_f} - \frac{1}{U_0} \qquad (22\text{-}27)$$

donde U_o es el coeficiente total de transferencia de calor del cambiador limpio, U_f es el coeficiente total de transferencia de calor del cambiador sucio y R_{sc} es la resistencia térmica de la capa de incrustación.

Las resistencias de ensuciamiento que se han obtenido a partir de experimentos se pueden usar para predecir aproximadamente el coeficiente total de transferencia de calor por la incorporación de una expresión semejante a la ecuación (15-19). La siguiente ecuación incluye las resistencias de ensuciamiento, R_i del interior de la superficie del tubo y R_o, de la superficie exterior del mismo:

$$U_0 = \frac{1}{A_0/A_i h_i + R_i + [A_0 \ln (r_o/r_i)]/2\pi k + R_o + 1/h_o} \qquad (22\text{-}28)$$

Las resistencias de ensuciamiento que se van a usar en la ecuación (22.28), han sido compiladas por la Tubular Exchanger Manufacturers Association.* En la tabla 22.1 aparecen algunos valores útiles.

Tabla 22.1 Resistencias por ensuciamiento de un cambiador de calor

Fluido	*Resistencias por ensuciamiento*
Agua destilada	0.0005
Agua de mar, inferior a 125° F	0.0005
superior a 125° F	0.001
Agua de alimentación de caldera, tratada	0.001
Agua de ciudad o de pozo, inferior a 125° F	0.001
superior a 125° F	0.002
Líquidos refrigerantes	0.001
Vapores refrigerantes	0.002
Gasolina líquida, vapores orgánicos	0.0005
Aceite combustible	0.005
Aceite de temple	0.004
Vapor, sin aceite	0.0005
Aire industrial	0.002

Con frecuencia es útil tener cifras aproximadas acerca del tamaño del cambiador de calor, de la rapidez de flujo y otras semejantes. La cantidad más difícil de calcular rápidamente es el coeficiente total de transferencia de calor, U. Mueller† hizo una tabla muy útil de valores aproximados de U, la cual se reproduce aquí, con el número 22.2.

22.6 CONCLUSION

En este capítulo se presentaron y desarrollaron las ecuaciones básicas necesarias para el diseño de cambiadores de calor. Tanto el diseño como el

*Tubular Exchanger Manufacturers Association, TEMA Standars, Tercera Edición, Nueva York (1952).

†A. C. Mueller, Purdue Univ. Engr. Expt. Sta. Engr. Serie de boletines de investigación 121 (1954).

Tabla 22.2 Valores aproximados de los coeficientes de transferencia total de calor

Combinación de fluidos	*U*, Btu/hr ft² °F
Agua a aire comprimido	10–30
Agua a agua, enfriadores de camisa de agua	150–275
Agua a salmuera	100–200
Agua a gasolina	60–90
Agua a gasolina u otro destilado	35–60
Agua a solventes orgánicos, alcohol	50–150
Agua a alcohol en condensación	45–120
Agua a aceite lubricante	20–60
Agua a vapores de aceite en condensación	40–100
Agua a freón 12 en condensación de ebullición	50–150
Agua a amoniaco condensado	150–250
Vapor a agua, calentador instantáneo	400–600
calentador de tanque de almacenamiento	175–300
Vapor a aceite, combustible pesado	10–30
Combustible ligero	30–60
Destilado ligero de petróleo	50–200
Vapor a soluciones acuosas	100–600
Vapor a gases	5–50
Orgánicos ligeros a orgánicos ligeros	40–75
Orgánicos medios a orgánicos medios	20–60
Orgánicos pesados a orgánicos pesados	10–40
Orgánicos pesados a orgánicos ligeros	10–60
Petróleo crudo a gasolina	30–55

análisis de todo cambiador de calor incluyen una o más de las ecuaciones siguientes:

$$dq = C_c\, dT_c \tag{22-1}$$

$$dq = C_H\, dT_H \tag{22-2}$$

$$dq = U\, dA(T_H - T_c) \tag{22-3}$$

$$q = UA\, \Delta T_{lm} \tag{22-10}$$

y

$$q = \mathscr{E} C_{min}(T_{H\,in} - T_{c\,in}) \tag{22-17}$$

Se incluyeron, también, tablas por medio de las cuales las técnicas de un solo paso se pueden aumentar para incluir el diseño y análisis de las configuraciones de flujo cruzado y de tubo y coraza.

Los dos métodos usados en el diseño de cambiadores de calor utilizan, o la ecuación (22-10) o la (22-17). Cualquiera de ellas es razonablemente rápida y directa para diseñar un cambiador. La ecuación (22-17) es un método más simple y directo de analizar un cambiador que opera bajo otras condiciones de diseño.

PROBLEMAS

22.1 Se va a diseñar un cambiador de calor para calentar agua por medio de la condensación de vapor en la coraza. El agua va a pasar a través de los tubos lisos horizontales, en flujo turbulento y el vapor se va a condensar en forma de gotas en la coraza. La rapidez de flujo del agua, las temperaturas inicial y final, la temperatura de condensación del vapor y la caída de presión disponible del lado del tubo (despreciando las pérdidas de entrada y salida), están todas ellas, especificadas. Para poder hacer el diseño óptimo de cambiador, se desa saber en qué forma varía el área total requerida del cambiador, con el diámetro del tubo seleccionado. Suponiendo que el flujo de agua sigue siendo turbulento y que la resistencia térmica de la pared del tubo y de la película de condensación es despreciable, determine el efecto del diámetro del tubo sobre el área total requerida en el cambiador.

22.2 Cien mil libras por hora de agua van a pasar a través de un cambiador de calor que va a elevar la temperatura del agua de 140° F a 200° F. Los productos de combustión, cuyo calor específico es de 0.24 Btu/lb° F están disponibles a 800° F. El coeficiente total de transferencia de energía es de 12 Btu/h ft^2 ° F. Si se dispone a 100,000 lb_m /h de productos de combustión, determine

a) la temperatura de salida del gas del conducto

b) el área requerida de transferencia de calor para un cambiador de contraflujo.

22.3 Un cambiador de calor de tubo y coraza de un paso de coraza y ocho pasos de tubo va a usarse para calentar queroseno de 80 a 130° F. El queroseno entra con una rapidez de 2,500 lb_m /h. El agua, que entra a 200° F y con una rapidez de 900 lb_m va a fluir del lado de la coraza. El coeficiente total de transferencia de calor es de 260 Btu/h ft^2 ° F. Determine el área de transferencia de calor que se necesita.

22.4 Un aceite con un calor específico de 1880 J/Kg · K entra en un cambiador de calor de contraflujo de un solo paso, con una rapidez de 2 kg/seg. y una temperatura de 400 K. Se debe enfriar a 350 K. Hay agua para enfriar el aceite, disponible en una cantidad de 2 kg/seg. y a una temperatura de 280 K. Determine el área superficial requerida si el coeficiente total de transferencia de calor es de 230 W/m^2 · K.

22.5 El coeficiente de transferencia de calor, temperaturas inciales de fluido y área total de transferencia de calor, determinados en el problema 22.4, permanecen iguales. Encuentre la temperatura de salida del aceite para las siguientes configuraciones:

a) flujo cruzado, ambos fluidos sin mezclarse

b) tubo y coraza, con dos pasos de tubo y uno de coraza

22.6 Fluye aire a 103 kPa y 290 K en un conducto rectangular largo cuyas dimensiones son 10 cm por 20 cm. En una longitud de 2.5 m, este conducto se mantiene a 395 K y la temperatura promedio de salida del aire de esta sección es de 300 K.Calcule la rapidez de flujo del aire y la transferencia total de calor.

22.7 Entra agua en un cambiador de calor de doble tubo y de contraflujo, con una velocidad de 150 lb_m/min y se calienta de 60° F a 140° F por medio de un aceite cuyo calor específico es de 0.45 Btu/lb_m ° F. El aceite entra a 240° F y sale a 80° F. El coeficiente total de transferencia de calor es de 50 Btu/h ft^2 ° F.

a) ¿Qué área de transferencia de calor se requiere?

b) ¿Qué área se requiere si todas las condiciones permanecen iguales excepto que se usa un cambiador de calor de tubo y coraza, donde el agua pasa una vez a través de la coraza y el aceite dos veces a través del tubo?

c) ¿Cuál sería la temperatura resultante de salida del agua si en el cambiador del inciso (a) la rapidez de flujo del agua disminuyera a 120 lb_m/min?

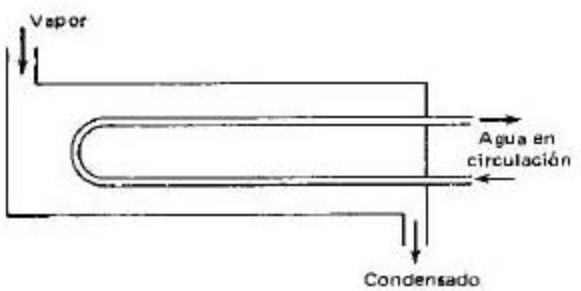
22.8 Se utiliza aire comprimido en un sistema de bombas de calor para calentar agua, que después se usa para calentar una casa. Las demandas de calentamiento de esta última son de 95,000 Btu/h. Entra aire a 200° F al cambiador y sale a 120° F. El agua entra y sale del cambiador a 90° F y 125° F respectivamente. Escoja la unidad más compacta, de las que se describen a continuación:

a) Una superficie de contraflujo cuya $U = 30$ Btu/h ft^2 ° F y una razón superficie a volumen de 130 ft^2/ft^3.

b) Una configuración de flujo cruzado con agua sin mezclar y aire mezclado, con $U = 40$ Btu/h ft^2 ° F y una razón superficie a volumen, de 100 ft^2/ft^3.

c) Una unidad de flujo cruzado con ambos fluidos sin mezclar, una $U = 50$ Btu/h ft^2 ° F y una razón superficie a volumen de 90 ft^2/ft^3.

22.9 Se va a condensar vapor saturado a 373 K en un cambiador de calor de tubo y coraza (va a entrar como vapor a 373 K y a salir condensado, aproximadamente a 373 K). Si el fabricante clasifica el NUT del condensador como 1.25 para un flujo de agua en circulación, de 0.07 kg/seg.



y el agua está a 280 K. ¿cuál será la rapidez máxima aproximada de flujo de vapor en kg/seg. que se puede condensar? ¿Cuál será la temperatura de salida del agua en estas condiciones? Tome como valor correspondiente al calor de vaporización: 2256 kJ/ kg y c_p =4.18 kJ/kg· K.

22.10 Un cambiador de calor agua a aceite tiene, como temperaturas de entrada y salida, 255 K y 350 K, respectivamente, en el agua, y en el aceite 305 K y 340 K, respectivamente. ¿Cuál será la efectividad de este cambiador de calor?

22.11 Se dispone de agua a 50° F para enfriamiento, con una rapidez de 400 lb_m /h, que entra en un cambiador de calor de doble tubo cuya área total es de 18 ft^2. Un aceite cuya c_p = 0.45 Btu/lb_m ° F, entra al cambiador a 250° F. La temperatura de salida del agua está limitada a 212° F y el aceite debe abandonar el cambiador a una temperatura no mayor de 160° F. Dado el valor de U = 60 Btu/h ft^2 ° F. Encuentre el flujo máximo de aceite que puede enfriarse con esta unidad.

23
TRANSFERENCIA DE CALOR POR RADIACION

El mecanismo de transferencia de calor por radiación no tiene ninguna analogía con la transferencia, ni de masa ni de momento. La transferencia de calor radiante es extremadamente importante en muchas fases del diseño en ingeniería, tales como calentadores de agua, calefactores y aeronaves. En este capítulo nos ocuparemos, en primer lugar, de la comprensión de la naturaleza de la radiación térmica. Después se estudiarán las propiedades de las superficies, tomando en cuenta la forma en que influye la geometría del sistema en la transferencia de calor radiante. Finalmente, se introducirán algunas técnicas para resolver problemas relativamente sencillos donde participan en el intercambio de energía radiante superficies y gases.

23.1 NATURALEZA DE LA RADIACION

La transferencia de energía por radiación tiene varias características únicas en comparación con la conducción o la convección. Primero: no se necesita materia para transferir calor por radiación; más aún, la presencia de un medio impide la transferencia de radiación. Se ha observado que las nubes reducen las temperaturas máximas durante el día y aumentan las mínimas durante la noche, ya que ambas dependen de la transferencia de energía radiante entre la tierra y el espacio. Un segundo aspecto único de la radiación es que, tanto la cantidad de radiación como la calidad de ésta, dependen de la temperatura. Se encontró que, tanto en la conducción como en la convección la cantidad de transferencia de energía depende de la diferencia de temperatura; en la radiación, la cantidad de transferencia de calor depende, tanto de la diferencia de temperatura entre dos cuerpos como del nivel de la temperatura. Además, la radiación que parte de un objeto caliente es diferente,

en cuanto a calidad, de la radiación de un cuerpo que se encuentre a una temperatura menor. El color de los objetos incandescentes cambia al cambiar su temperatura. Las propiedades ópticas variables con la temperatura de la radiación son de gran importancia en la determinación del intercambio de energía radiante entre los cuerpos.

La radiación viaja con la velocidad de la luz y tiene propiedades ondulatorias y corpusculares. El aspecto electromagnético de la figura 23.1 muestra las diversas frecuencias y longitudes de onda en las que ocurre la radiación.

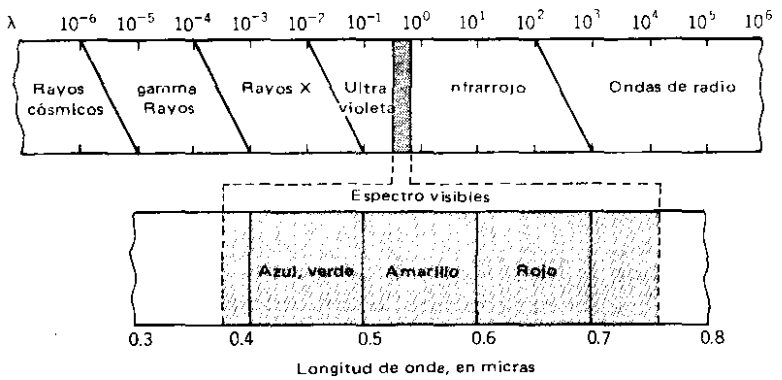


Figura 23.1 El espectro electromagnético.

La unidad de longitud de onda que se utilizará en el estudio de la radiación es la micra, cuyo símbolo, es μ. Una micra es igual a 10^{-6} m. o $3.95(10^{-15})$ in La frecuencia, ν, de radiación, se relaciona con la longitud de onda, λ, por medio de $\lambda\nu = c$, donde c es la velocidad de la luz. La radiación de onda corta, tal como los rayos gama y x se relacionan con energías muy altas. Para producir radiación de este tipo se deberán alterar, el núcleo, o los electrones de las órbitas interiores de un átomo. Los rayos x y gama tienen gran capacidad de penetración, las superficies que son opacas a la radiación visible pueden atravesarse fácilmente por medio de rayos x o gama. La radiación de onda muy larga, tal como las ondas de radio, también puede atravesar los sólidos; sin embargo, la energía asociada con estas ondas es mucho menor que la de la radiación de onda corta. Entre los valores $\lambda = 0.38$ a 0.76 micras, el nervio óptico detecta la radiación en forma de luz. Dentro del aspecto visible, se ha observado que la radiación posee poco poder de penetración, excepto en algunos líquidos, plásticos y vidrios. A la radiación cuya longitud de onda se encuentra entre 0.1 y 100 micras se le llama radiación *térmica*.

23.2 RADIACION TERMICA

En este capítulo se tratará exclusivamente con radiación térmica cuando se esté estudiando la transferencia de calor radiante. La radiación térmica

principalmente tiene las mismas propiedades ópticas que uno de sus subgrupos: la luz visible, así que se usarán las propiedades ondulatorias de la radiación térmica más que sus propiedades corpusculares.

La radiación térmica incidente sobre una superficie, como en la figura 23.2 puede ser: o absorbida, o reflejada, o transmitida.

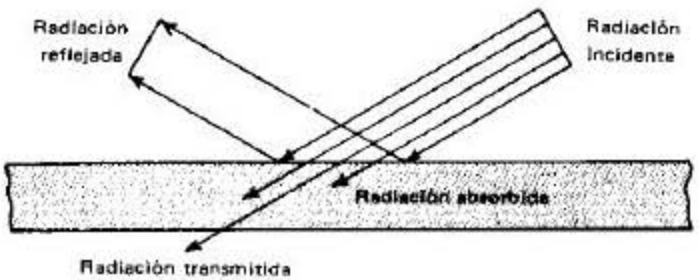


Figura 23.2 Destino de la radiación incidente en una superficie.

Si ρ α y τ son las fracciones de la radiación incidente que se refleja, absorbe y transmite, respectivamente, entonces:

$$\rho + \alpha + \tau = 1 \tag{23-1}$$

donde ρ es la *reflectividad*, α, la *absorbencia* y τ, la *transmitancia*.

Existen dos clases de reflexión: la especular y la difusa. En la *reflexión especular*, el ángulo de incidencia de la radiación es igual al ángulo de reflexión. La reflexión de la figura 23.2 es especular. La mayoría de los cuerpos no refleja en forma especular, sino en todas direcciones. En ocasiones, se compara la reflexión difusa a una situación en la que la radiación térmica incidente se absorbe y después la superficie vuelve a emitirla, con su longitud de onda inicial.

La absorción de radiación térmica en los sólidos tiene lugar en una distancia muy corta, del orden de una micra en los conductores eléctricos y del de 0.05 in en los no conductores eléctricos, la diferencia se debe a las distintas distribuciones de estados de energía de los conductores eléctricos que pueden absorber energía de la frecuencia de la radiación térmica.

En la mayoría de los sólidos la transmitancia es cero, por lo que se puede decir que son *opacos* a la radiación térmica. La ecuación (23-1), para un cuerpo opaco, se transforma en $\rho + \alpha = 1$.

El cuerpo absorbente ideal, para el cual $\alpha = 1$, se llama *cuerpo negro*. Un cuerpo negro no refleja ni transmite radiación térmica. Como lo que vemos es la luz (radiación) reflejada en los objetos, un cuerpo negro se vería negro, ya que no reflejaría la luz. Un orificio pequeño en una cavidad grande se asemeja mucho a un cuerpo negro, sin que importe la naturaleza de la superficie interior. La radiación que incide en el orificio tiene pocas oportunidades de reflejarse, saliendo del orificio. También pueden hacerse cuerpos negros me-

diante objetos brillantes, como se pone de manifiesto si se mira una pila de hojas de rasurar, con el filo del lado de adelante.

El *poder emisivo total*, E, de una superficie se define como la rapidez total de energía térmica emitida por medio de radiación, desde una superficie en todas las direcciones y longitudes de onda por unidad de área. El poder total emisivo también se designa con los nombres de emitividad o intensidad hemisférica total. La emitancia se relaciona íntimamente con el poder emisivo. La *emitancia*, ϵ, se define como la razón del poder emisivo total de una superficie sobre el poder emisivo total de una superficie radiante ideal a la misma temperatura. La superficie radiante ideal se llama, también, cuerpo negro, así que se puede escribir:

$$\epsilon = \frac{E}{E_b} \tag{23-2}$$

donde E_b es el poder emisivo total de un cuerpo negro. Como el poder emisivo total incluye contribuciones de todas las longitudes de onda de la energía radiante, el *poder emisivo monocromático*, E_λ, puede también, definirse. La energía radiante, E_λ, contenida entre las longitudes de onda λ y $\lambda + d\lambda$, es el poder emisivo monocromático, por lo tanto:

$$dE = E_\lambda \, d\lambda, \qquad \text{or} \qquad E = \int_0^\infty E_\lambda \, d\lambda$$

La emitancia monocromática, ϵ_λ, es, sencillamente, $\epsilon_\lambda = E_\lambda / E_{\lambda,b}$, donde $E_{\lambda,b}$ es el poder emisivo monocromático de un cuerpo negro, cuya longitud de onda es λ y que está a la misma temperatura. La absorbencia monocromática, α_λ se puede definir de la misma manera que la emitancia monocromática. La *absorbencia monocromática* se define como la razón de la radiación incidente, de longitud de onda, λ, que una superficie absorbe, sobre la radiación incidente que absorbe una superficie negra.

La ley de Kirchhof es una relación entre la absorbencia y la emitancia y establece que, en un sistema de equilibrio, es válida la siguiente igualdad:

$$\epsilon_\lambda = \alpha_\lambda \tag{23-3}$$

El equilibrio termodinámico requiere que todas las superficies estén a la misma temperatura para que no exista ninguna transferencia neta de calor. La utilidad de la ley de Kirchhoff está en el hecho de que se puede utilizar en los casos en los que existe una ligera desviación del estado de quilibrio. En tales casos se puede suponer que la emitancia y la absorbencia son iguales. En los casos en que la radiación entre los cuerpos ocurre a temperaturas muy distintas, como es el caso de la tierra y el sol, la ley de Kirchhoff no es válida. Un error que se comete con frecuencia es el de confundir el equilibrio térmico con las condiciones de estado permanente. El estado permanente implica que las derivadas con respecto al tiempo son iguales a cero, en tanto que el equilibrio se refiere a la igualdad de las temperaturas.

23.3 LA INTENSIDAD DE LA RADIACION

El uso de un solo rayo no es adecuado para mostrar la cantidad de radiación que sale de una superficie y viaja a lo largo de una trayectoria específica. La cantidad de energía que viaja en una dirección específica se determina a partir de I, que es la *intensidad* de radiación. Si una unidad de superficie, dA, emite una energía total dq, entonces la *intensidad de radiación* está dada por:

$$I = \frac{d^2q}{dA\, d\Omega \cos\theta} \tag{23-4}$$

donde $d\Omega$ es un ángulo sólido diferencial. Nótese que, si se coloca un ojo en el punto P, de la figura 23.3, el tamaño aparente del área emisora es $dA\cos\theta$. Es importante recordar que la intensidad de la radiación es independiente de la dirección en una superficie que radia en forma difusa. Si se reordena la ecuación (23-4), se observará que la relación entre el poder emisivo total, $E = dq/dA$ y la intensidad, I, es:

$$\frac{dq}{dA} = E = \int I\cos\theta\, d\Omega = I\int \cos\theta\, d\Omega \tag{23-5}$$

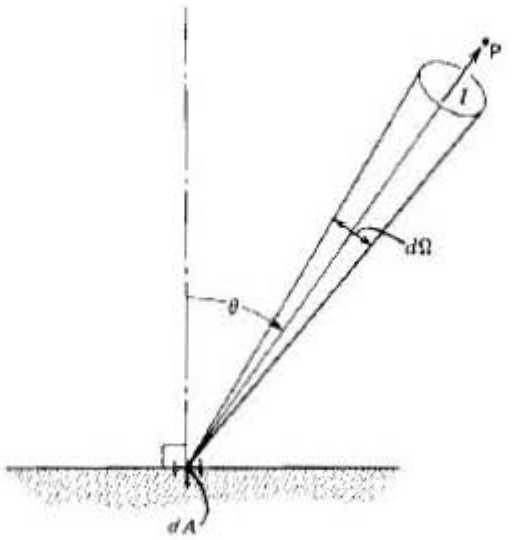


Figura 23.3 La intensidad de radiación.

Se observa que la relación es puramente geométrica en una superficie que radia en forma difusa ($I \neq I(\theta)$). Tómese un hemisferio imaginario de radio r_o, que cubra a la superficie plana sobre la que se encuentra dA. El ángulo sólido,

$d\Omega$, intersecta el área sombreada en el hemisferio, como aparece en la figura 23.4. El ángulo sólido está definido por la expresión $\Omega = A/r^2$ ó $d\Omega = dA/r^2$ y por lo tanto:

$$d\Omega = \frac{(r_0 \operatorname{sen} \theta \, d\, \phi)\,(r_0\, d\theta)}{r_0^2} = \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\phi$$

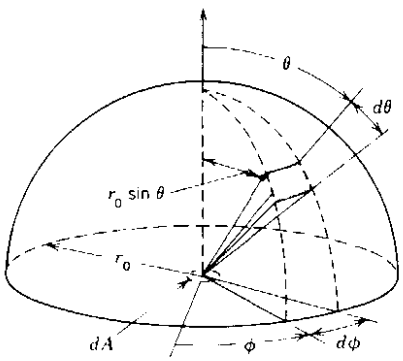


Figura 23.4 Integración de la intensidad sobre ángulos sólidos.

El poder emisivo total por unidad de área se transforma en:

$$E = I \int \cos\theta \, d\Omega = I \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos\theta \, \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi$$

o, sencillamente:

$$E = \pi I \tag{23-6}$$

Si la superficie no radia en forma difusa, entonces:

$$E = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I \cos\theta \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi$$

La relación entre la intensidad de radiación, I y el poder emisivo total es un paso importante en la determinación del poder emisivo total.

23.4 LEY DE PLANCK DE LA RADIACION

Planck* introdujo el concepto cuántico en 1900 y con él la idea de que la radiación no se emite en un estado continuo de energía sino en cantidades

*M. Planck, *Verh. d. deut. physik. Gesell*, 2, 237 (1900).

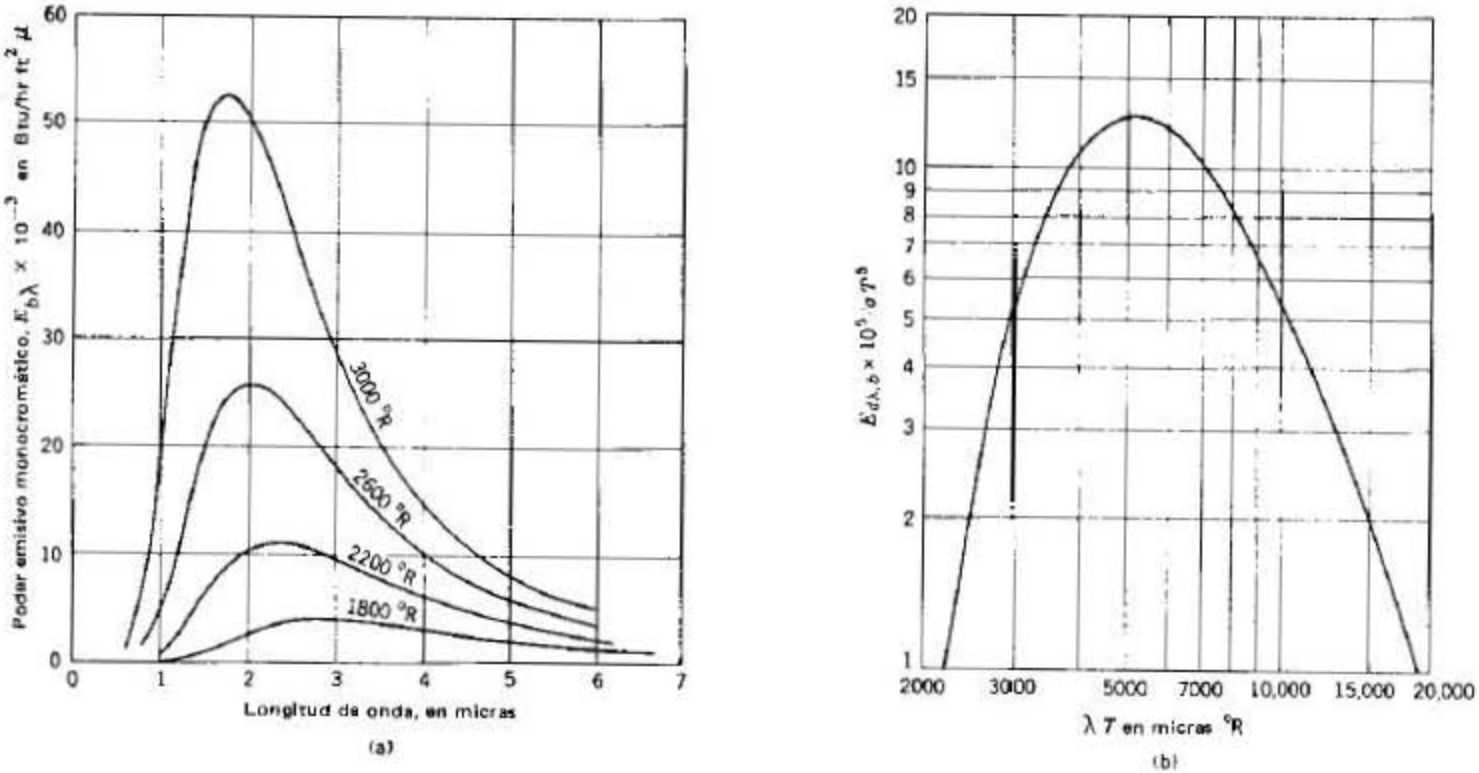


Figura 23.5 Distribución de energía espectral correspondiente a un cuerpo negro.

discretas o quanta. La intensidad de radiación emitida por un cuerpo negro, es, según Planck:

$$I_{b,\lambda} = \frac{2c^2 h\lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{ch}{\kappa\lambda T}\right) - 1}$$

donde $I_{b,\lambda}$ es la intensidad de radiación de un cuerpo negro entre las longitudes de onda λ y $\lambda + d\lambda$, c es la velocidad de la luz, h es la constante sw Planck, κ es la constante de Boltzman y T es la temperatura. El poder emisivo total entre las longitudes de onda λ y $\lambda + d\lambda$ es, entonces:

$$E_{b,\lambda} = \frac{2\pi c^2 h\lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{ch}{\kappa\lambda T}\right) - 1} \qquad (23\text{-}7)$$

En la figura 23.5 aparece la distribución espectral de energía de un cuerpo negro, dada por la ecuación (23-7).

En esta figura, el área bajo la curva de $E_{b,\lambda}$ contra λ (la energía total emitida) aumenta rápidamente con la temperatura. También se ha observado que la energía máxima ocurre para longitudes de onda cada vez más cortas, al aumentar la temperatura. En un cuerpo negro a 10,000° F (que es la temperatura aproximada del sol) la mayor parte de la energía emitida está en la región visible del espectro. En la figura 23.5b, puede observarse una gráfica universal de distribución de energía radiante del cuerpo negro. La ecuación (23-7), se ha dividido entre T^5 y después se ha graficado, usando λT como variable independiente; esta información también aparece en la tabla 23.1. La energía máxima se emite a $\lambda T = 5215.6$ micras ° R(2,897.6μ K), tal como puede calcularse haciendo máxima la curva representada por la ecuación (23-7). La relación: $\lambda_{\text{máx}} T = 5215.6\mu$ ° R se llama ley de Wien del desplazamiento. Wien obtuvo este resultado en 1893, siete años antes del desarrollo de Planck.

23.5 LEY DE STEFAN-BOLTZMANN

La ley de Planck de la radiación puede integrarse sobre longitudes que varían desde cero hasta el infinito para determinar el poder emisivo total. El resultado que se obtiene es:

$$E_b = \int_0^\infty E_{b,\lambda}\, d\lambda = \frac{2\pi^5 \kappa^4 T^4}{15c^2 h^3} = \sigma T^4 \qquad (23\text{-}8)$$

donde σ se llama constante de Stefan-Boltzmann y tiene el valor de $\sigma = 5.147 \times 10^{-10}$ W/m$^2 \cdot$ K^4 (0.1714×10^{-8} Btu/hr ft^2 °R^4).

Tabla 23.1 Funciones de Planck de la radiación

$\lambda T[\mu^\circ R]$	$\frac{E_{b\lambda} \times 10^5}{\sigma T^5}$	$\frac{E_b(0-\lambda T)}{\sigma T^4}$	$\lambda T[\mu^\circ R]$	$\frac{E_{b\lambda} \times 10^5}{\sigma T^5}$	$\frac{E_b(0-\lambda T)}{\sigma T^4}$
1000.0	0.000039	0.0000	10400.0	5.142725	0.7183
1200.0	0.001191	0.0000	10600.0	4.921745	0.7284
1400.0	0.012008	0.0000	10800.0	4.710716	0.7380
1600.0	0.062118	0.0000	11000.0	4.509291	0.7472
1800.0	0.208018	0.0003	11200.0	4.317109	0.7561
2000.0	0.517405	0.0010	11400.0	4.133804	0.7645
2200.0	1.041926	0.0025	11600.0	3.959010	0.7726
2400.0	1.797651	0.0053	11800.0	3.792363	0.7803
2600.0	2.761875	0.0098	12000.0	3.633505	0.7878
2800.0	3.882650	0.0164	12200.0	3.482084	0.7949
3000.0	5.093279	0.0254	12400.0	3.337758	0.8017
3200.0	6.325614	0.0368	12600.0	3.200195	0.8082
3400.0	7.519353	0.0507	12800.0	3.069073	0.8145
3600.0	8.626936	0.0668	13000.0	2.944084	0.8205
3800.0	9.614973	0.0851	13200.0	2.824930	0.8263
4000.0	10.463377	0.1052	13400.0	2.711325	0.8318
4200.0	11.163315	0.1269	13600.0	2.602997	0.8371
4400.0	11.714711	0.1498	13800.0	2.499685	0.8422
4600.0	12.123821	0.1736	14000.0	2.401139	0.8471
4800.0	12.401105	0.1982	14200.0	2.307123	0.8518
5000.0	12.559492	0.2232	14400.0	2.217411	0.8564
5200.0	12.613057	0.2483	14600.0	2.131788	0.8607
5400.0	12.576066	0.2735	14800.0	2.050049	0.8649
5600.0	12.462308	0.2986	15000.0	1.972000	0.8689
5800.0	12.284687	0.3234	16000.0	1.630989	0.8869
6000.0	12.054971	0.3477	17000.0	1.358304	0.9018
6200.0	11.783688	0.3715	18000.0	1.138794	0.9142
6400.0	11.480102	0.3948	19000.0	0.960883	0.9247
6600.0	11.152254	0.4174	20000.0	0.815714	0.9335
6800.0	10.807041	0.4394	21000.0	0.696480	0.9411
7000.0	10.450309	0.4607	22000.0	0.597925	0.9475
7200.0	10.086964	0.4812	23000.0	0.515964	0.9531
7400.0	9.721078	0.5010	24000.0	0.447405	0.9579
7600.0	9.355994	0.5201	25000.0	0.389739	0.9621
7800.0	8.994419	0.5384	26000.0	0.340978	0.9657
8000.0	8.638524	0.5561	27000.0	0.299540	0.9689
8200.0	8.290014	0.5730	28000.0	0.264157	0.9717
8400.0	7.950202	0.5892	29000.0	0.233807	0.9742
8600.0	7.620072	0.6048	30000.0	0.207663	0.9764
8800.0	7.300336	0.6197	40000.0	0.074178	0.9891
9000.0	6.991475	0.6340	50000.0	0.032617	0.9941
9200.0	6.693786	0.6477	60000.0	0.016479	0.9965
9400.0	6.407408	0.6608	70000.0	0.009192	0.9977
9600.0	6.132361	0.6733	80000.0	0.005521	0.9984
9800.0	5.868560	0.6853	90000.0	0.003512	0.9989
10000.0	5.615844	0.6968	100000.0	0.002339	0.9991
10200.0	5.373989	0.7078			

Se puede observar que esta constante es la combinación de otras constantes físicas. Stefan y Boltzmann obtuvieron su relación antes de la ley de Planck, por medio del experimento de Stefan, en 1879, y el desarrollo teórico termodinámico de Boltzmann, en 1884. El valor exacto de la constante de Stefan-Boltzmann, σ, así como su relación con otras constantes físicas se obtuvo después de la introducción de la ley de Planck, en 1900.

23.6 EMITANCIA Y ABSORBENCIA DE LAS SUPERFICIES SOLIDAS

En tanto que la conductividad térmica, el calor específico, la densidad y la viscosidad son las propiedades físicas importantes de la materia en cuanto a conducción de calor y convección, la emitancia y la absorbencia son las principales propiedades en cuanto al intercambio de calor por radiación.

En las secciones anteriores se observa que, en la radiación del cuerpo negro, $E_b = \sigma T^4$. En superficies reales, $E = \epsilon E_b$, de acuerdo con la definición de emitancia. La emitancia de la superficie definida así, es un factor burdo, ya que la energía radiante no solamente está siendo emitida en todas las direcciones sino también en otras longitudes. En las superficies reales la emitancia puede variar con las longitudes de onda así como con la dirección de emisión, por lo tanto se deben diferenciar la emitancia monocromática, ϵ_λ, y la emitancia direccional, ϵ_θ, de la emitancia total, ϵ.

Emitancia monocromática. Por definición, la emitancia monocromática de una superficie real es la relación entre su poder emisivo monocromático, y el de una superficie negra que se encuentre en la misma temperatura. La figura 23.6 representa una distribución típica de la intensidad de radiación de dos de estas superficies a la misma temperatura en diversas longitudes de onda.

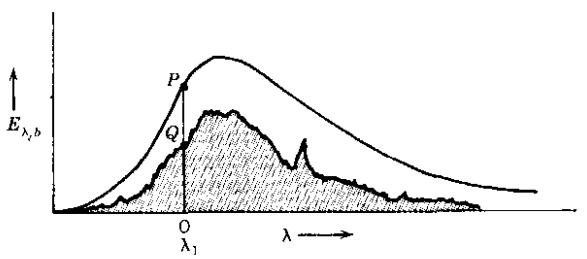


Figura 23.6 Emitancia en diversas longitudes de onda.

La emitancia monocromática a una cierta longitud de onda, λ_1, es la razón de dos ordenadas, tales como $\overline{OQ}$ y $\overline{OP}$. Esto es:

$$\epsilon_{\lambda_1} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}}$$

que es igual a la absorbencia monocromática, α_{λ_1}, de la radiación de un cuerpo a la misma temperatura. Esta es la consecuencia directa de la ley de Kirchhoff. La emitancia total de la superficie está dada por la razón del área sombreada que aparece en la figura 23.6 al área bajo la curva, correspondiente a la radiación del cuerpo negro.

Emitancia direccional. La variación cosenoidal estudiada anteriormente, ecuación (23-5), es válida estrictamente en el caso de la radiación de una superficie negra, y los materiales que existen en la naturaleza, sólo la satisfacen aproximadamente. Esto se debe al hecho de que la emitancia (promediada en todas las longitudes de onda) de las superficies reales no es constante en todas las direcciones. La variación de la emitancia de los materiales con la dirección de la emisión se puede representar adecuadamente por medio de diagramas polares.

Si se satisface la ley del coseno, las curvas de distribución deben adoptar la forma de semicírculos. La mayoría de los no conductores tiene emitancias mucho más pequeñas para ángulos de emisión que se encuentren en la vecindad de los 90° (véase figura 23.7). La desviación de la ley del coseno, es aún mayor para muchos conductores (ver figura 23.8). La emitancia permanece constante en la vecindad de la dirección normal a la emisión; al aumentar el ángulo de emisión, primero aumenta y después disminuye, cuando el primero tiende a 90°.

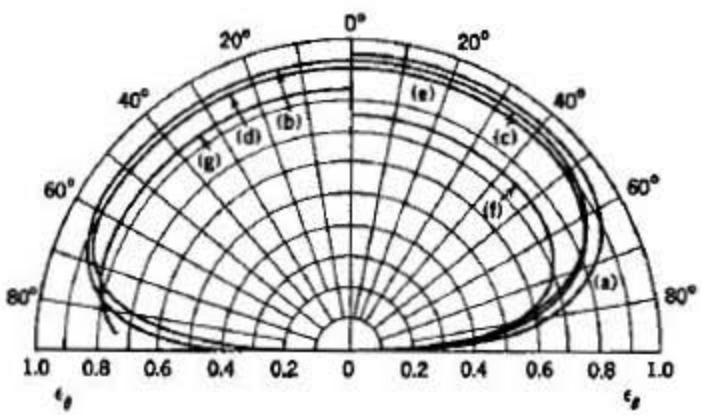


Figura 23.7 Variación de la emitancia con la dirección, para los siguientes no conductores: (a) Hielo mojado. (b) Madera. (c) Vidrio. (d) Papel. (e) Barro. (f) Oxido de cobre. (g) Oxido de aluminio.

La emitancia total promedio se puede calcular usando la expresión siguiente:

$$\epsilon = \int_0^{\pi/2} \epsilon_\theta \operatorname{sen} 2\theta \, d\theta$$

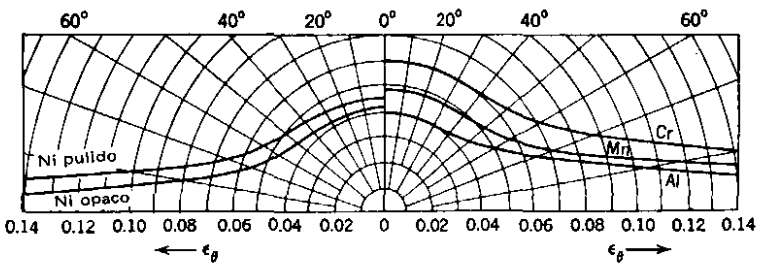


Figura 23.8 Variación de la emitancia con la dirección en los conductores.

La emitancia, ϵ, es, en general, diferente de la emitancia normal, ϵ_n (emitancia en la dirección normal). Se ha encontrado que en la mayoría de las superficies brillantes metálicas, la emitancia normal es, aproximadamente, un 20% más alta que ϵ_n. La tabla 23.2 es una lista de ϵ/ϵ_n para algunas superficies metálicas representativas. Para las superficies no metálicas u otras, la razón ϵ/ϵ_n es ligeramente menor que la unidad. A causa de la inconsistencia que puede encontrarse a menudo entre varias superficies, los valores normales de la emitancia se pueden usar sin causar errores apreciables, para la emitancia total (ver tabla 23.3).

Tabla 23.2 Razón ϵ/ϵ_n correspondiente a superficies metálicas brillantes

Aluminio laminado, brillante (338° F)	$\frac{0.049}{0.039} = 1.25$
Níquel, chapa brillante (212° F)	$\frac{0.046}{0.041} = 1.12$
Níquel, pulido (212° F)	$\frac{0.053}{0.045} = 1.18$
Manganito laminado, brillante (245° F)	$\frac{0.057}{0.048} = 1.19$
Cromo, pulido (302° F)	$\frac{0.071}{0.058} = 1.22$
Hierro brillante, el aguafuerte (302° F)	$\frac{0.158}{0.128} = 1.23$
Bismuto, brillante (176° F)	$\frac{0.340}{0.336} = 1.08$

Se pueden hacer algunas generalizaciones concernientes a la emitancia de las superficies:

a) En general, la emitancia depende de las condiciones de la superficie.

b) La emitancia de las superficies metálicas altamente pulimentadas es muy baja.

c) La emitancia de toda superficie metálica aumenta con la temperatura.

d) La formación de una gruesa capa de óxido y la rugosidad de la superficie aumentan la emitancia considerablemente.

e) La razón ϵ/ϵ_n siempre es mayor que la unidad en las superficies metálicas brillantes.

El valor 1.2 se puede aceptar como buen promedio.

f) Las emitancias de las superficies no metálicas son mucho más altas que las de las superficies metálicas y muestran una disminución al aumentar la temperatura.

g) Las emitancias de los óxidos de colores de metales pesados como Zn, Fe, y Cr, son mucho mayores que las emitancias de los óxidos blancos de los metales ligeros como Ca, Mg y Al.

Tabla 23.3 Razón ϵ/ϵ_n correspondiente a superficies no metálicas y otras

Oxido cúprico (300°F)	0.96
Arcilla refractaria (183°F)	0.99
Papel (200°F)	0.97
Madera terciada (158°F)	0.97
Vidrio (200°F)	0.93
Hielo (32°F)	0.95

Absorbencia. La absorbencia de una superficie depende de los factores que afecten a la emitancia y, además, de la calidad de la radiación incidente. Se puede decir, una vez más, que la ley de Kirchhoff es válida estrictamente en condiciones de equilibrio térmico. Esto es, si un cuerpo a una temperatura T_1 recibe radiación de un cuerpo negro que también se encuentra a una temperatura T_1, entonces $\alpha = e$. En la mayoría de los materiales, en los valores usuales de temperatura que se encuentran en la práctica (desde la temperatura ambiente hasta aproximadamente 2000° F) la relación $\alpha = \epsilon$ es válida y bastante exacta. Sin embargo, si la radiación incidente procede de una fuente cuya temperatura es muy alta, digamos, radiación solar (~10,000° F) la emitancia y la absorbencia de las superficies ordinarias pueden diferir mucho. En tanto que los óxidos metálicos exhiben, usualmente, una emitancia (y absorbencia) cuyo valor es, aproximadamente, de 0.95 a temperaturas ordinarias, su absorbencia desciende hasta 0.15 si se les expone a la radiación solar. En cambio las superficies metálicas recién pulidas tienen una emitancia (y absorbencia, en condiciones de equilibrio) cuyo valor es, aproximadamente, de 0.05. Al exponerlas a la radiación solar, su absorbencia aumenta a 0.2 o hasta a 0.4.

En estas circunstancias se puede emplear una notación de doble subíndice, $\alpha_{1,2}$: el primer subíndice se refiere a la temperatura de la superficie receptora y el segundo a la temperatura de la radiación incidente.

Superficies grises. Como la emitancia, la absorbencia monocromática, α_λ, de una superficie, puede variar con la longitud de onda. Si α_λ es una constante y, por lo tanto, es independiente de λ, la superficie se llama *gris*. En una superficie gris la absorbencia total promedio será independiente de la distribución espectral de energía de la radiación incidente. Por lo tanto, la emitancia, ϵ, se puede usar en lugar de α, aunque la temperatura de la radiación incidente y del receptor no son iguales. Algunas buenas aproximaciones de superficies grises son: una pizarra, una tabla untada con brea y el linoleum oscuro. En la tabla 23.4 aparecen las emitancias, a diversas temperaturas, de diferentes materiales.

Tabla 23.4 Emitancia total normal correspondiente a diversas superficies (compilada por H. C. Hottel)*

Superficie	*T*, °F†	*Emitancia*
A. Metales y sus óxidos		
Aluminio:		
Placa altamente pulida 98.3% pura	440–1070	0.039–0.057
Lámina comercial	212	0.09
Oxidada a 1110° F	390–1110	0.11–0.19
Altamente oxidada	200–940	0.20–0.31
Bronce		
Pulido	100–600	0.10
Oxidado por calentamiento a 1110° F	390–1110	0.61–0.59
Cromo (ver aleaciones de níquel para aceros Ni-Cr).		
Pulido	100–2000	0.08–0.36
Cobre		
Pulido	212	0.052
Placa calentada a 1110° F	390–1110	0.57
Oxido cúprico	1470–2010	0.66–0.54
Cobre fundido	1970–2330	0.16–0.13
Oro		
Puro, altamente pulido	440–1160	0.018–0.035
Hierro y acero (no incluye el inoxidable)		
Superficies metálicas (o capa muy delgada de óxido)		
Hierro, pulido	800–1880	0.14–0.38
Hierro colado, pulido	392	0.21
Hierro forjado, altamente pulido	100–480	0.28
Superficies oxidadas		
Placa de hierro, completamente oxidada	67	0.69

*Con licencia de W. H. McAdams (editor), *Heat Transmission*, Tercera edición, McGraw Hill Book Company, 1954, Tabla de emitancia normal total compilada por H. C. Hottel.

†Cuando las temperaturas y las emitancias aparecen en parejas, separadas por guiones, se corresponden y es permisible la interpretación lineal (pág. 451).

Superficie	*T °F*	*Emitacia*
Placa de acero, rugosa	100–700	0.94–0.97
Superficies fundidas		
Hierro colado	2370–2550	0.29
Acero dulce	2910–3270	0.28
Plomo		
Puro (99.96%) sin oxidar	260–440	0.057–0.075
Gris oxidado	75	0.28
Aleaciones de níquel		
Cromoníquel	125–1894	0.64–0.76
Cobre-níquel, pulido	212	0.059
Alambre de nicromo, brillante	120–1830	0.65–0.79
Alambre de nicromo, oxidado	120–930	0.95–0.98
Platino		
Puro, placa pulida	440–1160	0.054–0.104
Tira	1700–2960	0.12–0.17
Filamento	80–2240	0.036–0.192
Alambre	440–2510	0.073–0.182
Plata		
Pulido, puro	440–1160	0.020–0.032
Pulido	100–700	0.022–0.031
Aceros inoxidables		
Pulido	212	0.074
Tipo 310 (25 Cr; 20 Ni)		
Café, manchado, oxidado debido a su uso en un horno	420–980	0.90–0.97
Estaño		
Hierro estañoso brillante	76	0.043 and 0.064
Brillante	122	0.06
Lámina comercial de hierro estañado	212	0.07, 0.08
Tungsteno		
Filamento, viejo	80 6000	0.032–0.35
Filamento	6000	0.39
Capa pulida	212	0.066
Cinc		
Puro, pulido, comercial al 99.1%	440–620	0.045–0.053
Oxidado por calentamiento a 750° F	750	0.11
B. Material refractario, de construcción, pintura y diversos		
Asbesto		
Tabla	74	0.96
Papel	100–700	0.93–0.94
Ladrillo		
Rojo, rugoso pero sin irregularidades grandes	70	0.93
Ladrillo, vidriado	2012	0.75
De construcción	1832	0.45
Refractario	1832	0.75

Superficie	*T* °F	*Emitacia*
Carbón		
Filamento	1900–2560	0.526
Capa de negro de humo y vidrio	209–440	0.96–0.95
Capa delgada del mismo sobre placa de hierro	69	0.927
Vidrio		
Liso	72	0.94
Pyrex,* plomo y sosa	500–1000	0.95–0.85
Yeso de 0.02 in de grueso sobre placa lisa o ennegrecida	70	0.903
Ladrillo refracterio de magnesita	1832	0.38
Mármol, gris claro, pulido	72	0.93
Roble, cepillado	70	0.90
Pinturas, lacas, barnices		
Barniz esmalte blanco nieve sobre placa rugosa de acero	73	0.906
Laca negra brillante, rociada sobre hierro	76	0.875
Barniz de laca negro, brillante, sobre lámina de acero estañado	70	0.821
Barniz de laca mate	170–295	0.91
Laca blanca o negra	100–200	0.80–0.95
Laca negra mate	100–200	0.96–0.98
Pinturas de aceite, 16 diferentes, de todos colores	212	0.92–0.96
Pintura Al, después de calentada a 620° F	300–600	0.35
Yeso, cal rugosa	50–190	0.91
Papel para techos	69	0.91
Hule		
Duro, placa brillante	74	0.94
Suave, gris rugoso (restaurado)	76	0.86
Agua	32–212	0.95–0.963

23.7 TRANSFERENCIA DE CALOR RADIANTE ENTRE CUERPOS NEGROS

El intercambio de energía entre cuerpos negros depende de la diferencia de temperatura y de la geometría; esta última juega un papel dominante. Analice las dos superficies de la figura 23.9. La energía radiante procedente de una superficie negra en dA_1 y recibida en dA_2 es:

$$dq_{1-2} = I_{b_1} \cos \theta_1 \, d\Omega_{1-2} \, dA_1$$

*Pyrex es el nombre comercial del vidrio refractario (N. del T.).

donde $d\Omega_{1-2}$ es el ángulo sólido subtendido por dA_2, visto desde dA_1. Por lo tanto:

$$d\Omega_{1-2} = \cos\theta_2 \frac{dA_2}{r^2}$$

y como $I_{b_1} = E_{b_1}/\pi$, la transferencia de calor de 1 a 2 es:

$$dq_{1-2} = E_{b_1}\, dA_1 \left\{ \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2\, dA_2}{\pi r^2} \right\}$$

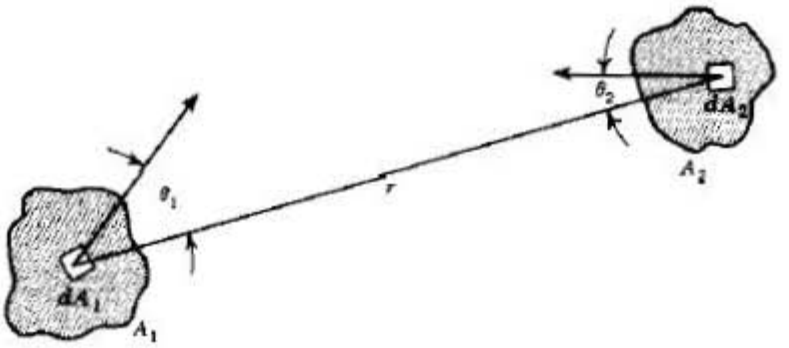


Figura 23.9 Transferencia de calor radiante entre dos superficies.

Se observará que el término que aparece dentro del paréntesis rectangular, sólo depende de la geometría. Del mismo modo puede determinarse la energía emitida por dA_2 y recibida por dA_1. Esto es:

$$dq_{2-1} = E_{b_2}\, dA_2 \left\{ \frac{\cos\theta_2 \cos\theta_1\, dA_1}{\pi r^2} \right\}$$

La transferencia neta de calor entre las superficies dA_1 y dA_2 es, sencillamente:

$$dq_{1-2\,net} = dq_{1\rightleftarrows 2} = dq_{1-2} - dq_{2-1}$$

ó

$$dq_{1\rightleftarrows 2} = (E_{b_1} - E_{b_2}) \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2\, dA_1\, dA_2}{\pi r^2}$$

Integrando sobre las superficies 1 y 2, se obtiene:

$$q_{1\rightleftarrows 2} = (E_{b_1} - E_{b_2}) \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2\, dA_2\, dA_1}{\pi r^2}$$

La inserción de A_1/A_1, da:

$$q_{1\rightleftharpoons 2} = (E_{b_1} - E_{b_2})A_1\left[\frac{1}{A_1}\int_{A_1}\int_{A_2}\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2\, dA_2\, dA_1}{\pi r^2}\right] \qquad (23\text{-}9)$$

El término que aparece dentro del paréntesis rectangular se llama *factor de vista* $F_{1\text{-}2}$. Si se hubiera usado A_2 como referencia, entonces el factor de vista sería F_{21}. Lógicamente la transferencia neta de calor no está afectada por estas operaciones y, por lo tanto, $A_1F_{12} = A_2F_{21}$.

Se puede obtener una interpretación física del factor de vista, a partir del siguiente argumento: Como la energía total que abandona la superficie A_1 es E_bA_1, la cantidad de calor que recibe la superficie A_2 es $E_{b_1}A_1F_{12}$. La cantidad de calor que pierde la superficie A_2 es $E_{b_2}A_2$, en tanto que, la cantidad que llega a A_1 es $E_{b_2}A_2F_{21}$. La rapidez neta de transferencia de energía entre A_1 y A_2 o $E_{b_1}A_1F_{12} - E_{b_2}A_2F_{21}$. Esto puede reordenarse para obtener $(E_{b_1} - E_{b_2})A_1F_{12}$. Por lo tanto, el factor de vista F_{12} se puede interpretar como la fracción de energía del cuerpo negro, que abandona el área A_1 y llega al área A_2. Obviamente, el factor de vista no puede ser mayor que la unidad.

Antes de examinar algunos factores de vista específicos, hay varias generalizaciones dignas de tomarse en cuenta, en relación con los factores de vista.

1. La *relación de reciprocidad*, $A_1F_{12} = A_2F_{21}$, siempre es válida.
2. El factor de vista es independiente de la temperatura. Es puramente geométrico.
3. En una cavidad cerrada, $F_{11} + F_{12} + F_{13} + \cdots = 1$.

En muchos casos se puede determinar el factor de vista sin hacer uso de la integración. Como ejemplo se presenta el caso siguiente:

EJEMPLO 1

Examínese el factor de vista entre un hemisferio y un plano, como los que aparecen en la figura 23.10 Determínense los factores de vista F_{11}, F_{12} y F_{21}.

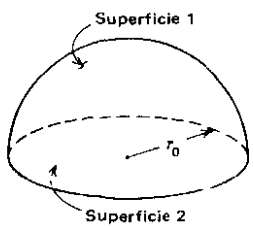


Figura 23.10 Hemisferio y plano.

El factor de vista F_{21} es igual a la unidad, ya que la superficie 2 sólo ve a la superficie 1. Se puede escribir, en relación a la superficie 2: $F_{11}+F_{12}=1$ y $A_1F_{12}=A_2F_{21}$. Como $F_{21}=1$, $A_2=\pi r_0^2$, y $A_1=2\pi r_0^2$, las relaciones anteriores dan como resultado:

$$F_{12}=F_{21}\frac{A_2}{A_1}=(1)\left(\frac{\pi r_0^2}{2\pi r_0^2}\right)=\frac{1}{2}$$

y

$$F_{11}=1-F_{12}=\frac{1}{2}$$

El factor de vista F_{12} en general puede determinarse por integración. Como

$$F_{12}=\frac{1}{A_1}\int_{A_1}\int_{A_2}\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2\,dA_2\,dA_1}{\pi r^2} \tag{23-10}$$

este proceso de integración se hace muy tedioso y el factor de vista de una geometría complicada requiere del uso de métodos numéricos. Para poder comprender la evaluación analítica de los factores de vista, determínese el factor de vista entre el área diferencial dA_1 y el plano paralelo A_2 que aparece en la figura 23.11. El factor de vista F está dado por:

$$F_{dA_1A_2}=\frac{1}{dA_1}\int_{A_1}\int_{A_2}\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2\,dA_2\,dA_1}{\pi r^2}$$

y como $A_2>>dA_1$, la vista de dA_2 a dA_1 es independiente de la posición sobre dA_1, por lo cual:

$$F_{dA_1A_2}=\frac{1}{\pi}\int_{A_2}\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2}{r^2}\,dA_2$$

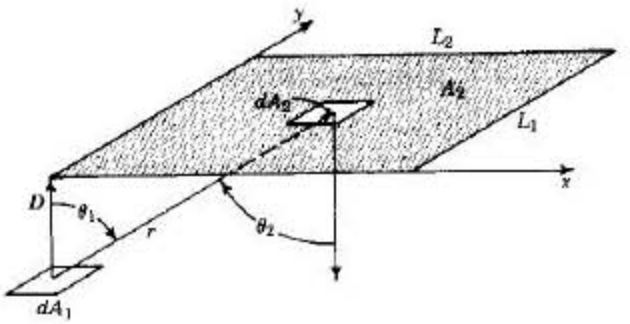


Figura 23.11 Areas diferencial y paralela finita.

También debe notarse que $\theta_1=\theta_2$ y que $\cos\theta=D/r$, donde $r^2=D^2+x^2+y^2$. La integral resultante es:

$$F_{dA_1A_2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{L_1}\int_0^{L_2}\frac{D^2\,dx\,dy}{(D^2+x^2+y^2)^2}$$

ó

$$F_{dA_1A_2} = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{L_1}{\sqrt{D^2+L_1^2}}\tan^{-1}\frac{L_2}{\sqrt{D^2+L_1^2}} + \frac{L_2}{\sqrt{D^2+L_2^2}}\tan^{-1}\frac{L_1}{\sqrt{D^2+L_2^2}}\right\} \quad (23\text{-}11)$$

El factor de vista dado por la ecuación (23-11) aparece gráficamente en la figura 23.12.

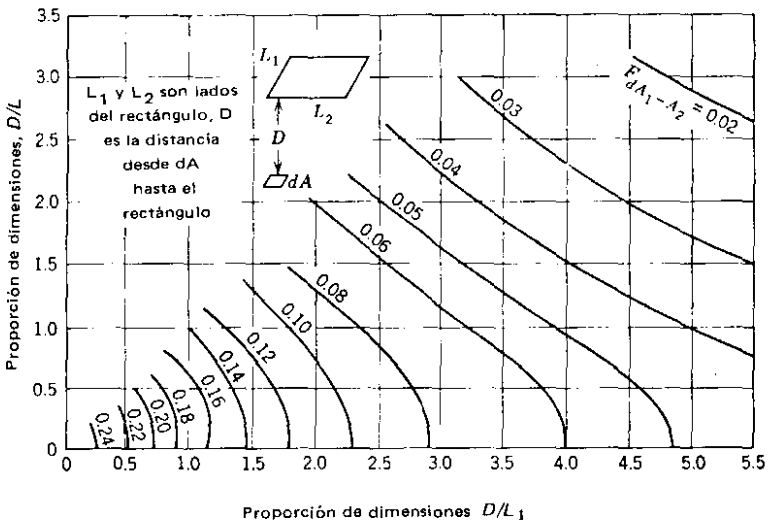


Figura 23.12 Factor de vista correspondiente a un elemento de superficie y a una superficie rectangular paralela a él. (De H. C. Hottel, "Radiant Heat Transmission" *Mech. Engrg*, 52 (1930) con licencia de los editores.)

Las figuras 23.13, 23.14 y 23.15, también ponen de manifiesto algunos factores de vista, correspondientes a geometrías simples.

EJEMPLO 2

Determínese el factor de vista desde un cuadrado de 1 ft de lado hacia un plano rectangular de 10 ft por 12 ft centrado a 8 ft sobre el cuadrado de 1 ft de lado.

El área más pequeña puede considerarse diferencial y puede usarse la figura 23.12. El área de 10 ft por 12 ft puede dividirse en cuatro rectángulos de 5 ft por 6 ft que se encuentran directamente sobre el área más pequeña. Por lo tanto, el factor total de vista es la suma de los factores de vista de cada rectángulo subdividido. Si se usan $D = 8$, $L_1 = 6$, $L_2 = 5$, se encontrará que el factor de vista de la figura 23.12 es 0.09. El factor total de vista es la suma de los factores de vista o sea 0.36.

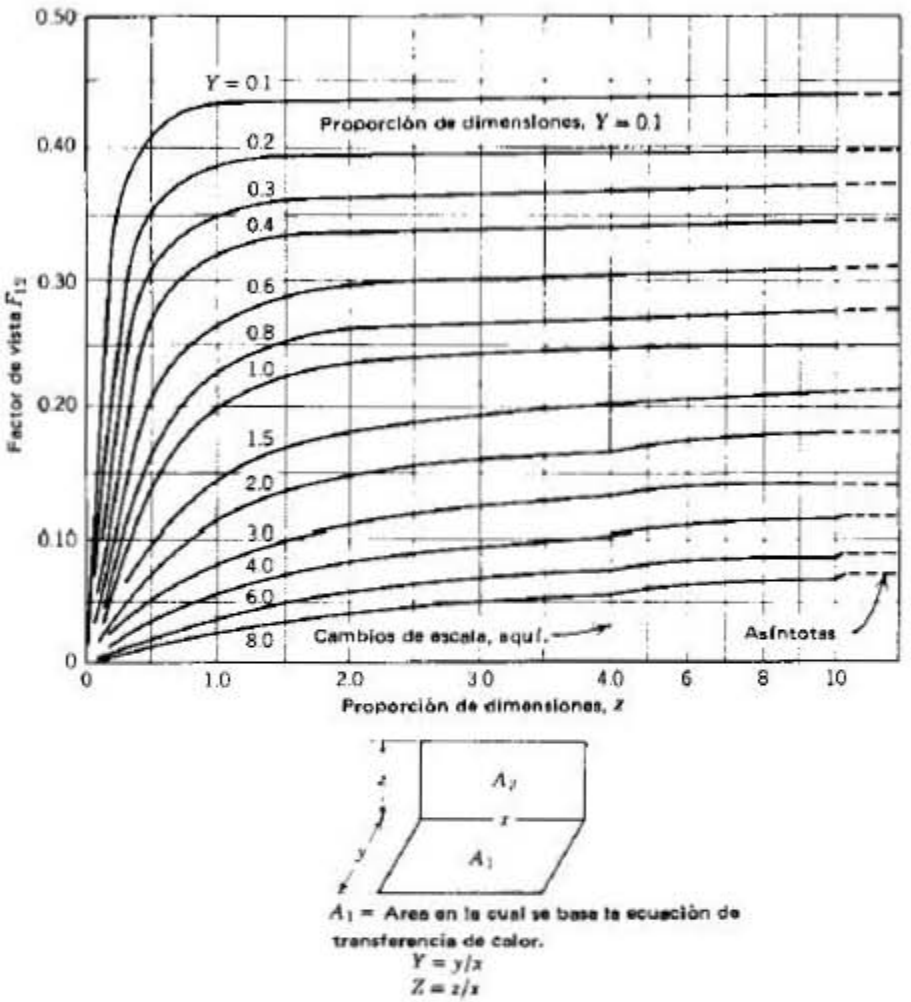


Figura 23.13 Factor de vista de rectángulos adyacentes en planos perpendiculares (De H. C. Hottel, "Radiant Heat Transmission" *Mech. Engrg*, 52 (1930). Con licencia de los editores.)

23.8 INTERCAMBIO DE ENERGIA RADIANTE EN CAVIDADES NEGRAS CERRADAS

Tal como se hizo notar con anterioridad, una superficie que ve a otras n superficies se puede describir mediante la relación:

$$F_{11} + F_{12} + \cdots + F_{1j} + \cdots + F_{1n} = 1$$

ó

$$\sum_{j=1}^{n} F_{1j} = 1 \qquad (23\text{-}12)$$

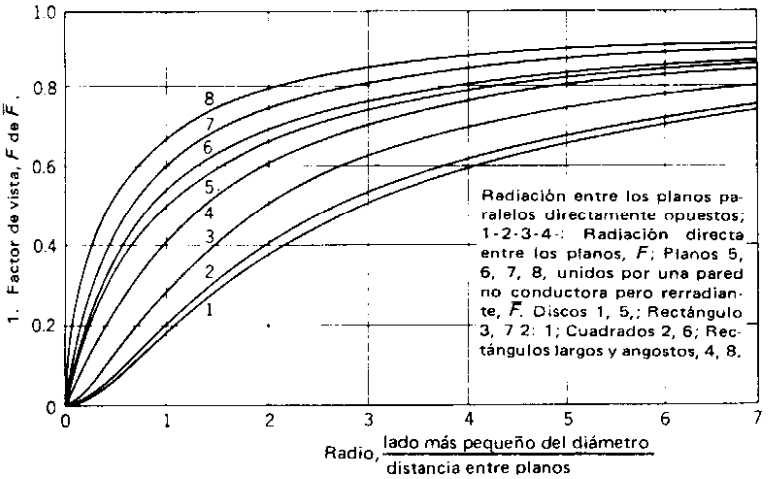


Figura 23.14 Factores de vista correspondientes a cuadrados iguales y paralelos. Las curvas marcadas con los números 5, 6, 7 y 8 permiten una variación continua en las temperaturas de las paredes laterales, de la parte superior a la inferior (De H. C. Hottel "Radiant Heat Transmission" *Mech. Engrg*, 52 (1930). Con licencia de los editores.)

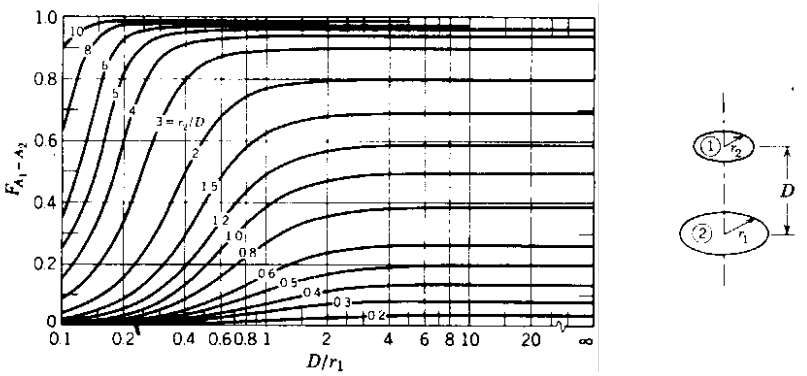


Figura 23.15 Factores de vista correspondientes a discos paralelos opuestos de tamaños diferentes.

Obviamente, la inclusión de A_1 en la ecuación (23-12) da como resultado:

$$\sum_{i=1}^{n} A_1 F_{1i} = A_1 \tag{23-13}$$

La rapidez de intercambio de energía de calor radiante entre cualesquiera dos superficies negras, está dada por:

$$q_{12} = A_1 F_{12}(E_{b_1} - E_{b_2}) = A_2 F_{21}(E_{b_1} - E_{b_2}) \tag{23-14}$$

El intercambio de energía radiante entre la superficie 1 y cualquier otra llamada i, en una cavidad cerrada negra, está dado por:

$$q_{1i} = A_1 F_{1i}(E_{b_1} - E_{b_i}) \tag{23-15}$$

La transferencia de calor entre una cavidad en la que la superficie 1 ve a n superficies, y estas últimas es:

$$q_{1\text{ - otros}} = \sum_{i=1}^{n} q_{1i} = \sum_{i=1}^{n} A_1 F_{1i}(E_{b_1} - E_{b_i}) \tag{23-16}$$

Puede pensarse que la ecuación (23-16) es análoga a la ley de Ohm, donde la cantidad de transferencia, q, la fuerza potencial impulsora, $E_{b_1} - E_{b_i}$; y la resistencia térmica, $1/A_1F_{1i}$; tienen sus correspondientes eléctricas, I, ΔV y R, respectivamente.

La figura 23.16 muestran los circuitos eléctricos análogos correspondientes a cavidades que constan de 3 y 4 superficies, respectivamente.

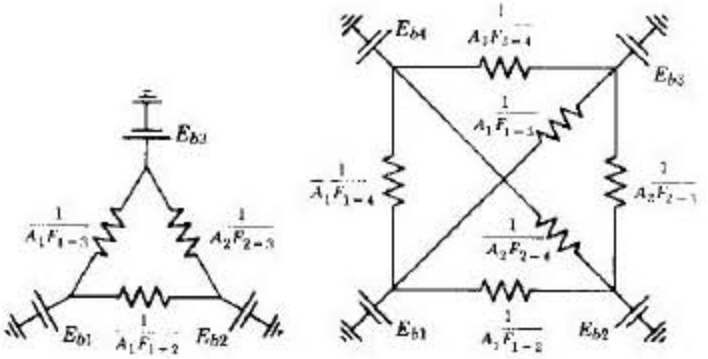


Figura 23.16

La solución a un problema de tres superficies, o sea, el de encontrar q_{12}, q_{13}, q_{23}, aunque un poco tedioso, puede resolverse en un tiempo razonable. Cuando se analizan cavidades de 4 o más superficies es impráctico tratar de encontrar una solución por medios analíticos. En tales casos se recurre a métodos numéricos o se establece una analogía eléctrica y se miden las corrientes en lugares distintos del circuito correspondiente. Si se desea estudiar algunos ejemplos detallados, el lector puede consulta a Welty*.

*J. R. Welty *Engeneering Heat Transfer*, Wiley, Nueva York, 1974.

23.9 INTERCAMBIO DE ENERGIA RADIANTE HABIENDO SUPERFICIES RERRADIANTES PRESENTES

Los diagramas de los circuitos que aparecen en la figura 23.16, muestran una trayectoria a tierra en cada una de las uniones. El análogo térmico es una superficie que tiene cierta influencia en tanto que su temperatura se mantenga a cierto nivel, mediante la adición o el rechazo de energía. Tal superficie se encuentra en contacto con su medio circundante y conduce calor debido a una diferencia de temperatura impuesta a través de ella.

En las aplicaciones a la radiación se encuentran superficies que están efectivamente aisladas de su medio circundante. Una de estas superficies reemite toda la energía radiante que absorbe, usualmente de manera difusa. Por lo tanto, dichas superficies actúan como reflectores y sus temperaturas "flotan" en un valor que se requiere para que el sistema permanezca en equilibrio. La figura 23.17 muestra una situación física y su análoga eléctrica correspondiente a una cavidad de tres superficies, siendo una de ellas, una superficie rerradiante no absorbente.

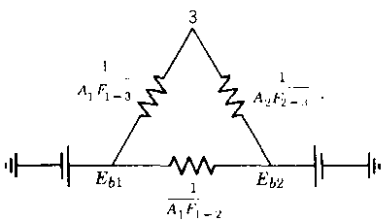


Figura 23.17

Si se calcula la transferencia neta de calor entre las dos superficies negras: q_{1-2}, se tiene:

$$q_{12} = \frac{E_{b_1} - E_{b_2}}{R_{\text{equiv}}}$$

$$= \left[A_1 F_{12} + \frac{1}{1/A_1F_{13} + 1/A_2F_{23}} \right] (E_{b_1} - E_{b_2})$$

$$= A_1 \left[F_{12} + \frac{1}{1/F_{13} + A_1/A_2F_{23}} \right] (E_{b_1} - E_{b_2})$$

$$= A_1 \bar{F}_{12} (E_{b_1} - E_{b_2}) \qquad (23\text{-}17)$$

La expresión resultante, o sea la ecuación (23-17) contiene un nuevo término, $\bar{F}_{12}$, que se denomina *factor de vista rerradiante*. Este nuevo factor, $\bar{F}_{12}$ es equivalente al término contenido en el paréntesis rectangular de la

expresión anterior, que incluye el intercambio directo entre las superficies 1 y 2, F_{12}, más los términos correspondientes a la energía que estas superficies intercambian, por medio de la superficie rerradiante que interviene. Evidentemente, $\overline{F}_{12}$ siempre es mayor que F_{12}. La figura 23.14 permite que se puedan leer directamente los factores de vista rerradiante correspondientes a geometrías sencillas. En otras situaciones en las que las curvas, tales como la de la figura no pueden obtenerse, puede usarse el análogo eléctrico, con la sencilla modificación de que no existe la trayectoria a tierra en la superficie rerradiante.

23.10 TRANSFERENCIA DE ENERGIA RADIANTE ENTRE SUPERFICIES GRISES

En el caso de las superficies que no son negras, la determinación de la transferencia de energía se complica más. En los cuerpos grises, esto es, en las superficies para las cuales, tanto la absorbencia como la emitancia son independientes de la longitud de onda, se pueden hacer simplificaciones cosiderables. La transferencia neta de calor que parte de la superficie y que aparece en la figura 23.18 está determinada por la diferencia entre la radia-

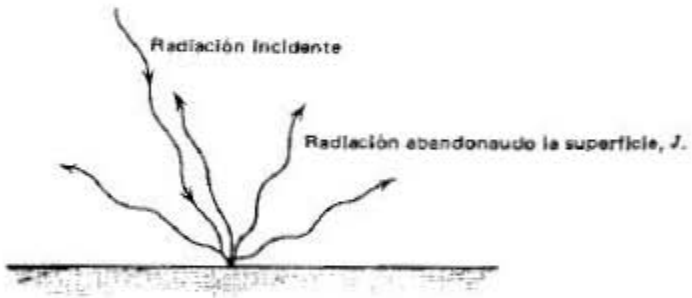


Figura 23.18 Transferencia de calor en una superficie.

ción que abandona la superficie y la radiación incidente en ella. La *radiosidad*, J, se define como la rapidez con que la radiación abandona una superficie dada por unidad de área. La *irradiación*, G, se define como la rapidez con la que incide la radiación por unidad de área. En un cuerpo gris, la radiosidad, la irradiación y el poder emisivo total, se relacionan por medio de:

$$J = \rho G + \epsilon E_b \tag{23-18}$$

donde ρ es la reflectancia y ϵ la emitancia. La transferencia neta desde una superficie es:

$$\frac{q_{neta}}{A} = J - G = \epsilon E_b + \rho G - G = \epsilon E_b - (1-\rho)G \tag{23-19}$$

En la mayoría de los casos es útil eliminar a G de la ecuación (23-19). Esto da origen a:

$$\frac{q_{\text{neta}}}{A} = \epsilon E_b - (1-\rho)\frac{(J-\epsilon E_b)}{\rho}$$

Como $\alpha + \rho = 1$ en una superficie opaca,

$$\frac{q_{\text{neta}}}{A} = \frac{\epsilon E_b}{\rho} - \frac{\alpha J}{\rho} \tag{23-20}$$

Cuando la emitancia y la absorbencia pueden considerarse iguales, se puede hacer una simplificación muy importante en la ecuación (23-20). Haciendo $\alpha = \epsilon$, se obtiene:

$$q_{\text{neta}} = \frac{A\epsilon}{\rho}(E_b - J) \tag{23-21}$$

lo cual sugiere una analogía con la ley de Ohm, $V = IR$, donde el calor neto que abandona una superficie puede imaginarse como una corriente, la diferencia $E_b - J$ se puede comparar a una diferencia de potencial y el cociente $\rho/\epsilon A$, se puede equiparar con una resistencia. La figura 23.19, muestra esta analogía.

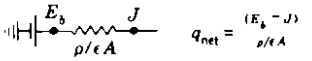


Figura23.19

Ahora el intercambio neto de calor por medio de radiación entre dos superficies dependerá de sus radiosidades y de sus "vistas" relativas mutuas. Basándose en la ecuación (23-8), se puede escribir:

$$q_{1=2} = A_1F_{12}(J_1 - J_2) = A_2F_{21}(J_1 - J_2)$$

Ahora puede escribirse el intercambio neto en términos de las diferentes "resistencias" que ofrece cada una de las fracciones de la trayectoria de transferencia, en la forma siguiente.

Rapidez de calor que abandona la superficie 1: $$q = \frac{A_1\epsilon_1}{\rho_1}(E_{b_1} - J_1)$$

Rapidez de intercambio de calor entre las superficies 1 y 2: $q = A_1F_{12}(J_1 - J_2)$

Rapidez del calor que se recibe en la superficie 2: $$q = \frac{A_2\epsilon_2}{\rho_2}(J_2 - E_{b_2})$$

Si las superficies 1 y 2 se ven mutuamente y no a ninguna otra, entonces todas las q de la ecuación anterior son equivalentes. En tal caso se puede escribir una expresión adicional correspondiente a q, en términos de la fuerza impulsora total, $E_{b_1} - E_{b_2}$. Esta expresión es:

$$q = \frac{E_{b_1} - E_{b_2}}{\rho_1/A_1\epsilon_1 + 1/A_1F_{12} + \rho_2/A_2\epsilon_2} \tag{23-22}$$

en la cual los términos que aparecen en el denominador son las resistencias equivalentes debidas a las características de la superficie 1 y la geometría y las características de la superficie 2, respectivamente. La analogía eléctrica de la ecuación (23-22), aparece en la figura 23.20.

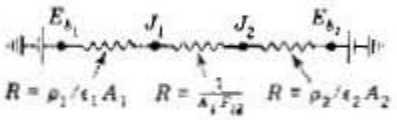


Figura 23.20 Red equivalente para relaciones de cuerpo gris entre dos superficies.

Las suposiciones que se requieren para que se pueda usar la analogía eléctrica en la solución de problemas de radiación, son los siguientes:

1. Todas las superficies deben ser grises.
2. Todas las superficies deben ser isotérmicas.
3. La ley de Kirchhoff debe tener validez, esto es $\alpha = \epsilon$.
4. No debe haber un medio absorbente entre las superficies que participan.

El ejemplo 3, que se da a continuación, muestra la solución de un problema de cuerpo gris.

EJEMPLO 3

Dos placas paralelas de 7 ft cuadrados están situadas a 7 ft una de la otra. La placa A_1 se mantiene a una temperatura de 1540° F y la placa A_2 se mantiene a 540° F. Determine la rapidez neta de transferencia de energía de la placa de más alta temperatura en las siguientes condiciones:

a) Las placas son negras y los alrededores son negros y están a 0° R.
b) Las placas son negras y la región que las encierra consiste en paredes rerradiantes.
c) Las placas tienen emitancias de 0.4 y 0.8, respectivamente y los alrededores están a 0° R y son negros.

En la figura 23.21 pueden verse los circuitos equivalentes para los incisos (a), (b) y (c).

Se observa que la determinación del flujo calorífico requiere de la evaluación de las cantidades F_{12}, F_{1R} y $\bar{F}_{12}$, que son las siguientes:

F_{12} en la figura 23.14 es 0.20
$\bar{F}_{12}$ en la figura 23.14 es 0.54

y

$$F_{1R} = 1 - F_{12} = 0.80$$

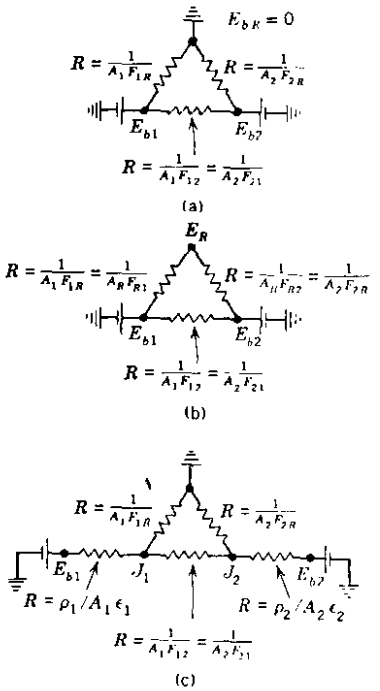


Figura 23.21 Circuitos equivalentes correspondientes al ejemplo 3.

Inciso (a). La rapidez neta con la que el calor abandona la placa 1, es:

$$q_{1\text{ neta}} = q_{1 \rightleftharpoons 2} + q_{1 \rightleftharpoons R}$$

ó

$$q_{1\text{neta}} = A_1 F_{12}(E_{b_1} - E_{b_2}) + A_1 F_{1R} E_{b_1}$$

por lo cual

$$q_{1\text{neta}} = (49 \times 0.20 \times 25\,710) + (49 \times 0.80 + 27\,424)\ \text{Btu/hr}$$

$$= 252\,000 + 1\,075\,000 = 1\,327\,000\ \text{Btu/hr}$$

Inciso (b). Cuando se introducen las paredes rerradiantes, el flujo de calor se transforma en:

$$q_{1\text{neta}} = q_{1 \rightleftharpoons 2} = (E_{b_1} - E_{b_2})\left(A_1 F_{12} + \frac{1}{(1/A_1 F_{1R}) + (1/A_2 F_{2R})}\right)$$

como $A_1 = A_2$ y $= F_{1R}$,

$$q_{1\text{neta}} = A_1(E_{b_1} - E_{b_2})\left(F_{12} + \frac{F_{1R}}{2}\right)$$

Ahora, para la superficie 1 se tiene: $F_{12} + F_{1R} = 1$, y, por lo tanto, $(F_{1R}/2) = (1 - F_{12})/2$, dando como resultado:

$$q_{1\text{neta}} = A_1(E_{b_1} - E_{b_2})\left(\frac{F_{12} + 1}{2}\right) = 755\,000\ \text{Btu/hr}$$

Una solución alterna al inciso (b) se puede obtener usando la expresión $q_{1\ \text{neta}} = A_1 \bar{F}_{12}(E_{b1} - E_{b2})$.

El valor de $\bar{F}_{12}$, en la figura 23.15, da como resultado $q_{1\text{neta}} = 680{,}000$ Btu/h. Los valores de $\bar{F}_{12}$ obtenidos a partir de la figura 23.15, permiten una distribución continua de la temperatura a lo largo de la superficie rerradiante de T_1 a T_2. El análisis que se hace utilizando el circuito análogo se basa en la suposición de que la pared rerradiante se encuentra a una temperatura constante. En realidad la temperatura sí varía, de manera que el circuito análogo produce cierto error, en este caso, del 10% aproximadamente.

Inciso (c). El análisis del circuito que aparece en la figura 23.21 (c), da como resultado: $q_{1\text{neta}} = 439{,}000$ Btu/h.

23.11 RADIACION DE LOS GASES

Hasta ahora la interacción de la radiación con los gases se ha despreciado. Los gases emiten y absorben radiación en bandas discretas de energía determinadas por los estados permitidos de energía dentro de la molécula. Cuando la energía asociada, digamos, con el movimiento vibracional o rotacional de una molécula puede tomar solamente ciertos valores, se deduce que la cantidad de energía emitida o absorbida por una molécula tendrá una frecuencia: $\nu = \Delta E/h$, que corresponde a la diferencia de energía, ΔE, entre estados permitidos. Por lo tanto, mientras la energía emitida por un sólido comprende un espectro continuo, la radiación emitida y absorbida por un gas está restringida a bandas. En la figura 23.22 pueden verse las bandas de emisión de bióxido de carbono y vapor de agua relativas a una radiación de cuerpo negro a 1,500° F.

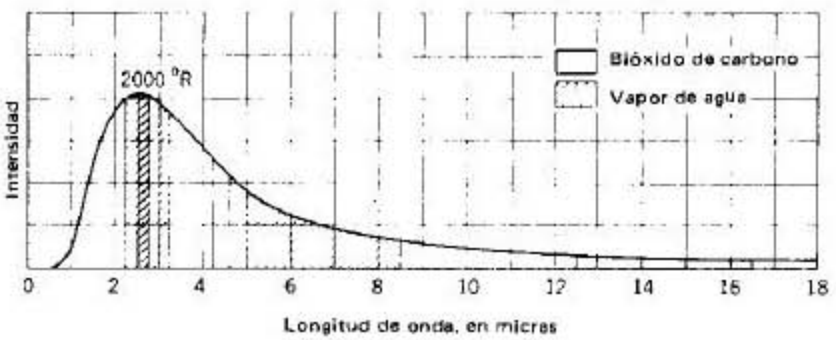


Figura 23.22 Bandas de emisión del CO_2 y del H_2O.

La emisión de radiación correspondiente a estos gases ocurre en la región infrarrojo del espectro.

Los gases no luminosos, gases inertes y los gases diatómicos de composición simétrica, tales como O_2, N_2 y H_2, pueden considerarse transparentes a la radiación térmica. Algunas clases importantes de medios que absorben y emiten radiación son los gases poliatómicos tales como CO_2 y H_2O así como

las moléculas asimétricas tales como el CO. Estos gases también están asociados con los productos de combustión de los hidrocarburos. Es muy difícil determinar la absorción y emisión de la radiación, ya que éstas están relacionadas con la temperatura, composición, densidad y geometría del gas. Hay varias simplificaciones que permiten que se lleve a cabo el cálculo de la radiación de una manera directa. Estas idealizaciones on las siguientes:

1. El gas está en equilibrio termodinámico. El estado del gas se puede caracterizar localmente, por medio de una sola temperatura.
2. El gas puede considerarse gris. Esta simplificación permite la de que la absorción y emisión de radiación pueda caracterizarse por un parámetro, como $\alpha = \epsilon$ en un cuerpo gris.

En el conjunto de temperaturas asociado con los productos de combustión de los hidrocarburos las emitancias del gas gris de H_2O y CO_2 se pueden obtener a partir de los resultados de Hottel, quien usó una masa hemisférica de gas a 1 atmósfera de presión para evaluar la emitancia. Las gráficas son válidas estrictamente en el caso de masas hemisféricas de gas de radio L, pero otras figuras se pueden tratar introduciendo una longitud media de rayo L, tal como lo hace la tabla 23.5. Para las geometrías no incluidas en la tabla, la

Tabla 23.5 Longitud media de rayo, L, correspondiente a diversas geometrías

Figura	L
Esfera	$\frac{2}{3}$ × Diametro
Cilindro infinito	1 × Diámetro
Espacio entre planos paralelos infinitos	1.8 × Distancia
Cubo	$\frac{2}{3}$ × entre planos
Espacio que se encuentra fuera de un banco infinito de tubos cuyos centros están sobre triángulos equiláteros; el diámetro de los tubos es igual al espaciamiento	2.8 × Lado
Igual que (5) excepto que el diámetro del tubo es igual a la mitad del espaciamiento	3.8 × Espaciamiento

longitud media del rayo se puede calcular en forma aproximada por medio de la relación: $L = 3.4$ (volumen)/(área superficial).

La figura 23.23 proporciona la emitancia de una masa hemisférica de vapor de agua a 1 atmósfera de presión total y una presión parcial casi nula en función de la temperatura y del producto $p_w L$, donde p_w es la presión parcial del vapor de agua. Para diferentes presiones de la atmósfera, la figura 23.24 nos proporciona el factor de corrección C_w, que es la razón de la emitancia a una presión total de 1 atmósfera. Las figuras 23.25 y 23.26 dan los datos correspondientes al CO_2.

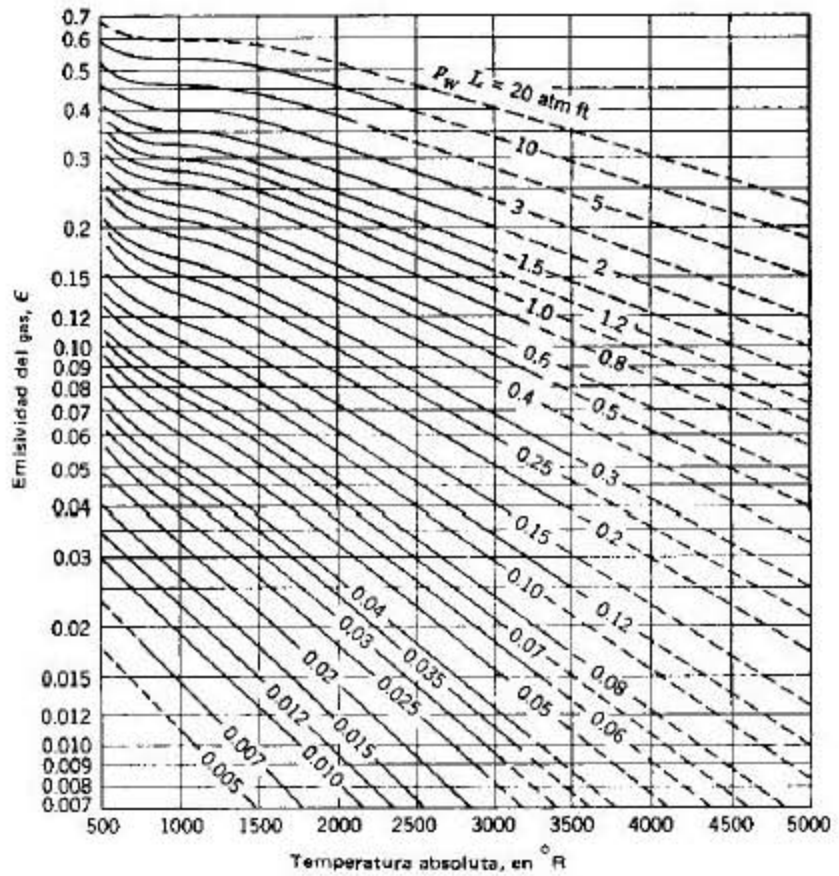


Figura 23.23 Emitancia del vapor de agua a una atmósfera de presión total y una presión parcial próxima a cero.

En la figura 23.22 se puede observar que las bandas de emisión de CO_2 y H_2O se traslapan. Cuando tanto el bióxido de carbono como el vapor de agua se encuentran presentes, la emitancia total se puede determinar a partir de la relación:

$$\epsilon_{\text{total}} = \epsilon_{H_2O} + \epsilon_{CO_2} - \Delta\epsilon$$

donde $\Delta\epsilon$ está dado en la figura 23.27

Los resultados que aparecen aquí en relación con el gas gris son simplificaciones burdas. Los textos de Sparrow y Cess*, de Wiebelt† y de Vincenti y Kruger‡ presentan un tratamiento completo de los fundamentos de la radiación de gases no grises, así como bibliografías muy extensas.

*E. M. Sparrow y R. D. Cess, *Radiation Heat Transfer*, Books Cole, Belmont, Calif., 1966.
†J. A. Wiebelt, *Engeneering Radiation Heat Transfer*, Halt, Rinehart y Winston, Inc., Nueva York, 1966.
‡W. G. Vincenti y C. H. Kruger, Jr. *Introduction to Physical Gas Dynamics*, Wiley, Nueva York, 1965.

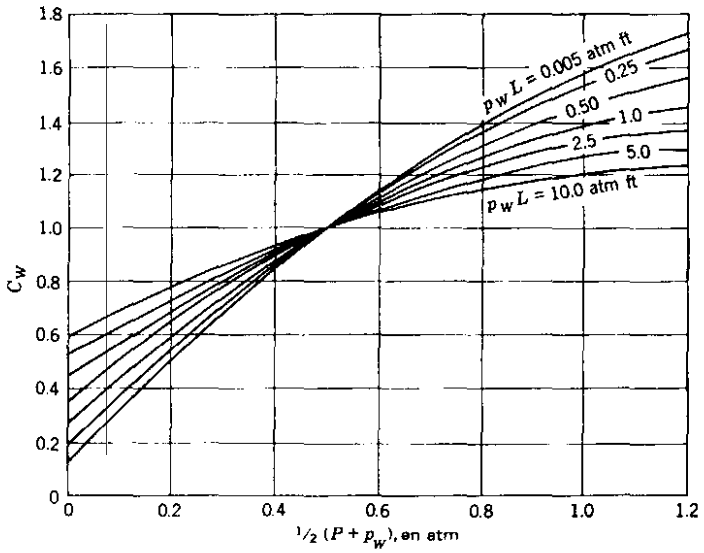


Figura 23.24 Factor de corrección para convertir la emitancia del H_2O a una atmósfera de presión total a emitancia a P atmósferas de presión total.

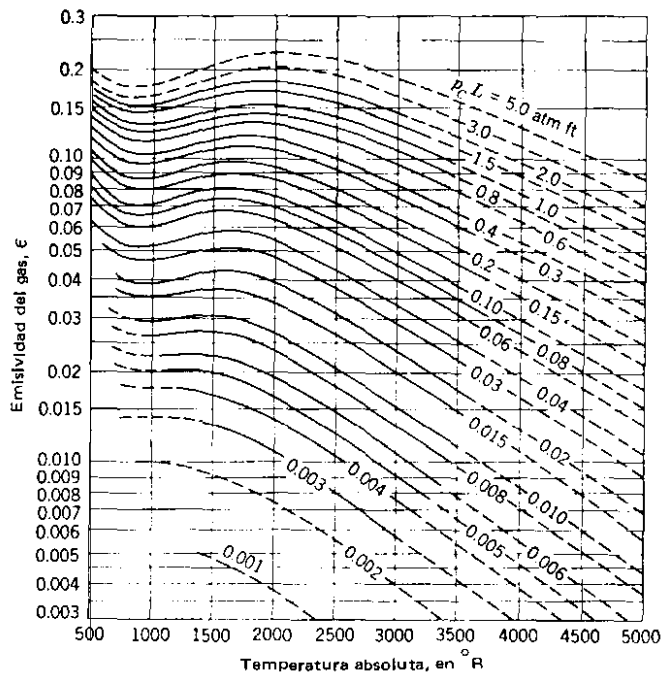


Figura 23.25 Emitancia del CO_2 a una atmósfera de presión total y una presión parcial cercana a cero.

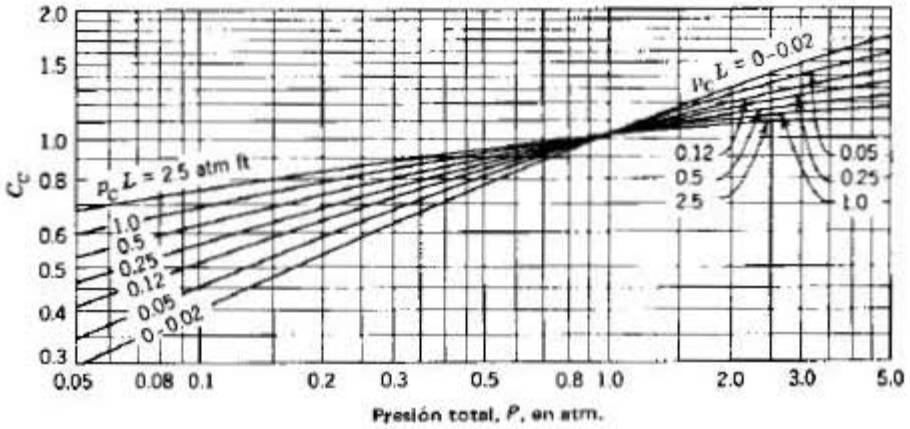


Figura 23.26 Factor de corrección para convertir la emitancia del CO_2 a una atmósfera en emitancia a P atmósferas de presión total.

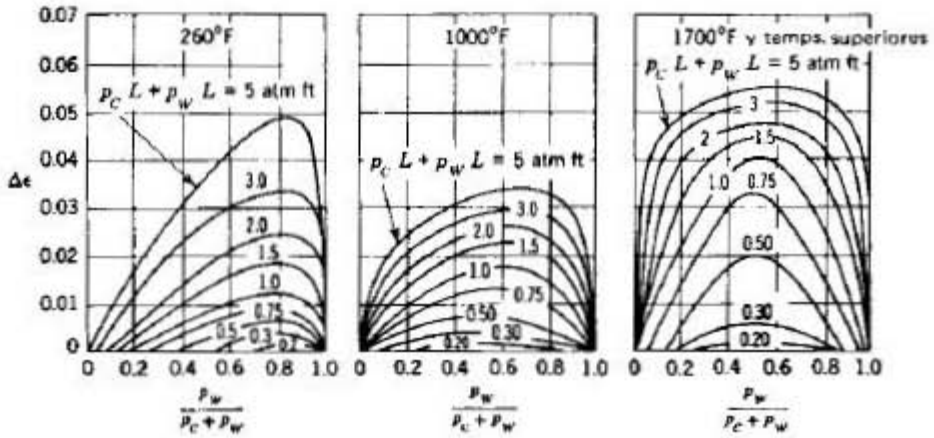


Figura 23.27 Corrección a la emitancia del gas debido a un traslape espectral de H_2O y CO_2.

23.12 EL COEFICIENTE DE TRANSFERENCIA DE CALOR RADIANTE

Con frecuencia, en el análisis ingenieril, ocurren simultáneamente la convección y la radiación y no como fenómenos aislados. Una aproximación importante en tales casos es la linearización de la contribución radiante, de manera que:

$$h_{\text{total}} = h_{\text{convección}} \tag{23-23}$$

donde

$$h_r = \frac{q_r/A_1}{(T - T_R)} = \mathcal{F}_{1-2}\left[\frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{T - T_R}\right] \tag{23-24}$$

Aquí T_R es una temperatura de referencia y T_1 y T_2 son las temperaturas superficiales respectivas. En efecto, la ecuación (23-24) representa una aproximación en línea recta a la transferencia de calor radiante, tal como aparece en la figura 23.28. El factor $\mathcal{F}_r$ explica la geometría y condiciones superficiales de la superficie radiante y absorbente.

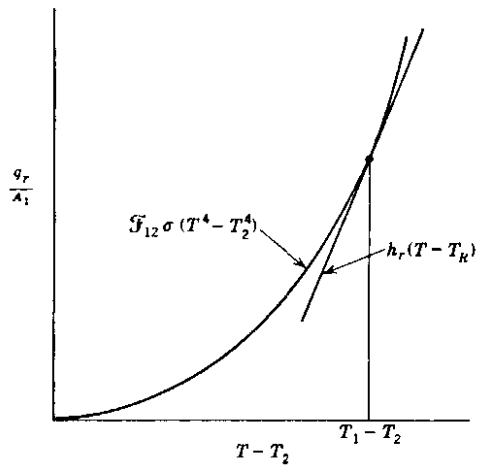


Figura 23.28 Aproximación tangencial que corresponde a h_r.

Si se construye una tangente a la curva de relación en $T = T_1$, se obtienen las siguientes relaciones para h_r y T_R:

$$h_r = 4\sigma T_1^3 \mathcal{F}_{1-2} \tag{23-25}$$

y

$$T_R = T_1 - \frac{T_1^4 - T_2^4}{4T_1^3} \tag{23-26}$$

23.13 CONCLUSION

El tema de la radiación no tiene ninguna analogía con la transferencia de masa o de momento, pero esta forma de transferencia de calor es extremadamente importante en la práctica ingenieril. El papel de la geometría en la radiación es dominante y debe hacerse un consistente esfuerzo y tener cuidado al determinar los factores de vista. El uso de la idealización del cuerpo gris da como resultado un método simplificado de intercambio de energía que es de gran utilidad.

Sin embargo, el estudiante debe tener en mente el hecho de que, tanto la ley de Kirchhoff como el concepto del cuerpo gris son simplificaciones del problema general de intercambio de energía radiante.

PROBLEMAS

23.1 El sol está aproximadamente a 93 millones de millas de la Tierra y su diámetro es de 860,000 millas. En un día despejado, la radiación solar que llega a la superficie terrestre es de 360 Btu/h ft^2 y la atmósfera terrestre absorbe 90 Btu/h ft^2, adicionales. Con esta información, calcule la temperatura existente en la superficie solar.

23.2 Un satélite, que puede considerarse esférico, tiene propiedades superficiales parecidas a las del aluminio. Su órbita puede considerarse circular y se encuentra a una altitud de 500 millas sobre la Tierra. Si se toma el diámetro del satélite como 50 in, calcule la temperatura de la superficie del satélite. La temperatura de la tierra puede considerarse uniforme a 50° F y para su emitancia se tomará el valor de 0.95. El valor de la radiación solar se tomará a 450 Btu/h ft^2 del área del disco del satélite.

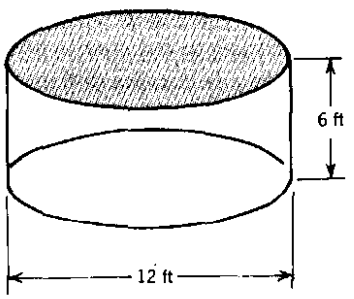
23.3 Una caja de lámina de acero de forma cúbica de 0.70 m por lado tiene una emitancia de 0.7. La caja contiene equipo electrónico que disipa 1,200 W de energía. Si la región circundante se supone negra, que se encuentra a 280 K y se considera que la tapa y las paredes de la caja radían uniformemente, ¿Cuál será la temperatura de la superficie de la caja?

23.4 Se calienta un filamento de tungsteno, que radía en forma de cuerpo gris, a una temperatura de 4,000° R. ¿Para qué longitud de onda es máximo el poder emisivo? ¿Qué porción de la emisión total está dentro del espectro de la luz visible que va desde 0.3 micras hata 0.75 micras?

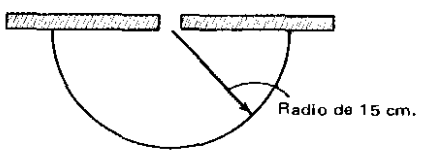
23.5 Determine la fracción de la energía total emitida por un cuerpo negro que está en la banda de longitudes de onda entre 0.8μ y 5.0μ, correspondiente a las temperaturas de 500 K, 2,000 K, 3,000 K y 4,500 K.

23.6 La temperatura del sol es, aproximadamente, de 5,800 K y el espectro visible comprende longitudes de onda de 0.4μ a 0.7μ. ¿Qué fracción de emisión solar es visible? ¿Qué fracción de emisión solar se encuentra en la porción ultravioleta del espectro? ¿Qué porción en el infrarrojo? ¿A qué longitud de onda es máximo el poder emisivo solar?

23.7 La base circular del recipiente cilíndrico de la figura se puede considerar como una superficie rerradiante. Las paredes del cilindro tienen una emitancia efectiva de 0.80 y se mantienen a 540° F. La parte superior del recipiente permanece abierta a la región circundante se mantiene a 40° F. ¿Cuál es la rapidez neta de transferencia de radiación a la región circundante?



23.8 La cavidad hemisférica de la figuta tiene una temperatura superficial interna dc 700 K. Se coloca una placa de material refractario sobre la cavidad, con un hoyo circular de 5 cm de diámetro en el centro. ¿Qué cantidad de energía se perderá a través del hoyo si la cavidad es:
a) negra?
b) gris, con una emitancia de 0.7?
¿Cuál será la temperatura de la superficie refractora en cada una de las condiciones anteriores?



23.9 Una habitación que mide 12 ft × 20 ft × 8 ft tiene una temperatura de 85° F en el piso y 65° F en el techo. Suponiendo que las paredes son rerradiantes y todas las superficies tienen una emitancia de 0.8, determine el intercambio neto de energía entre el piso y el techo.

23.10 Las emitancias de dos rectángulos paralelos son dc 0.6 y 0.9, respectivamente. Estos rectángulos miden 1.2 m de ancho y 2.4 m de altura y están separados por una distancia de 0.6 m. La placa cuya $\epsilon = 0.6$ se mantiene a 1,000 K y la otra a 420 K. El medio circundante absorbe toda la energía que escapa del sistema de dos placas. Determine:
a) la energía total perdida por la placa caliente?
b) el intercambio de energía radiante entre ambas placas.

23.11 Si se coloca una tercera placa rectangular cuyas dos superficies tienen una emitancia de 0.8, entre las dos placas del problema 23.10, ¿de qué manera se modificará la respuesta al inciso (a) del problema 23.10? Dibuje el circuito térmico correspondiente.

23.12 Un conducto circulàr de 2 ft de longitud tiene, en su centro, un termopar cuya área es de 0.3 in^2. Las paredes del conducto se encuentran a 200° F y el termopar indica 310° F. Suponiendo que el coeficiente de transferencia de calor convectivo entre el termopar y el gas del con-

ducto es de 30 Btu/h ft^2 °F, calcule la temperatura real del gas. La emitancia de las paredes del conducto es de 0.8 y la del termopar 0.6.

23.13 Un elemento de calentamiento de forma cilíndrica se mantiene a 2,000° F y se coloca en el centro de un reflector semicilíndrico, tal como puede verse en la figura. El diámetro del cilindro es de 2 in y el del reflector es de 18 in. La emitancia de la superficie del calentador es de 0.8 y todo el aparato se coloca en una habitación que se mantiene a 70° F. ¿Cuál es la pérdida de energía radiante del calentador por pie de longitud? Compare ésta con la pérdida del calentador sin estar presente el reflector.

23.14 Un tubo de hierro de 12 ft de longitud, 3 in OD y $\epsilon = 0.7$, pasa horizontalmente a través de una habitación de 12 × 14 × 9 ft cuyas paredes se mantienen a 70° F y tienen una emitancia de 0.8. La superficie del tubo está a 205° F. Compare la pérdida de energía radiante del tubo con la pérdida debida a la convección hacia el aire circundante, que se encuentra a 70° F.

23.15 Se perfora un agujero de 7.5 cm de diámetro en una placa de hierro de 10 cm de grueso. Si la temperatura de la placa es de 700 K y los alrededores se encuentran a 310 K, determine la pérdida de energía a través del agujero. Los lados de éste se pueden considerar negros.

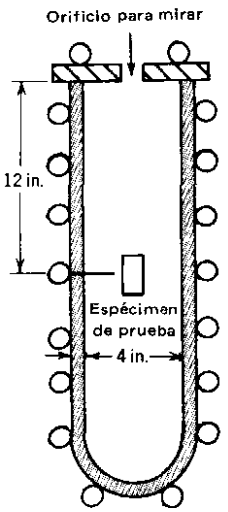
23.16 Si el agujero de 7.5 cm de diámetro del problema 23.15 se hubiera perforado a una profundidad de 5 cm, ¿cuál sería la pérdida de calor?

23.17 Un pequeño (1/4 in de diámetro por 1 in de longitud) espécimen de metal está suspendido por alambres muy finos en un tubo largo al vacío. El metal se encentra a 2,500° F y a esta temperatura tiene una emitancia aproximada de 0.2. Las paredes (enfriadas por medio de agua), así como los extremos del tubo se mantienen a 50° F. En el extremo superior, hay una pequeña (1/4 in de diámetro) mirilla de vidrio de sílice. Las superficies interiores del tubo de acero están recién galvanizadas. La temperatura ambiente es de 70° F. Calcule:

a) el factor de vista del espécimen a la mirilla.

b) la rapidez total neta de transferencia de calor radiante del espécimen.

c) la energía radiada a través de la mirilla.



23.18 Fluye vapor de agua a 1 atmósfera y 600 K a través de un conducto cuya sección transversal cuadrada mide 20 cm × 20 cm. Una de las paredes del conducto se mantiene a 420 K y tiene una emitancia de 0.8. Las otras tres paredes se pueden considerar como superficies refractoras. Determine la rapidez de transferencia de energía radiante del vapor de agua a la pared fría.

23.19 Se introduce una mezcla gaseosa a 1000 K y 5 atmósferas de presión en una cavidad esférica al vacío, cuyo diámetro es de 3 m. Las paredes de la cavidad son negras e inicialmente se encuentran a 600 K. ¿Cuál será la transferencia inicial de calor entre el gas y las paredes esféricas si el gas contiene 15% de CO_2 y el resto del gas es no radiante?

23.20 Un gas consistente en un 20% de CO_2 y un 80% de oxígeno y nitrógeno abandona un horno calizo a 2000° F y entra en un conducto cuadrado que mide 6 in por 6 in de sección transversal. El calor específico del gas es 0.28 Btu/lb_m ° F y se debe enfriar a 1000° F en el conducto, cuya superficie interior se mantiene a 800° F y cuyas paredes tienen una emitancia de 0.9. La velocidad de la masa de gas del horno es de 0.4 lb_m/ft^2 seg y el coeficiente de transferencia convectiva de calor entre el gas y la pared del conducto es de 1.5 Btu/h ft^2 ° F.

a) Determine la longitud requerida para que el conducto enfríe el gas a 1000° F.

b) Determine la razón de transferencia de energía radiante a transferencia convectiva.

c) ¿A qué temperatura abandonaría el gas el conducto si la longitud de este último fuera del doble del valor encontrado en el inciso (a)?

(Cortesía del American Institute of Chemical Engeneers).

Sugerencia:

Como las respuestas del gas a la emisión y a la absorción difieren, la expresión siguiente representa una aproximación correspondiente al intercambio de energía radiante entre la cavidad cerrada y el gas contenido dentro de un volumen arbitrario de control:

$$A_w F_w \; _g\sigma\epsilon_w(\epsilon_g T_g^4 - \alpha_g T_w^4).$$

CONCLUSION ACERCA DE LA TRANSFERENCIA DE ENERGIA

Aquí resultan apropiados los comentarios semejantes a los que se hicieron en el capítulo 14. Ahora se dirigirá la atención a la transferencia de masa con sus flujos asociados, propiedades de transferencia, fuerzas impulsoras y otra terminología particular. Casi todo el material que aparece en los próximos ocho capítulos tiene su complemento en secciones anteriores. De nuevo se recuerda al estudiante que estas semejanzas deben facilitar la comprensión del fenómeno de transferencia de masa y reforzar el de la transferencia de energía y momento.

24
FUNDAMENTOS DE LA TRANSFERENCIA DE MASA

Los capítulos anteriores relacionados con los fenómenos de transferencia se han referido a fases de una componente con tendencia natural a alcanzar las condiciones de equilibrio.

Cuando un sistema contiene dos o más componentes cuyas concentraciones varían de un punto a otro, presenta una tendencia natural a transferir la masa, haciendo mínimas las diferencias de concentración dentro del sistema.

La transferencia de un constituyente de una región de alta concentración a una de baja concentración se llama *transferencia de masa*.

Muchas de nuestras experiencias cotidianas están relacionadas con la transferencia de masa. Un terrón de azúcar en una taza de café negro se disuelve finalmente y después se difunde de manera uniforme en el café. El agua se evapora de los estanques, incrementando la humedad de la corriente de aire que pasa por el lugar. Del perfume emana una agradable fragancia, que se esparce por la atmósfera circundante.

La transferencia de masa juega un papel muy importante en muchos procesos industriales: la remosión de materiales contaminantes de las corrientes de descarga de los gases del agua contaminada, la difusión de neutrones dentro de los reactores nucleares, la difusión de sustancias que los poros del carbón activado absorben, la rapidez de las reacciones químicas catalizadas y biológicas así como el acondicionamiento del aire, son ejemplos típicos.

Si se piensa en el terrón de azúcar puesto dentro de la taza de café negro, la experiencia nos enseña que el intervalo de tiempo que se requiere para destribuir el azúcar depende de si el líquido está en reposo o se le agita mecánicamente por medio de una cucharita.

El mecanismo de transferencia de masa, tal como se ha observado en el de transferencia de calor, depende de la dinámica del sistema en el que se lleva a cabo.

La masa puede transferirse por medio del movimiento molecular fortuito en los fluidos en reposo o puede transferirse de una superficie a un fluido en movimiento, ayudado por las características dinámicas del flujo.

Estos dos modos diferentes de transferencia de masa: molecular y convectiva, son análogos a la conducción calorífica y a la transferencia convectiva de calor.

Cada uno de estos modos de transferencia de masa se va a describir y analizar. Igual que en el caso de la transferencia de calor, inmediatamente debe uno percatarse de que ambos mecanismos actúan, a menudo simultáneamente. Sin embargo, al ocurrir ambos, uno puede ser cuantitativamente dominante, de manera que es necesario usar soluciones aproximadas que incluyan solamente el modo dominante.

24.1 TRANSFERENCIA DE MASA MOLECULAR

Ya en el año de 1815 Parrot observó cuantitativamente que cuando una mezcla de gases contiene dos o más especies moleculares cuyas concentraciones relativas varían de un punto a otro, resulta un proceso, aparentemente natural, que tiende a disminuir cualesquiera desigualdades de composición.

Esta transferencia macroscópica de masa, independiente de cualquier convección que se lleve a cabo dentro del sistema, se define con el nombre de *difusión molecular.*

En el caso específico de las mezclas gaseosas se puede deducir una explicación lógica de este fenómeno de transferencia a partir de la teoría cinética de los gases.

A temperaturas superiores al cero absoluto, las moléculas individuales se encuentran en un estado de movimiento continuo, aunque fortuito. Dentro de las mezclas de gases diluidos, cada una de las moléculas de soluto se comporta en forma independiente de las otras moléculas de soluto, ya que rara vez se topa con ellas. Están ocurriendo continuamente colisiones entre el solvente y el soluto. Como resultado de estas colisiones, las moléculas del soluto describen trayectorias en zig zag, a veces hacia una región de mayor concentración, a veces hacia una de concentración más baja.

Examinemos una sección hipotética que pase en forma normal al gradiente de concentración dentro de una mezcla gaseosa isobárica e istérmica que contenga moléculas de solvente y soluto.

Los dos elementos delgados e iguales de volumen que se encuentran sobre y por debajo de la sección, contienen el mismo número de moléculas, tal como lo estipula la ley de Avogadro.

Aunque no es posible establecer la dirección específica en la que viajará una molécula particular en un intervalo dado de tiempo, puede decirse que un número definido de moléculas que se encuentren en el elemento inferior de volumen cruzará la sección hipotética desde abajo y el mismo número de moléculas abandonará el elemento superior y atravesará la sección desde arriba.

Con la existencia del gradiente de concentración, habrá más moléculas de soluto en uno de los elementos de volumen que en el otro; así pues, resultará una transferencia total neta de una región de concentración mayor a una de cocentración menor.

El flujo de cada una de las especies molesculares ocurre en la dirección del gradiente negativo de la concentración.

Como se señaló en los Capítulos 7 y 15, la transferencia molecular de momento y la transferencia de energía por conducción se deben también al movimiento al azar de las moléculas. De manera que es de esperarse que los tres fenómenos de transferencia dependan de muchas propiedades y características iguales, tales como la de trayectoria media libre y el hecho de que los análisis teóricos de los tres fenómenos tienen mucho en común.

LA ECUACION DE RAPIDEZ DE FICK

Las leyes de transferencia de masa ponen de manifiesto la relación entre el flujo de la sustancia que se está difundiendo y el gradiente de concentración responsable de esta transferencia de masa. Desafortunadamente, la descripción cuantitativa de la difusión molecular es considerablemente más compleja que las descripciones análogas correspondientes a la transferencia molecular de momento y energía que tienen lugar en una fase de una componente.

Como la *transferencia de masa* o *difusión*, como se le llama también, ocurre solamente en mezclas, su evaluación debe incluir un examen del efecto de todas las componentes. Por ejemplo, a menudo se desea conocer la rapidez de difusión de una componente específica relacionada con la velocidad de la mezcla en la cual se esta moviendo. Como cada una de las componentes puede poseer una movilidad diferente, la velocidad de la mezcla debe evaluarse promediando las velocidades de todas las componentes que se encuentren presentes.

Para poder establecer una base común para estudios futuros, estudiemos, primero, las definiciones y relaciones que se utilizan a menudo para explicar el papel de los componentes de la mezcla.

Concentraciones. En una mezcla múltiple de componentes la concentración de una especie molecular se puede expresar de muchas maneras. En la figura 24.1 aparece un volumen elemental $d\mathcal{V}$, que contiene una mezcla de componentes, incluyendo a la especie A. Como cada una de las moléculas de cada especie tiene una masa, puede definirse una concentración de masa para cada especie, así como para la mezcla.

La concentración de *masa* ρ_A, correspondiente a la especie A, se define como la masa de A por unidad de volumen de la mezcla. La concentración total de masa o *densidad*, ρ, es la masa total de la mezcla contenida en la unidad de volumen, esto es:

$$\rho = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \tag{24-1}$$

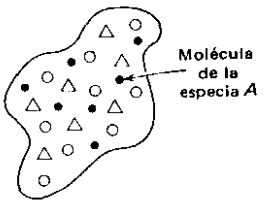


Figura 24.1 Volumen elemental que contiene una mezcla de componentes múltiples.

donde n es el número de especies presentes en la mezcla. La fracción de masa, ω_A, es la concentración de la especie A, dividida entre la densidad total de masa:

$$\omega_A = \frac{\rho_A}{\sum_i^n \rho_i} = \frac{\rho_A}{\rho} \tag{24-2}$$

Por definición, la suma de las fracciones de masa, debe ser uno.

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1 \tag{24-3}$$

La *concentración molar* de la especie A, c_A, se define como el número de moles de A, presentes por unidad de volumen de la mezcla. Por definición, un mol de cualquier especie contiene una masa equivalente a su peso molecular. Los términos de la concentración de masa y de la concentración molar están relacionados por medio de la siguiente expresión:

$$c_A = \frac{\rho_A}{M_A} \tag{24-4}$$

dende M_A es el peso molecular de la especie A.

Cuando se está tratando con una fase gaseosa, a menudo, las concentraciones se expresan en términos de las presiones parciales. Bajo las condiciones en las cuales es válida la ley de los gases ideales, $P_A\ V = n_A\ RT$, la concentración molar es:

$$c_A = \frac{n_A}{V} = \frac{p_A}{RT} \tag{24-5}$$

donde p_A es la presión parcial de la especie A en la mezcla, n_A es el número de moles de la especie A, V es el volumen de gas , T es la temperatura absoluta y R es la constante del gas. La concentración molar total, c, es el número total de moles de la mezcla, contenidos en la unidad de volumen, esto es:

$$c = \sum_{i=1}^{n} c_i \tag{24-6}$$

o, en una mezcla gaseosa que obedezca la ley de los gases ideales: $c=n_{total}/V=P/RT$, donde P es la presión total. La fracción molar correspondiente a las mezclas de líquidos o sólidos, x_A, y la correspondiente a mezclas gaseosas, y_A, son las concentraciones molares de la especie A divididas entre la densidad molar total.

$$x_A = \frac{c_A}{c} \text{ (líquidos y sólidos)}$$
$$y_A = \frac{c_A}{c} \text{ (gases)} \qquad (24\text{-}7)$$

Cuando una mezcla obedece la ley de los gases ideales, la fracción molar, y_A, se puede escribir en función de las presiones:

$$y_A = \frac{c_A}{c} = \frac{p_A/RT}{P/RT} = \frac{p_A}{P} \qquad (24\text{-}8)$$

La ecuación (24-8) es una representación algebraica de la ley de Dalton que corresponde a mezclas de gases. La suma de las fracciones molares, debe ser igual a 1, por definción:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$
$$\sum_{i=1}^{n} y_i = 1 \qquad (24\text{-}9)$$

En la Tabla 24.1 aparece un sumario de los diferentes términos de concentración y de las interrelaciones correspondientes a un sistema binario que contenga las especies A yB.

EJEMPLO 1

A menudo la composición del aire da en función de las dos especies principales que forman parte de la mezcla gaseosa:

oxígeno, O_2, $y_{O_2}=0.21$

nitrógeno, N_2, $y_{N_2}=0.79$

Determínese la fracción de masa, tanto de oxígeno como de nitrógeno y el peso molecular medio del aire, cuando se le mantiene a 25°C(298 K) y a 1 atm (1.013×10^5 Pa). El peso molecular del oxígeno es de 0.032 kg/mol y el del nitrógeno es de 0.028 kg/mol.

Como base para nuestros cálculos, tómese 1 mol de mezcla gaseosa;

oxígeno presente = (1 mol)(0.21) = 0.21 mol

$$= (0.21 \text{ mol})\frac{(0.032 \text{ kg})}{\text{mol}} = 0.00672 \text{ kg}$$

TABLA 24.1 CONCENTRACIONES EN UNA MEZCLA BINARIA DE A Y B

Concentración de masa

ρ = Densidad total de masa de la mezcla
ρ_A = Densidad de masa de la especie A
ρ_B = Densidad de masa de la especie B
ω_A = Fracción de masa de la especie $A = \rho_A/\rho$
ω_B = Fracción de masa de la especie $B = \rho_B/\rho$
$\rho = \rho_A + \rho_B$
$1 = \omega_A + \omega_B$

Concentraciones molares

Mezcla líquida o sólida	Mezcla gaseosa
c = Densidad molar de la mezcla $= n/V$	$c = n/V = P/RT$
c_A = Densidad molar de la especie $A = n_A/V$	$c_A = n_A/V = p_A/RT$
c_B = Densidad molar de la especie $B = n_B/V$	$c_B = n_B/V = p_B/RT$
x_A = Fracción molar de la especie $A = c_A/c = n_A/n$	$y_A = c_A/c = n_A/n = p_A/P$
x_B = Fracción molar de la especie $B = c_B/c = n_B/n$	$y_B = c_B/c = n_B/n = p_B/P$
$c = c_A + c_B$	$c = c_A + c_B = \frac{p_A}{RT} + \frac{p_B}{RT} = \frac{P}{RT}$
$1 = x_A + x_B$	$1 = y_A + y_B$

Interrelaciones

$$\rho_A = c_A M_A$$

$$x_A \quad \text{o} \quad y_A = \frac{\omega_A/M_A}{\omega_A/M_A + \omega_B/M_B} \tag{24-10}$$

$$\omega_A = \frac{x_A M_A}{x_A M_A + x_B M_B} \quad \text{or} \quad \frac{y_A M_A}{y_A M_A + y_B M_B} \tag{24-11}$$

nitrógeno presente = (1 mol)(0.79) = 0.79 mol

$$= (0.79 \text{ mol})\frac{(0.028 \text{ kg})}{\text{mol}} = 0.0221 \text{ kg}$$

masa total presente = 0.00672 + 0.0221 = 0.0288 kg

$$\omega_{O_2} = \frac{0.00672 \text{ kg}}{0.0288 \text{ kg}} = 0.23$$

$$\omega_{N_2} = \frac{0.0221 \text{ kg}}{0.0288 \text{ kg}} = 0.77$$

Como un mol de la mezcla gaseosa tiene una masa de 0.0288 kg, el peso molecular medio del aire, debe ser de 0.0288. Cuando se toman en cuenta los otros constituyentes que forman parte del aire, el peso molecular medio del aire se toma, a menudo, en números redondos, como 0.029 kg/mol.

Este problema podría, también resolverse utilizando la ley de los gases ideales $PV = nRT$. En condiciones ideales, 0°C o 273 K y 1 atm o 1.013×10^5 Pa de presión la constante del gas será:

$$R = \frac{PV}{nT} = \frac{(1.013 \times 10^5)(22.4\ \text{m}^3)}{(1\ \text{mol})(273\ \text{K})} = 8.314\ \frac{\text{Pa} \cdot \text{m}^3}{\text{mol} \cdot \text{K}} \tag{24-12}$$

El volumen de la mezcla gaseosa a 298K, es

$$V = \frac{nRT}{P} = \frac{(1\ \text{mol})\left(8.314\ \frac{\text{Pa} \cdot \text{m}^3}{\text{mol} \cdot \text{K}}\right)(298\ \text{K})}{1.013 \times 10^5\ \text{Pa}}$$

$$= 0.0245\ \text{m}^3$$

La concentraciones son:

$$c_{O_2} = \frac{0.21\ \text{mol}}{0.0245\ \text{m}^3} = 8.59\ \frac{\text{mol}\ O_2}{\text{m}^3}$$

$$c_{N_2} = \frac{0.79\ \text{mol}}{0.0245\ \text{m}^3} = 32.3\ \frac{\text{mol}\ N_2}{\text{m}^3}$$

$$c = \sum_i^n = 8.59 + 32.3 = 40.9\ \text{mol/m}^3$$

La densidad total, ρ, es:

$$\rho = \frac{0.0288\ \text{kg}}{0.0245\ \text{m}^3} = 1.180\ \text{kg/m}^3$$

y el peso molecular medio de la mezcla es:

$$M = \frac{\rho}{c} = \frac{1.180\ \text{kg/m}^3}{40.9\ \text{mol/m}^3} = 0.0288\ \text{kg/mol}$$

Velocidades. En un sistema de componentes múltiples, las diferentes especies se moverán de manera normal a diferentes velocidades; por lo tanto, para evaluar la velocidad de la mezcla de gases, se necesitan promediar las velocidades de cada una de las especies presentes.

La *velocidad promedio o media de la masa* correspondiente a una mezcla de componetes múltiples se define en función de las densidades y velocidades de la masa, de todas las componentes, en la forma:

$$\mathbf{v} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \rho_i \mathbf{v}_i}{\sum_{i=1}^{n} \rho_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \rho_i \mathbf{v}_i}{\rho} \tag{24-13}$$

donde v_i denota la velocidad absoluta de la especie i con relación a ejes estacionarios de coordenadas.

Esta es la velocidad que mediría un tubo de Pitot y la que se encontró anteriormente en las ecuaciones de transferencia de momento. La *velocidad molar media o promedio* de una mezcla de componentes múltiples, se define en función de las concentraciones molares de todas las componentes, por medio de la expresión:

$$\mathbf{V} = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{v}_i}{\sum_{i=1}^{n} c_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{v}_i}{c} \tag{24-14}$$

La velocidad de una especie particular con relación a la masa promedio o velocidad molar media se llama *velocidad de difusión*. Se pueden definir dos velocidades diferentes de difusión:

$v_i - v$, que es la velocidad de difusión de la especie i con relación a la velocidad media de la masa.

y

$\mathbf{v}_i - \mathbf{V}$. que es la velocidad de difusión de la especie i con relación a la velocidad molar media.

De acuerdo con la ley de Fick, una especie puede tener una velocidad relativa a la masa o velocidad molar media, solamente si existen los gradientes en la concentración.

Flujos. El flujo de masa (o molar) de una especie dada es una cantidad vectorial que denota la cantidad de la especie particular, ya sea en unidades de masa o molares, que pasa en un incremento dado de tiempo a través de un área unitaria normal al vector.

El flujo se puede definir refiriéndose a las coordenadas que permanecen fijas en el espacio, a las coordenadas que se están moviendo con la velocidad promedio de la masa o con la velocidad molar promedio.

La relación básica correspondiente a la difusión molecular define el flujo molar relativo a la velocidad molar media, J_a. Fick* fue quien primero postuló una relación empírica para este flujo molar y, por lo tanto, se le llama primera ley de Fick. Esta define la componente A de la difusión en un sistema isotérmico e isobárico. Si la difusión se lleva a cabo únicamente en la dirección de z, la ecuación de Fick de la rapidez es:

$$J_{A,z} = -D_{AB}\frac{dc_A}{dz} \tag{24-15}$$

donde $J_{A,z}$ es el flujo molar en la dirección de z relativa a la velocidad molar promedio, dc_A/dz es el gradiente de la concentración en la dirección de z y

*A. Fick, Ann. Physik, 94, 59 (1855)

D_{AB}, el factor de proporcionalidad, es la *difusividad de la masa* o *coeficiente de difusión* correspondiente a una componente A que se difunde a través de la componente B.

Groot* propuso una relación más general de flujo que no está restringida a sistemas isotérmicos o isobáricos.

Groot escribió:

$$\text{Flujo} = -\begin{pmatrix}\text{densidad total}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{coeficiente de}\\ \text{difusión}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{gradiente de}\\ \text{concentración}\end{pmatrix}$$

ó

$$J_A = -cD_{AB}\frac{dy_A}{dz} \tag{24-16}$$

Como la concentración total, c es constante bajo condiciones isotérmicas e isobáricas, la ecuación (24-15) es una forma especial de la relación (24-16), que es más general. Una expresión equivalente, que corresponde a j_A, z, que es el flujo de masa en la dirección de z, relativo a la velocidad promedio de la masa, es:

$$j_{A,z} = -\rho D_{AB}\frac{d\omega_A}{dz} \tag{24-17}$$

donde $d\omega_a/dz$ es el gradiente de concentración en función de la fracción de masa.

Cuando la densidad es constante, esta relación se simplifica, quedando así:

$$j_{A,z} = -D_{AB}\frac{d\rho_A}{dz}$$

En un sistema binario con una velocidad media constante en la dirección de z, el flujo molar en la dirección de z, relativo a la velocidad molar media también se puede expresar de la manera siguiente:

$$J_{A,z} = c_A(v_{A,z} - V_z) \tag{24-18}$$

Si se igualan las expresiones (24-16) y (24-18), se obtiene:

$$J_{A,z} = c_A(v_{A,z} - V_z) = -cD_{AB}\frac{dy_A}{dz}$$

lo cual, después de reordenarlos, queda:

$$c_A v_{A,z} = -cD_{AB}\frac{dy_A}{dz} + c_A V_z$$

*S. R. de Groot, *Thermodynamics of Irreversible Processes*, North-Holland, Amsterdam 1951.

Se puede evaluar V_z para este sistema binario, por medio de la ecuación (24-14), en la forma:

$$V_z = \frac{1}{c}(c_A v_{A,z} + c_B v_{B,z})$$

ó

$$c_A V_z = y_A(c_A v_{A,z} + c_B v_{B,z})$$

Al sustituir esta expresión en la relación que se tenía, se obtiene:

$$c_A v_{A,z} = -cD_{AB}\frac{dy_A}{dz} + y_A(c_A v_{A,z} + c_B v_{B,z}) \qquad (24\text{-}19)$$

Como las velocidades componentes, $v_{A\,z}$ y $v_{B,z}$, son velocidades relativas al eje fijo z, las cantidades c_A, $V_{A,z}$ y c_B $v_{B,z}$ son flujos de las componentes A y B con relación al eje fijo de coordenadas, z. Así se simboliza este tipo de flujo, relativo a un conjunto de ejes estacionarios, por medio de:

$$\mathbf{N}_A = c_A \mathbf{v}_A$$

y

$$\mathbf{N}_B = c_B \mathbf{v}_B$$

Al sustituir estos símbolos en la ecuación (24-19), se obtiene una relación que corresponde al flujo de la componente A, relativa al eje z.

$$N_{A,z} = -cD_{AB}\frac{dy_A}{dz} + y_A(N_{A,z} + N_{B,z}) \qquad (24\text{-}20)$$

Esta relación se puede generalizar y escribir en forma vectorial de la manera siguiente:

$$\mathbf{N}_A = -cD_{AB}\nabla y_A + y_A(\mathbf{N}_A + \mathbf{N}_B) \qquad (24\text{-}21)$$

Es importante notar que el flujo molar $\mathbf{N}_A$ es la resultante de las dos cantidades vectoriales:

$-cD_{AB}\ \nabla_{yA}$ — El flujo molar, $\mathbf{J}_A$, que resulta del gradiente de la concentración. Este término se llama *contribución del gradiente de la concentración.*

y

$y_A(\mathbf{N}_A + \mathbf{N}_B) = c_A \mathbf{V}$ — El flujo molar que resulta cuando la componente molar A circula con el flujo global. Este término del flujo se llama *contribución del movimiento global.*

Cualquiera de estas cantidades puede ser una parte importante del flujo molar total, N_A. Cuando la ecuación (24-21) se usa para describir una difusión molar, la naturaleza vectorial de los flujos individuales $\mathbf{N}_A$ y $\mathbf{N}_B$, se debe analizar y después debe evaluarse la dirección de cada una de las dos cantidades vectoriales.

Si la especie A se estuviera difundiendo en una mezcla de componentes múltiples, la expresión equivalente a la ecuación (24-21), sería:

$$\mathbf{N}_A = -cD_{AM}\nabla y_A + y_A \sum_{i=1}^{n} \mathbf{N}_i$$

donde D_{AM} es el coeficiente de difusión de A de la mezcla.

El flujo de masa, $\mathbf{n}_A$, relativo a un sistema fijo de coordenadas espaciales, se define, para un sistema binario, en función de la densidad de masa y de la fracción de masa, por medio de:

$$\mathbf{n}_A = -\rho D_{AB}\nabla \omega_A + \omega_A(\mathbf{n}_A + \mathbf{n}_B) \qquad (24\text{-}22)$$

donde

$$n_A = \rho_A v_A$$

y

$$n_B = \rho_B v_B$$

En condiciones isotérmicas e isobáricas, esta relación se reduce a:

$$\mathbf{n}_A = -D_{AB}\nabla \rho_A + \omega_A(\mathbf{n}_A + \mathbf{n}_B)$$

Las cuatro ecuaciones que definen los flujos $\mathbf{J}_A$, $\mathbf{j}_A$, $\mathbf{N}_A$ y $\mathbf{n}_A$ son enunciados equivalentes de la ecuación de Fick de la rapidez.

El coeficiente de difusión $\mathbf{D}_{AB}$, es idéntico en todas las ecuaciones, cualquiera de las cuales es adecuada para describir la difusión molecular; sin embargo, ciertos flujos son más fáciles de utilizar en casos específicos. Los flujos de masa, $\mathbf{n}_A$ y $\mathbf{j}_A$ se usan cuando también se requiere que las ecuaciones de Navier Stokes describan el proceso. Ya que las reacciones químicas se describen en función de los moles de los reactivos que participan, los flujos molares, $\mathbf{J}_A$ y $\mathbf{N}_A$ se usan para describir operaciones de transferencia de masa en las que hay reacciones químicas. Los flujos relativos a las cordenadas fijas en el espacio, $\mathbf{n}_A$ y $\mathbf{N}_A$, se usan a menudo para describir operaciones ingenieriles que se llevan a cabo dentro del equipo de procesamiento. Los flujos $\mathbf{J}_A$ y $\mathbf{j}_A$ se utilizan para describir la transferencia de masa en celdas de difusión empleadas para medir el coeficiente de difusión.

La Tabla 24.2 resume las formas equivalentes de la ecuación de Fick de la rapidez

TABLA 24.2 FORMAS EQUIVALENTES DE LA ECUACION DE FLUJO DE MASA CORRESPONDIENTE AL SISTEMA A Y B.

Flujo	Gradiente	Ecuación de rapidez de Fick	Restricciones
$\mathbf{n}_A$	$\nabla\omega_A$	$\mathbf{n}_A = -\rho D_{AB}\nabla\omega_A + \omega_A(\mathbf{n}_A + \mathbf{n}_B)$	
	$\nabla\rho_A$	$\mathbf{n}_A = -D_{AB}\nabla\rho_A + \omega_A(\mathbf{n}_A + \mathbf{n}_B)$	Constante ρ
$\mathbf{N}_A$	∇y_A	$\mathbf{N}_A = -cD_{AB}\nabla y_A + y_A(\mathbf{N}_A + \mathbf{N}_B)$	
	∇c_A	$\mathbf{N}_A = -D_{AB}\nabla c_A + y_A(\mathbf{N}_A + \mathbf{N}_B)$	Constante c
$\mathbf{j}_A$	$\nabla\omega_A$	$\mathbf{j}_A = -\rho D_{AB}\nabla\omega_A$	
	$\nabla\rho_A$	$\mathbf{j}_A = -D_{AB}\nabla\rho_A$	Constante ρ
$\mathbf{J}_A$	∇y_A	$\mathbf{J}_A = -cD_{AB}\nabla y_A$	
	∇c_A	$\mathbf{J}_A = -D_{AB}\nabla c_A$	Constante c

TIPOS DE TRANSFERENCIA DE MASA MOLECULAR RELACIONADOS ENTRE SI.

De acuerdo con la segunda ley de la termodinámica, los sistemas que no se encuentran en equilibrio tienden a éste después de algún tiempo. Existe una fuerza motriz generalizada, que, en términos de química termodinámica es $-d\mu_c/dz$ donde μ_c es el *potencial* químico. La velocidad de difusión molar de la componente A se define en función del potencial químico por medio de:

$$v_{A,z} - V_z = -u_A\frac{d\mu_c}{dz} = -\frac{D_{AB}}{RT}\frac{d\mu_c}{dz} \tag{24-23}$$

donde u_A es la "movilidad" de la componente A o la velocidad resultante de la molécula mientras se encuentra bajo la influencia de una fuerza motriz unitaria.

La ecuación (24-23) se conoce como la relación de Nerst-Einstein. El flujo molar de A se transforma en:

$$J_{A,z} = c_A(v_{A,z} - V_z) = -\frac{D_{AB}}{RT}\frac{d\mu_c}{dz} \tag{24-24}$$

La ecuación (24-24) se puede usar para definir todos los fenómenos de transferencia de masa molecular. Como ejemplo, estúdiense las condiciones especificadas para la ecuación (24-15); el potencial químico de una componente en una solución ideal homogénea a temperatura y presión constantes, se define por medio de:

$$\mu_c = \mu^0 + RT\ln c_A \tag{24-25}$$

dende μ° es una constante: el potencial químico del estado estándar. Cuando se sustituye esta relación en la ecuación (24-24), se obtiene la ecuación de Fick de la rapidez correspondiente a una fase homogénea:

$$J_{A,z} = -D_{AB}\frac{dc_A}{dz} \tag{24-15}$$

Hay otras condiciones físicas además de las diferencias de concentración, que producen un gradiente de potencial químico: las diferencias de temperatura y de presión así como las diferencias en las fuerzas creadas por campos externos, tales como el gravitacional, el magnético y el eléctrico. Por ejemplo, se puede obtener la transferencia de masa aplicando un gradiente de temperatura a un sistema de componentes múltiples; este fenómeno de transferencia, el *efecto Soret de difusión térmica*, aunque usualmente pequeño en relación con otros efectos de difusión, se usa con éxito en la separación de isótopos. Las componentes de una mezcla de líquidos se pueden separar mediente una fuerza centrífuga por *difusión de presión*..

Existen muchos ejemplos bien conocidos en los cuales los flujos de masa se inducen en una mezcla sujeta a un campo externo de fuerzas: la separación por sedimentación bajo la influencia de la gravedad, la precipitación electrolítica debida a un campo electrostático de fuerzas y la separación magnética de mezclas minerales a través de la acción de un campo magnético de fuerzas. Aunque estos fenómenos de transferencia de masa son importantes, son procesos muy específicos.

La transferencia de masa molecular que resulta de las diferencias de concentración y a la cual describe la ley de Fick, es el resultado del movimiento molecular fortuito en pequeñas trayectorias medias libres, independientes de las paredes del recipiente. La difusión de los neutrones rápidos y de las moléculas en poros pequeñísimos o a una densidad muy baja de gas no pueden describirse mediante esta relación.

Los neutrones producidos en un proceso de fisión nuclear poseen, inicialmente, energías cinéticas altas y se llaman *neutrones rápidos* a causa de sus altas velocidades, hasta de 15 millones de metros por segundo. Con altas velocidades, los neutrones pasan a través de las cubiertas electrónicas de otros átomos o moléculas con muy poco problema. Para deflectarse, los neutrones rápidos deben hacer colisión con un núcleo, el cual representa un blanco muy pequeño comparado con el volumen de la mayoría de los átomos y moléculas. La trayectoria media libre de los neutrones rápidos es aproximadamente un millón de veces mayor que las trayectorias medias libres de los gases a presiones ordinarias. Después de que los neutrones rápidos reducen su velocidad por medio de colisiones elásticas de dispersión entre los neutrones y el núcleo del moderador del reactor. Estos neutrones más lentos, que se llaman neutrones térmicos, emigran de las posiciones de alta concentración a posiciones de más baja concentración y la ley de Fick de la difusión describe este movimiento.

Si la cantidad de gas es baja, o si los poros a través de los que viaja el gas son muy pequeños, las moléculas chocarán con las paredes con mayor frecuencia que entre sí. Esto se conoce con el nombre de flujo de Knudsen o *difusión de Knudsen*. Después de chocar contra la pared, las moléculas son absorbidas, momentáneamente y después expelidas en direcciones fortuitas. El flujo de gas se reduce debido a las colisiones con la pared. Se pueden encontrar relaciones para describir la difusión de Knudsen en los gases mediante el uso de la teoría cinética. La constante de proporcionalidad que relaciona el flujo de Knudsen con el gradiente de concentración es independiente de la presión. Se demostrará que la constante de proporcionalidad correspondiente a la difusión de gases, tal como la describe la ley de Fick, es inversamente proporcional a la presión.

La transferencia de masa descrita por la ley de Fick, que resulta de las diferencias de concentración es el proceso principal con el que se topan los ingenieros así como el fenómeno de transferencia de masa que se estudiará en capítulos siguientes. Es importante, sin embargo, percatarse de que estos otros fenómenos relacionados de transporte molecular existen y de que pueden ser importantes en las futuras operaciones de transferencia de masa.

24.2 EL COEFICIENTE DE DIFUSION

La proporcionalidad de la ley de Fick, D_{AB}, se conoce con el nombre de coeficiente de difusión. Sus dimensiones fundamentales, que pueden obtenerse a partir de la ecuación (24-15),

$$D_{AB} = \frac{-J_{A,z}}{dc_A/dz} = \left(\frac{M}{L^2 t}\right)\left(\frac{1}{M/L^3 \cdot 1/L}\right) = \frac{L^2}{t}$$

son idénticas a las dimensiones fundamentales de las otras propiedades de transferencia: la viscosidad cinemática, ν y la difusividad térmica, α, o su razón equivalente, $K/\rho c_p$. La difusividad de la masa se ha dado en $cm^2/seg.$, las unidades SI son m^2/seg, o sea un factor 10^{-4} veces menor. En el sistema inglés, ft^2/h, son las unidades utilizadas. Para hacer conversiones de uno a otro de estos sistemas se utilizan las siguientes relaciones:

$$\frac{D_{AB}(cm^2/s)}{D_{AB}(m^2/s)} = 10^4$$

$$\frac{D_{AB}(ft^2/hr)}{D_{AB}(cm^2/s)} = 3.87 \qquad (24\text{-}26)$$

El coeficiente de difusión depende de la presión, de la temperatura y de la composición del sistema. En el Apéndice de Tablas, Tablas J1, J2 y J3, pueden consultarse los valores experimentales correspondientes a las difusivida-

des de los gases líquidos y sólidos, respectivamente. Como es de esperarse, de acuerdo con la movilidad de las moléculas, los coeficientes de difusión son generalmente mayores en relación con los gases (entre los valores de 5×10^{-6} y 1×10^{-5} m^2/seg.), que en relación con los líquidos (entre los valores: 10^{-10} y 10^{-9} m^2/seg.), que son mayores a los valores obtenidos en relación con los sólidos (entre 10^{-14} y 10^{-10} m^2/seg.).

En ausencia de datos experimentales, se han obtenido expresiones semiteóricas que aportan aproximaciones cuya validez es tan buena como la de los valores experimentales debido a las dificultades que existen para la medición de estas últimas.

DIFUSIVIDAD DE LA MASA GASEOSA

Las expresiones téoricas correspondientes al coeficiente de difusión en las mezclas gaseosas de baja densidad, en función de las propiedades moleculares del sistema, fueron obtenidas por Jeans*, Chapman† y Sutherland‡ usando la teoría cinética de los gases.Si se utiliza el razonamiento de estos científicos, para explicar los fenómenos de transferencia, se puede examinar el movimiento de las moléculas de gas, tal como se hizo en las secciones 7.3 y 15.2, y después obtener una expresión que relacione el coeficiente de difusión con las propiedades de los sistemas gaseosos.

Véase ahora el volumen de control de la figura 24.2. Si se especifica que el gas es estático o que fluye en forma laminar en la dirección de x, se puede considerar que la transferencia de masa de la especie A en la dirección de y se lleva a cabo solamente a escala molecular. Si se aplica la ecuación (4-1),

$$\iint_{\text{C.S.}} \rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dA+\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\text{C.V.}} \rho\,dV=0 \qquad (4\text{-}1)$$

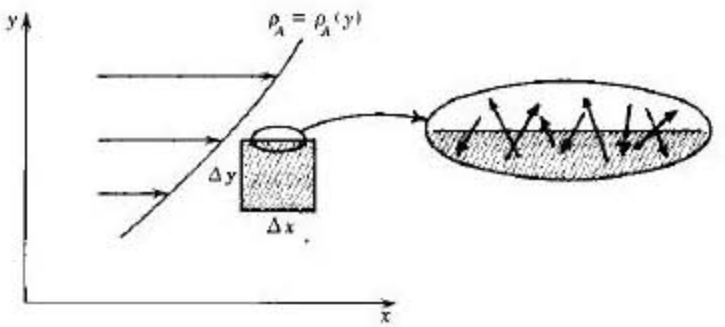


Figura 24.2 Movimiento molecular en la superficie de un volumen de control.

*Sir James Jeans, *Dynamical Theory of Gases*, Cambridge Univ Press, Londres, 1921.
†S. Chapman y T. G. Cowling, *Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*, Cambridge Univ. Press., Londres, 1959.
‡W. Sutherland, Phil. Mag. 36, 507 (1893), 38, 1 (1894).

a un flujo constante de masa a través de la cara superior del elemento,

$$\iint_{c.s.} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, dA = 0$$

Esta ecuación establece sencillamente, que el flujo ascendente de masa debe ser igual al flujo descendente.

Como primera aproximación estudiemos un sistema que contenga moléculas de igual tamaño y masa, que posea velocidades medias iguales. Sólo una mezcla gaseosa formada por isótopos del mismo elemento se parecería aproximadamente a este sistema. Si se vuelve a examinar la ecuación obtenida sobre una vase microscópica, se puede concluir que el número de moléculas que atraviesa la cara superior desde abajo deber ser igual al número de moléculas que atraviesa esta cara desde arriba. Ya que existe una concentración de la especie A, tal como aparece en la figura 24.2, se transportarán más moléculas a través de la superficie de control desde arriba, que desde abajo. Esto da como resultado un flujo neto de moléculas de A en la dirección de y.

Tal como se hizo anteriormente en los Capítulos 7 y 15, se usarán las siguientes ecuaciones, obtenidas de la teoría cinética de los gases de baja densidad:

$$\bar{C} = \sqrt{\frac{8\kappa T}{\pi m}}$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 N}$$

$$Z = \tfrac{1}{4} N \bar{C}$$

donde C es la velocidad molecular fortuita media, $\bar{C}/4$ es la velocidad de una molécula individual mientras pasa a través del área $\Delta x\ \Delta z$, λ es el paso medio libre, K es la constante de Boltzman, m es la masa de una molécula, d es el diámetro de las moléculas esféricas, N es la concentración molecular y Z es la frecuencia con la que llegará una molécula al área $\Delta x\ \Delta z$. La ecuación de continuidad, descrita en función de las moléculas en movimiento, es:

$$\sum_n m_n \frac{\bar{C}}{4} \Delta x\, \Delta z|_{y-} - \sum_n m_n \frac{\bar{C}}{4} \Delta x\, \Delta z|_{y+} = 0$$

o, al sumar las N moléculas en un volumen unitario:

$$\rho \frac{\bar{C}}{4} \Delta x\, \Delta z|_{y-} - \rho \frac{\bar{C}}{4} \Delta x\, \Delta z|_{y+} = 0$$

Si van a tomarse en cuenta solamente las moléculas de A que atraviesan esta superficie, la ecuación debe ser válida para un flujo neto de masa en la dirección de y

$$j_{A,y} = \frac{\bar{C}}{4}\rho_A|_{y-} - \frac{\bar{C}}{4}\rho_A|_{y+}$$

$$j_{A,y} = (\rho_A|_{y-} - \rho_A|_{y+})\frac{\bar{C}}{4} \tag{24-27}$$

De nuevo, como en los Capítulos 7 y 15, se supondrá que el perfil de la concentración es esencialmente lineal en una distancia de varias trayectorias medias libres. Entonces:

$$\rho_A|_{y-} = \rho_A - \frac{\partial \rho_A}{\partial y}\delta$$

y

$$\rho_A|_{y+} = \rho_A + \frac{\partial \rho_A}{\partial y}\delta$$

donde

$$y_- = y - \delta$$

y

$$y_+ = y + \delta$$

La sustitución de estas relaciones, correspondiente a $\rho_A|_{y-}$ and $\rho_A|_{y+}$ en la ecuación (24-27), da como resultado:

$$j_{A,y} = -2\frac{\bar{C}}{4}\delta\frac{\partial \rho_A}{\partial y} \tag{24-28}$$

donde δ representa a la componente en la dirección de y de la distancia entre colisiones. Se relaciona con la trayectoria media libre de una molécula, λ, por medio de la ecuación:

$$\delta = \tfrac{2}{3}\lambda$$

Ahora, nuestra ecuación se transforma en:

$$j_{A,y} = -\tfrac{1}{3}\bar{C}\lambda\frac{\partial \rho_A}{\partial y} \tag{24-29}$$

Si se compara la ecuación (24-29) con la (24-17),

$$j_{A,y} = -D_{AB}\frac{\partial \rho_A}{\partial y} \tag{24-17}$$

se pone de manifiesto que el coeficiente de difusión correspondiente a la mezcla de moléculas semejantes, o sea, A y el isótopo A^*, es:

$$D_{AA^*} = \tfrac{1}{3}\bar{C}\lambda \tag{24-30}$$

Este coeficiente de difusión se denomina, a menudo, *coeficiente de autodifusión* y se le utiliza para explicar la difusión de las moléculas trazadoras.

La sustitución de los resultados cinéticos correspondientes a $\bar{C}$ y λ, en la ecuación (24-30), da:

$$D_{AA^*} = \frac{2}{3\pi^{3/2} d^2 N}\left(\frac{\kappa T}{m}\right)^{1/2} \tag{24-31}$$

En un gas ideal se puede reemplazar a N, usando la relación

$$N\kappa T = cRT = P$$

y obteniéndose:

$$D_{AA^*} = \frac{2}{3\pi^{3/2} d^2 P}\left(\frac{\kappa^3 T^3}{m}\right)^{1/2} \tag{24-32}$$

La ecuación (24-32) demuestra que el coeficiente de difusión se puede expresar totalmente en función de las propiedades del gas. De manera distinta a lo que ocurre en otros coeficientes de transferencia de dos moléculas, la viscosidad y la conductividad térmica, el coeficiente de difusión depende de la presión así como de un orden más alto de temperatura absoluta. El significado de esto no debe pasarse por alto aunque se haya usado en el desarrollo un modelo muy simplificado.

Las versiones modernas de la teoría cinética han intentado tomar en cuenta las fuerzas de atracción y repulsión existentes entre las moléculas. Hirschfelder, Bird y Spotz*, utilizando el potencial de Lennard Jones para evaluar la influencia de las fuerzas intermoleculares, encontraron una ecuación adecuada al coeficiente de difusión correspondiente a parejas gaseosas de moléculas no polares† y no reactivas.

$$D_{AB} = \frac{0.001858 T^{3/2}\left(\dfrac{1}{M_A} + \dfrac{1}{M_B}\right)^{1/2}}{P\sigma_{AB}^{\,2}\Omega_D} \tag{24-33}$$

donde D_{AB} es la difusividad de la masa de A, que se difunde a través de B, en $(\text{cm})^2/\text{seg.}$, T es la temperatura absoluta en K; M_A, M_B son los pesos moleculares de A y B, respectivamente; P es la presión absoluta en atmósferas;

* J. O. Hirschfelder, R. B. Bird y E. L Spotz, *Chemm. Revs.* 44, 205-231 (1949).

† Para un estudio introductorio de estructuras polares y no polares, colsúltense F. Daniels y R. A. Alberty, Physical Chemistry, Wiley, Nueva York, 1955.

σ_{AB} es el "diámetro de colisión", que es un parámetro de Lennard-Jones en Angstroms; Ω_D es la "integral de colisión" correspondiente a la difusión molecular, que es una función adimensional de la temperatura y del campo potencial intermolecular correspondiente a una molécula de A y una de B. En la Tabla K1 del apéndice, aparece una lista de valores de Ω_D en función de KT/ϵ_{AB}; k es la constante de Boltzmann, igual a 1.38×10^{-16} ergios /K y ϵ_{AB} es la energía de la interacción molecular que corresponde al sistema binario AB, un parámetro de Lennard-Jones en ergios; ver ecuación (24-40). La ecuación (24-33) también señala la dependencia de la presión y la temperatura, tal como se demostró en la ecuación (24-32). Como la ecuación (24-33) define la propiedad de transferencia de una mezcla gaseosa binaria, no es sorprendente encontrar que el coeficiente de difusión también depende de las componentes que forman el sistema. Cuando se examinó el proceso de transferencia en una fase de una sola componente, no se encontró ningua dependencia de la composición en la ecuación (24-32) ni en las ecuaciones similares correspondientes a la viscosidad y a la conductividad térmica.

Los parámetros de Lennard-Jones, σ y ϵ_A, se obtienen usualmente de datos acerca de la viscosidad. Desafortunadamente esta información puede obtenerse solamente para unos cuantos gases puros. La Tabla K2 Apéndice tabula estos valores. En la ausencia de datos experimentales, los valores de las componentes puras se pueden calcular a partir de las siguientes relaciones empíricas:

$$\sigma = 1.18\, V_b^{1/3} \tag{24-34}$$

$$\sigma = 0.841\, V_c^{1/3} \tag{24-35}$$

$$\sigma = 2.44\left(\frac{T_c}{P_c}\right)^{1/3} \tag{24-36}$$

$$\epsilon_A/\kappa = 0.77 T_c \tag{24-37}$$

y

$$\epsilon_A/\kappa = 1.15 T_b \tag{24-38}$$

donde V_b es el volumen molecualr en el punto normal de ebullición, en $(cm)^3$/g mol (esto se calcula utilizando la Tabla 24.3); V_c es el volumen molecular crítico en $(cm)^3$/g mol; T_c es la temperatura crítica en K; T_b es la temperatura normal de ebullición en K y P_c es la presión crítica, en atmósferas.

Para un sistema binario compuesto de parejas moleculares no polares, se pueden combinar los parámetros de Lennar-Jones de la componente pura, emperíricamente, por medio de las siguientes relaciones:

$$\sigma_{AB} = \frac{\sigma_A + \sigma_B}{2} \tag{24-39}$$

y

$$\epsilon_{AB} = \sqrt{\epsilon_A \epsilon_B} \tag{24-40}$$

Estas relaciones deberán modificarse para parejas moleculares: polar-polar y polar-no polar. Hirschfelder, Curtiss y Bierd* analizaron las modificaciones propuestas.

La ecuación de Hirschfelder, Bierd y Spotz, ecuación (24-33), parece ser la mejor ecuación de que se dispone actualmente para el cálculo de las difusividades de masa que corresponden a los sistemas gaseosos no polares binarios. Reid y Sherwood**, comparando los valores experimentales con los valores calculados para 80 parejas de gases, encontraron que los valores predichos por las ecuaciones eran correctos, con un error máximo de un 6% con relación a los valores medidos.

Como los coeficientes de difusión son difíciles de medir con exactitud, esta desviación se puede deber, parcialmente, a los errores experimentales. Otras ecuaciones empíricas sugeridas por Arnold† y Gilliland‡ y por Slattery y Bird§, no concuerdan tanto.

De acuerdo con lo anterior, se recomienda utilizar la ecuación de Hirschfelder cuando no pueda hacerse uso de los valores experimentales.

La ecuación de Hirschfelder, que es la (24-33), se utiliza a menudo para extrapolar los datos experimentales. Para valores moderados de la presión, hasta de 25 atmósferas, el coeficiente de difusión varía inversamente a la presión. Las presiones más altas requieren, aparentemente, correcciones correspondientes a los gases, densos; desafortunadamente no existe ninguna relación satisfactoria para las presiones altas. La ecuación (24-33) también establece que el coeficiente de difusión varía con la temperatura, de acuerdo con la relación: $T^{3/2}/\Omega_D$. Si se simplifica la ecuación (24-33), se puede predecir el coeficiente de difusión a cualquier temperatura y a cualquier presión menor de 25 atmósferas, a partir de un valor experimental conocido, por medio de:

$$D_{AB_{T_2,P_2}} = D_{AB_{T_1,P_1}} \left(\frac{P_1}{P_2}\right)\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{3/2} \frac{\Omega_D|_{T_1}}{\Omega_D|_{T_2}} \tag{24-41}$$

En la Tabla J1 del Apéndice, los valores experimentales del producto $D_{AB}P$ aparecen en una lista que corresponde a varias parejas de gases a una temperatura particular. Cuando se usa la eucación (24-41) se pueden extender estos valores a otras temperaturas.

*J. O. Hirschfelder, C. F. Curtiss y R. B. Bird, *Molecular Theory of Gases and Liquids*, Wiley &Sons, Inc., Nueva York 1954.

**R. C. Reid y T. K. Sherwood, *The Properties of Gases and Liquids*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York 1954. Cap. 8.

†J. H. Arnold, *J. Ann Chem. Soc.* 52, 3937 (1930)

‡E. R. Gilliland, in *Eng. Chem.* 26, 681 (1934)

§J. C. Slattery y R. B. Bird, A. I. *Ch. E. J.* 4, 137 (1958)

EJEMPLO 2

Calcúlese el coeficiente de difusión del bióxido de carbono en aire a 20°C y presión atmosférica. Compárese este valor con el valor experimental que aparece en la Tabla J1 del Apéndice. Los valores de σ y ϵ/K se obtienen de la Tabla K2 del Apéndice.

	σ, in Å	ϵ_A/κ, in K
Bióxido de carbono	3.996	190
aire	3.167	97

Los diversos parámetros que se necesitan para resolver la ecuación (24-33) se pueden calcular de la siguiente manera:

$$\sigma_{AB} = \frac{\sigma_A + \sigma_B}{2} = \frac{3.996 + 3.617}{2} = 3.806 \text{ Å}$$

$$\epsilon_{AB}/\kappa = \sqrt{(\epsilon_A/\kappa)(\epsilon_B/\kappa)} = \sqrt{(190)(97)} = 136$$

$$T = 20 + 273 = 293 \text{ K}$$

$$P = 1 \text{ atm}$$

$$\frac{\epsilon_{AB}}{\kappa T} = \frac{136}{293} = 0.463$$

$$\frac{\kappa T}{\epsilon_{AB}} = 2.16$$

$$\Omega_D \text{ (Tabla K.1)} = 1.047$$

$$M_{CO_2} = 44$$

y

$$M_{\text{aire}} = 29$$

Al sustituir estos valores en la ecuación, se obtiene:

$$D_{AB} = \frac{0.001858\, T^{3/2}(1/M_A + 1/M_B)^{1/2}}{P\sigma_{AB}^2 \Omega_D}$$

$$= \frac{(0.001858)(293)^{3/2}(1/44 + 1/29)^{1/2}}{(1)(3.806)^2(1.047)} = 0.147 \text{ cm}^2/\text{s}$$

De la Tabla J1 para CO_2 en aire a 273 K, a una atmósfera, se tiene:

$$D_{AB} = 0.136 \text{ cm}^2/\text{s}$$

La ecuación (24-41) se utilizará para corregir las diferencias de temperatura,

$$\frac{D_{AB,T_1}}{D_{AB,T_2}} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{3/2} \left(\frac{\Omega_D|_{T_2}}{\Omega_D|_{T_1}}\right)$$

Los valores de Ω_D se pueden calcular así:

$$\text{at } T_2 = 273 \qquad \epsilon_{AB}/\kappa T = \frac{136}{273} = 0.498 \qquad \Omega_D|_{T_2} = 1.074$$

$$\text{at } T_1 = 293 \qquad \Omega_D|_{T_1} = 1.047 \qquad \text{(cálculo anterior)}$$

El valor corregido correspondiente al coeficiente de difusión a 20°C es:

$$D_{AB,T_1} = \left(\frac{293}{273}\right)^{3/2}\frac{(1.074)}{(1.047)}(0.136) = 0.155\ \text{cm}^2/\text{s} \quad (1.55\times 10^{-5}\ \text{m}^2/\text{s})$$

Se ve claramente que la dependiencia de la "colisión integral" de la temperatura, es muy pequeña. Por esto, la mayoría de los valores de las difusividades con relación a la temperatura sólo incluyen la razón $(T_1/T_2)^{3/2}$.

La transferencia de masa en las mezclas gaseosas de varias componentes puede describirse por medio de ecuaciones teóricas que incluyen los coeficientes de difusión correspondientes a las diversas parejas binarias que forman la mezcla. Hirschfelder, Curtiss y Bird*, elaboraron una expresión en su forma más general. Wilke† simplificó la teoría y demostró que una buena aproximación a la forma correcta, es la dada por la relación:

$$D_{1\text{-mixture}} = \frac{1}{y_2'/D_{1-2} + y_3'/D_{1-3} + \ldots + y_n'/D_{1\ n}} \tag{24-42}$$

donde $D_{1\text{-}mezcla}$ es la difusividad de la masa que corresponde a la componente 1 en la mezcla gaseosa; $D_{1\text{-}n}$ es la difusividad de la masa para el par binario, la componente 1 que se está difundiendo en la componente n; y y_n' es la fracción molar de la componente n en la mezcla gaseosa calculada con base libre en la componente 1, esto es:

$$y_2' = \frac{y_2}{y_2 + y_3 + \ldots + y_n}$$

EJEMPLO 3

Determínese la difusividad del monóxido de carbono en una mezcla de oxígeno en la cual las fracciones molares de cada una de las componentes, son:

$$y_{O_2} = 0.20$$
$$y_{N_2} = 0.70$$
$$y_{CO} = 0.10$$

La mezcla gaseosa está a 298 K y a 2 atmósferas de presión total.

En la Tabla J1 del apéndice se encuentra:

$$D_{CO\text{-}O_2} = 0.185\times 10^{-4}\ \text{m}^2/\text{s a 273 K, 1 atm}$$
$$D_{CO\text{-}N_2} = 0.192\times 10^{-4}\ \text{m}^2/\text{s a 288 K, 1 atm}$$

* J. A. Hirschfelder, C. F. Cirtiss y R. B. Bird, *Molecular Theory of Gases and Liquids*, Wiley, Nueva York, p. 718.

† C. R. Wilke, *Chem. Engr. Prog.*, 46, 95-104 (1950).

Los dos coeficientes binarios de difusión se pueden corregir para diferencias de presión y temperatura utlilizando la ecuación (24-41),

$$\frac{D_{AB\,\text{condición 1}}}{D_{AB\,\text{condición 2}}} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{3/2}\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

Para 298 K y 2 atm, se tiene:

$$D_{CO\text{-}O_2} = \left(\frac{298}{273}\right)^{3/2}\left(\frac{1}{2}\right)(0.185\times 10^{-4}\ \text{m}^2/\text{s}) = 0.105\times 10^{-4}\ \text{m}^2/\text{s}$$

y

$$D_{CO\text{-}N_2} = \left(\frac{298}{288}\right)^{3/2}\left(\frac{1}{2}\right)(0.192\times 10^{-4}\ \text{m}^2/\text{s}) = 0.101\times 10^{-4}\ \text{m}^2/\text{s}$$

Las composiciones del oxígeno del nitrógeno con base en el CO-libre son:

$$y_{O_2}' = \frac{0.20}{1-0.10} = 0.22$$

$$y_{N_2}' = \frac{0.70}{1-0.10} = 0.78$$

Y sustituyendo estos valores en la ecuación (24-42) se obtiene

$$D_{CO\text{-}O_2,N_2} = \frac{1}{\dfrac{0.22}{0.105\times 10^{-4}} + \dfrac{0.78}{0.101\times 10^{-4}}}$$

$$= 0.102\times 10^{-4}\ \text{m}^2/\text{s} \qquad (0.395\ \text{ft}^2/\text{hr})$$

DIFUSIVIDAD DE LA MASA LIQUIDA

En contraste con los gases, para los cuales existe una teoría cinética avanzada para explicar el movimiento molecular, las teorías de que se dispone para explicar la estructura de los líquidos y sus características de transferencia aún son inadecuadas para permitir un tratamiento riguroso. La inspección de los valores experimentales publicados en el Apéndice J2, relativos a los coeficientes de difusión de los líquidos, revelan que existen diversos órdenes de magnitud menores que los coeficientes de difusión de los gases y que dependen de la concentración debida a los cambios de viscosidad con la concentración así como a modificaciones en el grado en que la solución sea ideal.

Ciertas moléculas se difunden como moléculas, en tanto que otras, que se llaman electrólitos, se ionizan en las soluciones y se difunden como iones. Por ejemplo, el cloruro de sodio, Na Cl, se difunde en agua como los iones de Na^+ y Cl^-. Aunque cada uno de los iones posee distinta movilidad, la neutralidad eléctrica de la solución indica que los iones deben difundirse en alguna

proporción; por lo tanto, es posible hablar de un coeficiente de difusión de los electrólitos tales como el NaCl. Sin embargo, si se encuentran presentes varios iones, se debe tener en cuenta la rapidez de difusión de los cationes y aniones individuales y los coeficientes de difusión molecular no tienen significado. No es necesario decir que se necesitarán correlaciones separadas que se utilizan en la predicción de la relación entre las difusividades de la masa líquida, para los electrólitos, así como para los no electrólitos.

Se han postulado dos teorías, la del "hoyo" de Eyring y la hidrodinámica, como posibles explicaciones al fenómeno de difusión de solutos no electrolíticos en soluciones de baja concentración. En el concepto de Eyring el líquido ideal se trata como un modelo de capas casi cristalinas interespaciadas con hoyos. Entonces se describe el fenómeno de transferencia por medio de un proceso que incluye el salto de las moléculas de soluto en los hoyos del modelo de capas. Estos saltos se relacionan empíricamente con la teoría de Eyring de rapidez de reacción*. La teoría hidrodinámica establece que el coeficiente de difusión de los líquidos se relaciona con la movilidad de las moléculas de soluto; esto es, con la velocidad neta de la molécula mientras ésta se encuentra bajo la influencia de una fuerza motriz unitaria. Las leyes de la hidrodinámica establecen relaciones entre la fuerza y la velocidad. Una de las ecuaciones desarrolladas a partir de la teoría hidrodinámica es la ecuación de Stokes-Einstein:

$$D_{AB} = \frac{\kappa T}{6\pi r \mu_B} \tag{24-43}$$

donde D_{AB} es la difusividad de A en una solución diluida de B, k es la consonante de Boltzmann, T es la temperatura absoluta, r es el radio de la partícula de soluto y μ_B es la viscosidad del solvente. Esta ecuación ha sido bastante útil en la descripción de la difusión de las patículas coloidales de moléculas redondas y grandes, en un solvente que se comporta como un continuo en relación con la especie en difusión.

Los resultados de ambas teorías se pueden reordenar en la forma general:

$$\frac{D_{AB}\mu_B}{\kappa T} = f(V) \tag{24-44}$$

en la cual $f(v)$ es una función del volumen molecular del soluto en difusión. Se han obtenido correlaciones empíricas en un intento de predecir el coeficiente de difusión de los líquidos en función de las propiedades del soluto y del solvente. Wilke y Chang† propusieron la siguiente correlación, que es la mejor de que se dispone para los no electrólitos en una solución diluida

$$\frac{D_{AB}\mu_B}{T} = \frac{7.4\times 10^{-8}(\Phi_B M_B)^{1/2}}{V_b^{0.6}} \tag{24-45}$$

* S. Glasstone, K. J. Laider y H. Eyring, *Theory of Rate Processes*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1941, Capítulo IX.

†C. R. Wilke y P. Chang, A. I. Ch E. J., *1*, 264 (1955).

donde D_{AB} es la difusividad de la masa de A que se difunde en el solvente líquido B en cm^2/seg, μ_B es la viscosidad de la solución, en centipoises; T es la temperatura absoluta, en K, M_B es el peso molecular del solvente; V_b es el volumen molar del soluto en el punto normal de ebullición, en cm^3/g mol y Φ_B es el parámetro de "asociación" correspondiente al solvente B.

Los volúmenes moleculares a los puntos normales de ebullición, V_b, aparecen tabulados en la Tabla 24.3. Para otros compuestos, los volúmenes atómicos de cada uno de los elementos presentes se suman mediante las fórmulas moleculares. En la Tabla 24.4 aparece un listado de las contribuciones correspodientes a cada uno de los átomos constituyentes. Cuando se incluyen ciertas estructuras de anillo, deben hacerse correcciones que correspondan a la configuración específica de anillo. Se recomiendan las siguientes correcciones:

para el anillo triple, como el óxido de etileno	restar 6
para el anillo cuádruple como el ciclobutano	restar 8.5
para el anillo quíntuple, como el furano	restar 11.5
para la piridina	restar 15
para el anillo de benceno	restar 15
para el anillo de naftalina	restar 30
para el anillo de antraceno	restar 47.5

TABLA 24.3 VOLUMENES MOLECUALRES A LA TEMPERATURA DEL PUNTO NORMAL DE EBULLICION DE ALGUNOS COMPUESTOS COMUNES.

Compuesto	Volumen molecular en cm^3/g mol	Compuesto	Volumen molecular en cm^3/g mol
Hidrógeno H_2	14.3	Oxido nítrico NO	23.6
Oxígeno, O_2	25.6	Oxido nitroso N_2O	36.4
Nitrógeno N_2	31.2	Amoniaco NH_3	25.8
Aire	29.9	Agua H_2S	18.9
Monóxido de carbono CO	30.7	Sulfuro de hidrógeno H_2O	32.9
Bióxido de carbono CO_2	34.0	Bromuro Br_2	53.2
Sulfuro de carbonilo COS	51.5	Cloruro Cl_2	48.4
Bioxido sulfúrico SO_2	44.8	Yodo I_2	71.5

Los valores recomendados del parámetro de asociación, Φ_B para unos pocos solventes se proporcionan en seguida:

EJEMPLO 4

Calcúlese el coeficiente de difusión del líquido, del etanol, C_2H_5OH en agua a 10°C. El volumen molecular del etanol se puede evaluar utilizando los valores de la Tabla 24.4, en la forma siguiente:

$$V_{C_2H_5OH} = 2V_C + 6V_H + V_O$$

$$V_{C_2H_5OH} = 2(14.8) + 6(3.7) + 7.4 = 59.2\ cm^3/mol$$

TABLA 24.4 VOLUMENES ATOMICOS CORRESPONDIENTES A VOLUMENES MOLECULARES COMPLEJOS DE SUSTANCIAS SIMPLES

Elemento	Volumen atómico en cm^3 /g mol	Elemento	Volumen atómico en cm^3 /g mol
Bromuro	27.0	Oxígeno, excepto en la	7.4
Carbono	14.8	forma anotada abajo	
Cloro	21.6	Oxígeno, en los ésteres	9.1
Hidrógeno	3.7	metílicos	
Yodo	37.0	Oxígeno en los éteres	9.9
Nitrógeno, doble	15.6	metílicos	
enlace		Oxígeno en los éteres	11.0
Nitrógeno en los	10.5	altos y otros ésteres	
aminos primarios		Oxígeno, en los	12.0
Nitrógeno en los	12.0	ácidos	
aminos secundarios		Azufre	25.6

* G. Le Bas, *The Molecular Volumes of Liquid Chemical Compounds*, Long mans, Green y Co., Ltd., Londres, 1915.

Solvente	Φ_B
Agua	2.6
Metanol	1.9
Etanol	1.5
Benceno, éter, heptano y otros solvevtes no asociados	1.0

A 10°C, la viscosidad de una solución que contiene 0.05 mol de alcohol por cada litro de agua es de 1.45 centipoises; los parámetros restantes que van a usarse, son:

T=283K

ϕ_B correspondiente al agua=2.6

M_B para agua=18

si se constituyen estos valores en la ecuación (24-45), se obtiene:

$$D_{C_2H_5OH\text{-}H_2O} = \left(\frac{7.4\times10^{-8}(2.6\times18)^{1/2}}{(59.2)^{0.6}}\right)\left(\frac{283}{1.45}\right)$$

$$= 8.5\times10^{-6}\ cm^2/s \qquad (8.5\times10^{-10}\ m^2/s)$$

Este valor concuerda de manera excelente con el valor experimental de $8.3X10^{-10}$ m^2/seg, que aparece en el Apéndice J.

La ecuación (24-45) se recomienda solamente en soluciones diluidas de soluto no disociativos. Para estas soluciones, predice valores cuyo margen de error es de 13% con relación a los datos experimentales*. La ecuación (24-25) no es aplicable a la difusión de las moléculas grandes; esto es: si $V_b > 0.27\ (\Phi_B\ M_B)^{1.87}$, entonces se recomienda utilizar una forma reducida de la ecuación de Stokes-Einstein:

$$D_{AB} = \frac{1.05 \times 10^{-9} T}{\mu V_b^{1/3}} \tag{24-46}$$

en el caso de las moléculas grandes de soluto.

Las propiedades de las soluciones conductoras de la electricidad se han estudiado ya en forma intensiva durante más de 75 años. Aún así, las relaciones conocidas entre la conductividad eléctrica y el coeficiente de difusión del líquido son válidas únicamente para soluciones de sales diluidas en agua. El coeficiente de difusión de una sal equivalente en solución diluida, está dada por la ecuación de Nernst:

$$D_{AB} = \frac{2RT}{(1/\lambda_+^0 + 1/\lambda_-^0)\mathcal{F}} \tag{24-47}$$

donde D_{AB} es el coeficiente de difusión basado en la concentración molecular de A, en cm^2/seg; R es la constante universal de los gases, 8.316 joules/(K) (g mol); T es la temperatura absoluta en K; λ_+^0, λ_-^0 son las conductancias iónicas límite (concentración cero) en (amp/cm^2) (volt/cm) (g equivalente/cm^3) y es la constante de Faraday, de 96,500 coulombs/g equivalente. Esta ecuación se ha ampliado a iones polivalentes reemplazando la constante numérica 2 por $(1/n^+ + 1/n^-)$ donde n^+ y n^- son las valencias del catión y del anión, respectivamente

DIFUSIVIDAD DE LA MASA SOLIDA

En cualquier estudio del movimiento molecular en el estado sólido, la explicación de la transferencia de masa se divide automáticamente en dos campos mayores de interés, la difusión de los gases o líquidos en los poros del sólido y la interdifusión de los constituyentes sólidos por medio del movimiento atómico. La primera clase de difusión tiene un papel preponderante en la catálisis y es importante para el ingeniero químico. Los metalurgistas son los principales investigadores de la difusión de los átomos en los sólidos.

La difusión en los poros se puede llevar a cabo por medio de tres o más mecanismos: difusión de Fick, difusión de Knudsen y difusión superficial. Si los poros son grandes y el gas relativamente denso, la transferencia de masa se llevará a cabo por medio de una difusión de Fick. Dentro del catalizador, las trayactorias de difusión son como canales de forma irregular; por lo tanto,

*R. C. Reid y T. K. Sherwood, *The Properties of Gases and Liquids*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1958, Cap. 8.

el flujo es menor de lo que sería en poros uniformes de la misma longitud y radio promedio. El flujo de masa se describe en función del coeficiente "efectivo" de difusión, por medio de la ecuación:

$$\mathbf{J}_A = -cD_{A.\text{eff}} \nabla y_A \tag{24-48}$$

La magnitud del coeficiente depende de las variables que influyan en la fase de difusión, tales como la temperatura y la presión, así como de las propiedades del catalizador, tales como espacio fraccional vacío, θ , un factor angular de longitud, L´y un factor de forma S´,

$$D_{A.\text{eff}} = \frac{D_{AB}\theta}{2L'S'} = \frac{D_{AB}\theta}{\tau} \tag{24-49}$$

donde τ es la tortuosidad, o sea, un factor que describe la relación entre la longitud real de la trayectoria y la longitud nominal del medio poroso. Satterfield* encontró valores experimentales correspondientes a: θ ,τ y $D_{A\,,\,\text{ef}}$.

La difusión de Knudsen ocurre cuando el tamaño de los poros es del orden del de la trayectoria media libre de la molécula en difusión. Se ha encontrado una relación que describe la difusión de Knudsen y su coeficiente de difusión, usando la teoría cinética de los gases.

$$N_A = \frac{D_{K.\text{eff}}}{x_0}(c_{A_1} - c_{A_2}) = \frac{D_{K.\text{eff}}}{RTx_0}(p_{A_1} - p_{A_2}) \tag{24-50}$$

y

$$D_{k.\text{eff}} = \frac{19\,400\,\theta^2}{\tau S'\rho}\sqrt{\frac{T}{M}} \tag{24-51}$$

donde x_0 es la longitud de la trayectoria de difusión, ρ es la densidad de la partícula catalizadora y M el peso molecular del gas en difusión

La difusión superficial tiene lugar cuando las moléculas que se han absorbido son transportadas a lo largo de la superficie como resultado de un gradiente bidimensional de concentración superficial. † Usualmente la difusión superficial tiene un papel menor en la difusión en un sólido catalizador a menos que exista una gran cantidad de absorción.

La introducción de un átomo extraño puede alterar las propiedades importantes de un metal.

El edurecimiento del acero es un proceso industrial basado en la difusión del carbono y otros elementos en el hierro. Se han producido semiconductores por medio de la difusión de átomos "dopados" dentro de cristales. Los cuatro mecanismos que se postulan para la difusión en los sólidos son: la difusión de vacancia, la intersticial, la de intersticialidad y la difusión por intercambio directo de moléculas adyacentes.

* C. N. Satterfield, *Mass Transfer in Heterogeneus Catalysis*, M. I. T. Press, Cambridge, Mass, 1970.
† V. G. Levich, *Physicochemical Hydrodynamics*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J. 1962.

En todos los cristales que se encuentran en equilibrio térmico a temperaturas superiores al cero absoluto, existen sitios desocupados o vacantes en las redes. Un átomo puede saltar de su posición a una vacante vecina, tal como puede verse en la figura 24.3 a.

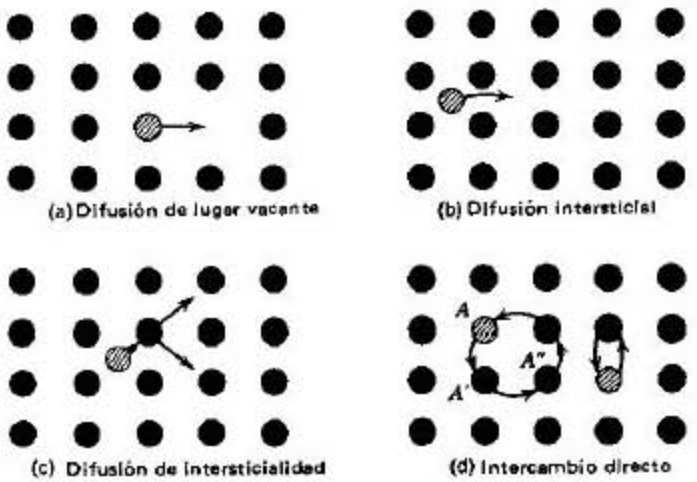


Figura 24.3 Difusión en un cristal.

El átomo en difusión continúa moviéndose a través del cristal por medio de una serie de intercambios con sitios vacantes que aparecen adyacentes a él de vez en cuando. Esto usualmente requiere de una distorsión de la red. Este mecanismo se ha descrito matemáticamente suponiendo un proceso de rapidez unimolecular y aplicando el concepto de Eyring de "estado activado", tal como se estudió en la teoría de los "hoyos" correspondiente a la difusión de los líquidos. La ecuación resultante es complicada y no se estudiará aquí. Relaciona la difusividad con la relación geométrica entre las posiciones en la red, la longitud de la trayectoria de salto, la frecuencia de vibración del átomo en la dirección del salto y la energía de activación asociada al salto. La *difusión de vacancia* es el mecanismo dominante de difusión en los metales y aleaciones cúbicos centrados en las caras. El mecanismo se ha usado para explicar la difusión en materiales cúbicos centrados en el cuerpo así como en compuestos iónicos y óxidos.

Un átomo se mueve en *difusión intersticial* saltando de un sitio intersticial a otro vecino, como puede verse en la figura 24.3 b. Esto usualmente incluye una dilatación o distorsión de la red; así pues, el método matemático que incluye la teoría de Eyring de rapidez unimolecular también se usa para definir la difusividad intersticial. Este coeficiente de difusión se define en función de las mismas variables que en el caso de la difusión de vacancia.

Cuando el átomo intersticial en difusión posee un tamaño comparable al de átomos de la red, tiene lugar un proceso diferente del de difusión intersticial. Si se empuja el átomo de una red vecina hacia el sitio intersticial adya-

cente, el átomo intersticial se puede mover hasta un sitio normal en la red. Este mecanismo, tal como aparece en la figura 24.3c, se llama *difusión de intersticialidad*.

El cuarto mecanismo que se propone para explicar la autodifusión en los metales y aleaciones incluye el intercambio directo de más átomos por medio de una rotación en forma de anillo. Los tres átomos giran como en un tiovivo y después de dos intercambios, el átomo A se corre hasta una posición nueva, A′. Después efectúa una rotación con los otros dos átomos, llegando finalmente a A′′. El mecanismo de anillo no se sabe que ocurra en ningún metal o aleación, pero se ha sugerido como un mecanismo que puede explicar algunas anomalías aparentes en los coeficientes de difusión de los metales con redes centradas en el cuerpo.

Existen referencias excelentes para un estudio más detallado de la transferencia de masa de los átomos a través de cristales.*

24.3 TRANSFERENCIA CONVECTIVA DE MASA

La transferencia de masa debida a la convección consiste en la transferencia entre un fluido en movimento y una superficie o entre dos fluidos en movimiento, relativamente no miscibles. Este modo de transferencia depende, tanto en las propiedades de transferencia como de las características dinámicas del fluido que está fluyendo.

Se debe hacer una distinción entre los dos tipos de flujo, tal como se hizo en el caso de la transferencia convectiva de calor. Cuando una bomba u otro aparato semejante ocasiona el movimiento del fluido, el proceso se llama *convección forzada*. Si el movimiento del fluido se debe a una diferencia de densidades, que puede haber surgido como resultado de una concentración o de una diferencia de temperatura, el proceso se llama *convección libre o natural*.

La ecuación de rapidez correspondiente a la transferencia convectiva de masa, generalizada en forma análoga a la "ley" de Newton del enfriamiento, ecuación (15-11), es:

$$N_A = k_c \, \Delta c_A \tag{24-52}$$

donde N_A es la transferencia de masa molar de la especie A, medida con relación a coordenadas especiales fijas; Δc_A es la diferencia entre la concentración de la superficie límite y la concentración media de la corriente de fluido de la especie A en difusión y K_c es el coefieciente de transferencia convectiva de masa.

* *Atom Movement*, American Society for Metals, 1951, R. M. Barrer, *Diffusion in and Through Solids*, Cambridge University Press, Londres, 1941. P. G. Shewmon, *Diffusion of Solids*, McGraw-Hill Book Company Nueva York, 1963. L. A. Girifalco *Atomic Migration in Crystals*, Blaisdell, Nueva York, 1964. B. L. Sharma, *Diffusion in Semiconductors*, Trad. Tech Publications, D-3392, Clausthal-Zellerfeld, Alemania, 1970.

Como se hizo en el caso de la transferencia de masa molecular, la transferencia convectiva de masa, la transferencia se lleva a cabo en la dirección de una concentración decreciente. La ecuación (24-52) define el coeficiente K_c en función del flujo de masa y la diferencia de concentración desde el principio hasta el final de la trayectoria de difusión. Por lo tanto, el coeficiente incluye las características de las regiones de flujos laminar y turbulento del fluido, en cualesquiera proporciones en las que se encuentren. En los capítulos 28 y 29 se estudiarán los métodos de determinación de este coeficiente. En general es una función de: la geometría del sistema, las propiedades del fluido del flujo, y la diferencia de concentración Δc_A.

Puede recordarse, a partir de la experiencia que se ha tenido con fluidos que circulan alrededor de una superficie, que siempre hay una capa, a veces extremadamente delgada, cercana a la superfice, donde el flujo es laminar y las partículas próximas a la frontera sólida se encuentran en reposo. Como esto siempre se cumple, el mecanismo de transferencia de masa entre una superficie y un fluido debe incluir una transferencia de masa molecular a través de las capas estancada y laminar de fluido. La resistencia que controla la transferencia convectiva de masa es, a menudo, el resultado de esta "película" de fluido y el coeficiente K_c se llama, de acuerdo con esto, *coeficiente de la película*.

Es importante para el estudiante percatarse de la estrecha similitud entre el coeficiente de transferencia convectiva de calor y de masa. Esto, de inmediato, sugiere el hecho de que las técnicas desarrolladas para la evalución del coeficiente de transferencia convectiva de calor se puede aplicar a la transferencia convectiva de masa. En el Capítulo 28 se hará un estudio completo de los coeficientes de transferencia convectiva de masa así como de su evaluación.

24.4 CONCLUSION

En este capítulo se han introducido los dos modos de transferencia de masa, molecular y convectivo. Como la difusión de masa incluye una mezcla múltiple de componentes, se presentaron las relaciones fundamentales correspondientes da las concentraciones y velocidades de la especie individual así como de la mezcla. Se han estudiado la propiedad de transferencia molecular, D_{AB}, el coeficiente de difusión o difusividad de la masa en sistemas gaseosos, líquidos y sólidos y se han presentado las ecuaciones que los correlacionan.

Las ecuaciones de rapidez correspondientes a la transferencia de masa de la especie A en una mezcla binaria, son:

Transferencia molecular de masa

$$\mathbf{J}_A = -cD_{AB}\nabla y_A$$ flujo molar relativo a la velocidad molar media

$\mathbf{j}_A = -\rho D_{AB} \nabla \omega_A$	flujo de masa relativo a la velocidad de la masa promedio
$\mathbf{N}_A = -cD_{AB} \nabla y_A + y_A(\mathbf{N}_A + \mathbf{N}_B)$	flujo molar relativo a coordenadas espaciales fijas
$\mathbf{n}_A = -\rho D_{AB} \nabla \omega_A + \omega_A(\mathbf{n}_A + \mathbf{n}_B)$	flujo de masa relativo a coordenadas espaciales fijas

transferencia convectiva de masa:

$$N_A = k_c \Delta c_A$$

496 PROBLEMAS

24.1 Se va a llevar gas natural líquido, GNL, de la Península de Kenai, en Alaska, a un lugar de la Bahía Yakina, en Oregon, por medio de un transporte marítimo. La composición molar del GNL comercial es:

metano Ch_4	94.9%
etano C_2 H_6	4.0%
propano C_3 H_8	0.6%
bióxido de carbono CO_2	0.5%

Determinese:
(a) la fracción de peso del metano,
(b) el peso molecular medio de la mezcla de GNL
(c) la densidad de la mezcla gaseosa cuando se le calienta a 193 K y $1.013X10^5$ Pa.
(d) la presión parcial del metano cuando la presión total del sistema es de $1.013X10^5$ Pa.
(e) la fracción de masa del propano en partes por millón.

24.2 Se analiza un gas natural, resultando: CO_2, 4%; CH_4, 77% , C_2 H_6, 5.0% y N_2, 14% . Determine las siguientes propiedades de la mezcla gaseosa:
(a) fracción molar de C_2 H_6,
(b) fracción de peso de N_2
(c) peso molecular medio de la mezcla de gas natural
(d) presión parcial de cada una de las componentes si la presión total es de 1,500 mm Hg.

24.3 En un recipiente de 30 m^3 hay aire a 400 K y $1.013X10^5$ Pa. Determine las siguientes propiedades de la mezcla gaseosa:
(a) fracción molar de O_2,
(b) fracción volumétrica de O_2,
(c) peso de la mezcla

(d) densidad de la masa de O_2,
(e) densidad de la masa de N_2,
(f) densidad de la masa de aire
(g) densidad molar del aire
(h) peso molecular de la mezcla
(i) presión parcial del N_2

24.4 En una mezcla gaseosa binaria, demuestre las relaciones siguientes:
(a) el coeficiente de difusión de A en B es igual al coeficiente de difusión de B en A; esto es: $D_{AB} = D_{AB}$;
(b) $\mathbf{J}_A + \mathbf{J}_B = 0$;
(c) $\mathbf{n}_A + \mathbf{n}_B = \rho \mathbf{v}$;
(d) $\mathbf{N}_A + \mathbf{N}_B = c\mathbf{V}$.

24.5 Usando solamente las definiciones de concentración, velocidad y flujo, demuestre en el caso de una mezcla binaria de A y B, que:
(a) la fracción de masa, ω_A, se relaciona con la fracción molar x_A, por medio de la relación:

$$\omega_A = \frac{x_A M_A}{x_A M_A + x_B M_B}$$

(b)

$$d\omega_A = \frac{M_A M_B \, dx_A}{(x_A M_A + x_B M_B)^2}$$

24.6 Analice la transferencia unidimensional de masa de una mezcla de oxígeno y bióxido de carbono a 294 K y una presión total de 1.519×10^5 Pa. Designe al oxígeno con el nombre de gas A y al bióxido de carbono con el de gas B. A partir de las siguientes condiciones: $x_A = 0.40$, $v_A = 0.08$ m/seg y $v_B = -0.02$ m/seg., calcule lo que a continuación se pide:
(a) x_B
(b) peso molecular de la mezcla en kg/mol
(c) ρ_{mezcla}, ρ_A y ρ_B en kg/m^3
(d) c_{mezcla}, c_A y c_B en mol/m^3
(e) ω_A y ω_B
(f) $v_A - v$ y $v_B - v$ en m/seg.
(g) $v_A - V$ y $v_B - V$ en m/seg.
(h) N_A, N_B y $N_A + N_B$ en mol/m^2 seg.
(i) n_A, n_B y $n_A + n_B$ en kg/m^2. seg.
(j) j_B en kg/m^2. seg.
(k) J_B en mol/m^2. seg.
Use solamente las difiniciones de las concentraciones, velocidades y flujos.

24.7 Demuestre que el valor de D_{AB} es constante en las ocho formas de la ecuación de Fick de la rapidez que aparece en la Tabla 24.2, que es lo mismo que demostrar la equivalente de todas las formas de la ecuación de Fick de la rapidez.

24.8 Demuestre que:

$$dx_A = \frac{d\omega_A}{M_A M_B(\omega_A/M_A + \omega_B/M_B)^2}$$

en una mezcla binaria de las componentes A y B. Use las difiniciones de las concentraciones, velocidades y flujos.

24.9 Una mezcla de gas a 1 atm de presión y 250° C de temperatura, posee la siguiente composición molar:

CO_2	8.0%
O_2	3.5
H_2O	16.0
N_2	72.5

Las velocidades absolutas de las especies son 8 ft/seg, 12 ft/seg, 18 ft/seg y 13 ft/seg, respectivamente, todas en la dirección de z. Determine v_z, V_z, $j_{CO_2,z}$, $J_{CO_2,z}$.

24.10 Las bolas contra polilla se fabrican a menudo de naftalina. Cuando la naftalina se vaporiza, se difunde en el aire atmosférico circundante. Calcule la difusividad del sistema de naftalina y aire a 1 atm y 20°C, usando la ecuación (24-33) de Hirschfelder, Bird y Spotz. Calcule el valor a la presión y temperatura estipuladas, usando el valor que aparece en el Apéndice J. Las propiedades críticas de la naftalina son:

$$V_c = 3.1847 \text{ ml/g}$$

$$T_c = 469°C$$

$$P_c = 29\,792 \text{ torr}$$

24.11 Una mezcla gaseosa que fluye a través de un conducto tiene la siguiente composición molar:

CO	5%
CO_2	7%
O_2	8%
N_2	80%

Un tubo de Pitot, conectado a un manómetro lleno de agua se utiliza para medir la velocidad media de la corriente. Si las velocidades de las componentes individuales son 5.5 m/seg, correspondientes al Co; 3 m/seg, correspondiente al CO_2; 5 m/seg para el 0_2 y 6 m/seg para el N_2, ¿cuál será la lectura del manómetro en centímetros? El gas se encuentra a 295 K y $1.013\chi10^5$ Pa.

24.12 Se ha propuesto una torre de absorción para eliminar, de manera selectiva, de la contaminación de dos tipos: del sulfuro de hidrógeno y del bióxido de azufre, que abandonan una corriente de gases de escape. Uno de los parámetros del diseño, el número de Schmidt, requiere

de un valor de la difusividad gaseosa de la especie, en difusión en el aire atmosférico circundante. Calcule la difusividad del sulfuro de hidrógeno en el aire y del bióxido de azufre en aire a 1.013×10^5 Pa y 473 K, usando la ecuación de Hirschfelder, Bird y Spotz, que es la (24-33). Compárese este valor calculado correspondiente al bióxido de azufre en el aire, con el que aparece al de la Tabla J1 del Apéndice, corregido a la temperatura y presión estipuladas. Las propiedades críticas del sulfuro de hidrógeno son:

$$T_c = 460.9 \text{ K}$$
$$P_c = 33.35 \times 10^5 \text{ Pa}$$
$$V_c = 3.07 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{mol}$$

24.13 Prediga la rapidez con la cual se difundirá el monóxido de carbono, formado a partir del carbono 12, a través del nitrógeno por difusión molecular comparándose con la difusión del monóxido de carbono formado a partir del carbono 14. Suponga que las concentraciones y condiciones de estado son idénticas.

24.14 Un investigador, al estudiar un gas no polar, monoatómico, *M*, midió la conductividad térmica y la viscosidad, obteniendo a una atmósfera los resultados siguientes:

Temperatura en °K	Viscosidad $\mu \times 10^7$ gm/(cm)(sec)	Conductividad térmica $k \times 10^7$ cal/(sq cm)(°C)
293	2260	...
500	3652	211

Calcule el coeficiente de difusión de *M* a través del neón a 300 K y 1 atm de presión. Los parámetros de Lennard-Jones correspondientes al neón, son:

$$\epsilon/\kappa = 35.7 \text{ K}$$

y

$$\sigma = 2.789 \text{ Å}$$

24.15 Larson* midió la difusividad del cloroformo en aire a 25°C y 1 atm de presión, informando que su valor es de 0.095 cm^2/seg. Evalúe el coeficiente de difusión por medio de la ecuación de Hirschfelder, (24-33) y compare con el valor experimental.

* E. M. Larson, Tesis de M. C., Oregon State University, 1964.

24.16 Determine los valores de las siguientes difusividades de los gases:
(a) argón/nitrógeno a 298 K y 3×10^5 Pa
(b) monóxido de carbono/aire a 298 K y 2×10^5 Pa
(c) bióxido de carbono/aire a 298 K y 2.5×10^5 Pa
(d) alcohol propílico/aire a 300 K y 1.013×10^5 Pa
(e) etanol/alcohol propílico a 350 K y 2.5×10^5 Pa
(f) etanol/aire a 300 K y 1.5×10^5 Pa
(g) acetona/aire a 298 K y 1.013×10^5 Pa
(h) yodo/yodo 131 a 298 K y 2.5×10^5 Pa.

24.17 Stafan y Maxwell explicaron la difusión de A en B en función de la fuerza motriz, dc_A, las resistencias que se deben vencer en la transferencia de masa y de una constante de proporcionalidad β. La ecuación siguiente expresa matemáticamente las resistencias correspondientes a un sistema isotérmico, isobárico, binario, gaseoso;

$$-dc_A = \beta \frac{\rho_A}{M_A} \frac{\rho_B}{M_B}(v_{A,z} - v_{B,z})\, dz$$

Wilke* amplió esta teoría a una mezcla gaseosa de componentes múltiples. La forma apropiada del tipo de ecuación de Maxwell que se usó fue:

$$-\frac{dc_A}{dz} = \beta_{AB}\frac{\rho_A}{M_A}\frac{\rho_B}{M_B}(v_{A,z} - v_{B,z}) + \beta_{AC}\frac{\rho_A}{M_A}\frac{\rho_C}{M_C}(v_{A,z} - v_{C,z})$$
$$+ \beta_{AD}\frac{\rho_A}{M_A}\frac{\rho_D}{M_D}(v_{A,z} - v_{D,z}) + \ldots$$

utilizando esta relación, verificar la ecuación (24-42).

24.18 Determine la difusividad del nitrógeno en una mezcla gaseosa que tiene la composición siguiente:

O_2	6%
CO	11%
CO_2	16%
N_2	67%

La mezcla se encuentra a 100°C y a 1.5 atm. de presión.

24.19 En el tratamiento de aguas negras se inyecta gas de cloro a través del agua en una vasija de tratamiento. Usese la correlación de Wilke y Chang, ecuación (24-45) para predecir la difusividad del cloro en agua a 16°C y 1 atm de presión. Compare el valor obtenido con el que aparece en el Apéndice J.

* C. Wilke, *Chem. Eng. Prog.* 46, 95 (1950).

24.20 Determine la difusividad del monóxido de carbono en aire por medio de (a) la ecuación de Hirschfelder, Bird y Spotz, ecuación (24-33) y (b) la ecuación de Wilke correspondiente a una mezcla gaseosa (24-42). El aire se encuentra a 373 K y 1.513 X 10^5 Pa. Compare los resultados obtenidos con los que aparecen en el Apéndice J.

24.21 Determine la difusividad del amoniaco en una mezcla gaseosa que contiene 21 moles por ciento de O_2 y 79 por ciento de N_2 usando la ecuación de Wilke corespondiente a una mezcla gaseosa (24-42). El gas se encuentra a 273 K y a 1.013×10^5 Pa. Compare usted sus resultados con el valor que aparece en el Apéndice J.

24.22 Calcule la difusividad del *n*-butanol en agua a 10°C, usando las ecuaciones recomendadas en el caso de solventes orgánicos. Compare el resultado con el del Apéndice J2.

24.23 La difusividad líquida del tetracloruro de carbono en metanol medida por Reid y Sherwood* fue de 1.7×10^{-9} m^2/seg a 288 K. Calcule el parámetro de asociación ϕ_B del metanol, usando este valor experimental. La viscosidad del metanol a 288 K es de 0.62 centípoises.

24.24 Calcule la difusividad líquida de los solutos siguientes, transferidos a través de soluciones diluidas, utilizando la ecuación de Wilke-Chang (24-45):

(a) bióxido de carbono en etanol a 20°C.
(b) bióxido de carbono en agua a 20°C.
(c) tetracloruro de carbono en benceno a 25°C.
(d) metanol en agua a 15°C.
(e) autodifusión en agua a 25°C.

Cuando sea posible, compare los valores calculado y experimental, de acuerdo con la Tabla J2 del Apéndice.

24.25 Los procesos de transferencia de gas son operativos en varios sistemas de tratamiento de aguas potables y negras. A menudo las aguas se airean para remover los gases indesables y aumentar el nivel de oxígeno. Use la correlación de Wilke y Chang, ecuación (24-45) para predecir la difusividad de líquido del aire en agua a 20°C y 1 atm.

* R. C. Reid y T. K. Sherwood, *The Properties of Gases and Liquids* McGraw Hill Book Company, Nueva York, 1958, Capítulo 8.

25
ECUACIONES DIFERENCIALES DE LA TRANSFERENCIA DE MASA

En el capítulo 9 se obtuvieron las ecuaciones diferenciales generales de transferencia de momento utilizando el concepto de volumen diferencial de control. En el capítulo 16 se generaron en forma análoga las ecuaciones diferenciales generales de la transferencia de calor. Se usará de nuevo este método para obtener las ecuaciones diferenciales de la transferencia de masa. Se establecerá, también, la ecuación de continuidad de una especie dada haciendo un balance de la masa en un volumen diferencial de control.

Se obtendrán ecuaciones diferenciales adicionales al incluir en la ecuación de continuidad, las relaciones correspondientes al flujo de masa encontradas en el capítulo anterior.

25.1 LA ECUACION DIFERENCIAL DE TRANSFERENCIA DE MASA

Analicemos el volumen de control $\Delta x\ \Delta y\ \Delta z$, a través del cual está fluyendo una mezcla, incluyendo la componente A, tal como se aprecia en la figura 25.1. La expresión de volumen de control que corresponde a la conservación de la masa, es:

$$\iint_{c.s.} \rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dA + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{c.v.} \rho\,dV = 0 \qquad (4\text{-}1)$$

lo cual puede decirse con palabras, de la siguiente manera:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Rapidez neta de flujo de}\\ \text{masa que sale del volumen}\\ \text{de control}\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{l}\text{rapidez neta de acumulación}\\ \text{de masa dentro del volu-}\\ \text{men de control}\end{array}\right\} = 0$$

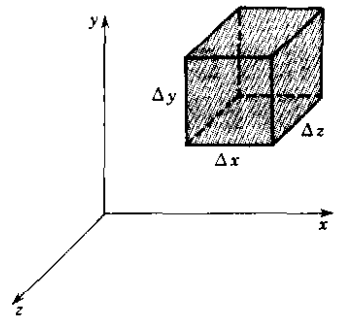


Figura 25.1 Un volumen de control diferencial

Si se estudia la conservación de una especie determinada, esta relación debe incluir un término que corresponda a la producción o desaparición de A por medio de una reacción química que ocurra dentro del volumen. La relación general para el equilibrio de la masa de la especie A, correspondiente al volumen de control bajo estudio, puede enunciarse así:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Rapidez neta de}\\ \text{flujo de masa}\\ \text{de } A\text{, desde el}\\ \text{volumen de control}\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{l}\text{rapidez neta de}\\ \text{acumulación}\\ \text{de } A \text{ dentro del}\\ \text{volumen de control}\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{l}\text{rapidez de pro-}\\ \text{ducción química}\\ \text{de } A \text{ dentro del}\\ \text{volumen de control}\end{array}\right\} \tag{25-1}$$

Se evaluarán los términos correspondientes a la especie A y se explicarán sus significados más adelante.

La rapidez neta de flujo de masa del volumen de control se puede calcular tomando en cuenta la masa transferida a través de la superficie de control. Por ejemplo, la masa de A transferida a través del área $\Delta s\ \Delta z$, en x, será $\rho_A v_{Ax} \Delta$ y $\Delta z\,|x$, o, en función del vector de flujo. $n_A = \rho_A v_A$, sería $n_{A,x} \Delta$ y $\Delta z\,|x$. La rapidez neta de flujo de masa de la especie A, será:

$$\text{en la dirección de } x\text{: } n_{A,x}\,\Delta y\,\Delta z|_{x+\Delta x} - n_{A,x}\,\Delta y\,\Delta z|_x$$

$$\text{en la dirección de } y\text{: } n_{A,y}\,\Delta x\,\Delta z|_{y+\Delta y} - n_{A,y}\,\Delta x\,\Delta z|_y$$

y

$$\text{en la dirección de } z\text{: } n_{A,z}\,\Delta x\,\Delta y|_{z+\Delta z} - n_{A,z}\,\Delta x\,\Delta y|_z$$

La rapidez de acumulación de A en el volumen de control es:

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t}\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$$

Si A se produce dentro del volumen de control por medio de una reacción química a una rapidez r_A, donde r_A tiene las unidades: (masa producida de A)/(volumen)(tiempo), la rapidez de producción de A es:

$$r_A \, \Delta x \, \Delta y \, \Delta z$$

Este término, correspondiente a la producción, es análogo al término que corresponde a la generación de energía, que aparece en la ecuación diferencial de la transferencia de energía, tal como se estudió en el capítulo 16.

Si se sustituye cada uno de los términos de la ecuación (25-1), se obtiene:

$$\begin{aligned} & n_{A,x} \, \Delta y \, \Delta z|_{x+\Delta x} - n_{A,x} \, \Delta y \, \Delta z|_x + n_{A,y} \, \Delta x \, \Delta z|_{y+\Delta y} \\ & \quad - n_{A,y} \, \Delta x \, \Delta z|_y + n_{A,z} \, \Delta x \, \Delta y|_{z+\Delta z} - n_{A,z} \, \Delta x \, \Delta y|_z \\ & \quad + \frac{\partial \rho_A}{\partial t} \Delta x \, \Delta y \, \Delta z - r_A \, \Delta x \, \Delta y \, \Delta z = 0 \end{aligned} \tag{25.2}$$

Al dividir la ecuación entre el volumen, $\Delta x \, \Delta y \, \Delta z$ y cancelar términos, se tendrá:

$$\frac{n_{A,x}|_{x+\Delta x} - n_{A,x}|_x}{\Delta x} + \frac{n_{A,y}|_{y+\Delta y} - n_{A,y}|_y}{\Delta y} + \frac{n_{A,z}|_{z+\Delta z} - n_{A,z}|_z}{\Delta z} + \frac{\partial \rho_A}{\partial t} - r_A = 0 \tag{25-3}$$

Si se evalúa esta expresión en el límite, cuando Δx, Δy y Δz tienden a cero, se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} n_{A,x} + \frac{\partial}{\partial y} n_{A,y} + \frac{\partial}{\partial z} n_{A,z} + \frac{\partial \rho_A}{\partial t} - r_A = 0 \tag{25-4}$$

La ecuación (25-4) es la *ecuación de continuidad de la componente A*. Como $n_{A,x}$, $n_{A,y}$, y $n_{A,z}$ son las componentes rectangulares del vector de flujo de masa $\mathbf{n}_A$, la ecuación (25-4) se puede escribir de la siguiente forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{n}_A + \frac{\partial \rho_A}{\partial t} - r_A = 0 \tag{25-5}$$

Se puede obtener una ecuación semejante de continuidad para una segunda especie, B, en la misma forma. Las ecuaciones diferenciales son:

$$\frac{\partial}{\partial x} n_{B,x} + \frac{\partial}{\partial y} n_{B,y} + \frac{\partial}{\partial z} n_{B,z} + \frac{\partial \rho_B}{\partial t} - r_B = 0 \tag{25-6}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{n}_B + \frac{\partial \rho_B}{\partial t} - r_B = 0 \tag{25-7}$$

donde r_B es la rapidez con la que se producirá B dentro del volumen de control por medio de una reacción química. Sumando las ecuaciones (25-5) y (25-7), se obtiene:

$$\nabla \cdot (\mathbf{n}_A + \mathbf{n}_B) + \frac{\partial(\rho_A + \rho_B)}{\partial t} - (r_A + r_B) = 0 \tag{25-8}$$

Para una mezcla binaria de A y B, se tiene

$$\mathbf{n}_A + \mathbf{n}_B = \rho_A \mathbf{v}_A + \rho_B \mathbf{v}_B = \rho \mathbf{v}$$

$$\rho_A + \rho_B = \rho$$

y

$$r_A = -r_B$$

debido a la ley de la conservación de la masa y sustituyendo estas relaciones en la ecuación (25-8), se obtiene:

$$\nabla \cdot \rho \mathbf{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{25-9}$$

que es la ecuación de continuidad correspondiente a la mezcla. La ecuación (25-9) es idéntica a la ecuación de continuidad (9-2), correspondiente a un fluido homogéneo.

La ecuación de continuidad de la mezcla y de una especie dada, se pueden escribir en función de la derivada sustancial. La ecuación de continuidad de la mezcla se puede reordenar y escribir de la siguiente manera, tal como se demostró en el capítulo 9:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{9-5}$$

A través de pasos matemáticos semejantes se puede obtener la ecuación de continuidad de la especie A en función de la derivada sustancial. La ecuación es:

$$\frac{\rho D\omega_A}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{j}_A - r_A = 0 \tag{25-10}$$

El mismo método se puede emplear en función de las unidades molares. Si R_A representa la rapidez de producción molar de B por unidad de volumen, las ecuaciones molares equivalentes, son:

Componente A:

$$\nabla \cdot \mathbf{N}_A + \frac{\partial c_A}{\partial t} - R_A = 0 \tag{25-11}$$

Componente B:

$$\nabla \cdot \mathbf{N}_B + \frac{\partial c_B}{\partial t} - R_B = 0 \tag{25-12}$$

Mezcla:

$$\nabla \cdot (\mathbf{N}_A + \mathbf{N}_B) + \frac{\partial (c_A + c_B)}{\partial t} - (R_A + R_B) = 0 \tag{25-13}$$

Para la mezcla binaria de A y B se tienen las relaciones:

$$\mathbf{N}_A + \mathbf{N}_B = c_A \mathbf{v}_A + c_B \mathbf{v}_B = c\mathbf{V}$$

y

$$c_A + c_B = c$$

Sin embargo sólo cuando la estequiometría de la reacción es:

$$A \rightleftharpoons B$$

lo cual establece que se produce una molécula de B por cada mol de A que desaparece y se puede decir que $R_A = -R_B$. En general, la ecuación de continuidad de la mezcla, en unidades molares es:

$$\nabla \cdot c\mathbf{V} + \frac{\partial c}{\partial t} - (R_A + R_B) = 0 \tag{25-14}$$

25.2 FORMAS ESPECIALES DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE TRANSFERENCIA DE MASA

Las formas especiales de la ecuación de continuidad válidas en las situaciones comunes, son las que aparecen a continuación. Para poder usar las ecuaciones en la evaluación de los perfiles de concentración, se reemplazan los flujos, $\mathbf{n}_A$ y $\mathbf{N}_A$ por las ecuaciones apropiadas obtenidas en el capítulo 24. Estas expresiones son:

$$\mathbf{N}_A = -cD_{AB}\nabla y_A + y_A(\mathbf{N}_A + \mathbf{N}_B) \tag{24-21}$$

o su equivalente

$$\mathbf{N}_A = -cD_{AB}\nabla y_A + c_A\mathbf{V}$$

y

$$\mathbf{n}_A = -\rho D_{AB}\nabla \omega_A + \omega_A(\mathbf{n}_A + \mathbf{n}_B) \tag{24-22}$$

o su equivalente

$$\mathbf{n}_A = -\rho D_{AB}\nabla\omega_A + \rho_A \mathbf{v}$$

Al sustituir la ecuación (24-22) en la (25-5) se obtiene:

$$-\nabla \cdot \rho D_{AB}\nabla\omega_A + \nabla \cdot \rho_A \mathbf{v} + \frac{\partial \rho_A}{\partial t} - r_A = 0 \tag{25-15}$$

y al sustituir la ecuación (24-21) en la (25-11) se obtiene:

$$-\nabla \cdot cD_{AB}\nabla y_A + \nabla \cdot c_A \mathbf{V} + \frac{\partial c_A}{\partial t} - R_A = 0 \tag{25-16}$$

Cualquiera de las dos ecuaciones: (25-15) o (25-16) se pueden usar en la descripción de perfiles de concentración dentro de un sistema de difusión. Ambas ecuaciones son completamente generales, sin embargo, son relativamente complejas. Estas ecuaciones se pueden simplificar haciendo suposiciones restrictivas. Las formas importantes de la ecuación de continuidad, con las suposiciones adecuadas, incluyen:

i) Si la densidad, ρ y el coeficiente de difusión, D_{AB}, se puede suponer constante, la ecuación (25-15) se transforma en:

$$-D_{AB}\nabla^2\rho_A + \rho_A \cancelto{0}{\nabla \cdot \mathbf{v}} + \mathbf{v} \cdot \nabla\rho_A + \frac{\partial \rho_A}{\partial t} - r_A = 0$$

Si se divide cada uno de los términos entre el peso molecular de A y se reordena la expresión, se obtiene:

$$\mathbf{v} \cdot \nabla c_A + \frac{\partial c_A}{\partial t} = D_{AB}\nabla^2 c_A + R_A \tag{25-17}$$

ii) Si no hay término de producción, $R_A = 0$ y si los coeficientes de densidad y difusión se suponen constantes, la ecuación (25-17) se reduce a:

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c_A = D_{AB}\nabla^2 c_A \tag{25-18}$$

Como $(\partial c_A/\partial t) + \mathbf{v} \cdot \nabla c_A$ es la derivada sustancial de c_A, cuando se reescribe el lado izquierdo de la ecuación (25-18), se obtiene:

$$\frac{Dc_A}{Dt} = D_{AB}\nabla^2 c_A \tag{25-19}$$

que es una ecuación análoga a la (16-14) de transferencia de calor,

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{k}{\rho c_P} \nabla^2 T \tag{16-14}$$

ó

$$\frac{DT}{Dt} = \alpha \nabla^2 T$$

donde α es la difusividad térmica. La semejanza entre estas dos ecuaciones sirve de base para las analogías señaladas entre las transferencias de calor y de masa.

iii) En una situación en la cual no exista movimiento del fluido, $\mathbf{v} = 0$, ni término de producción, $R_A = 0$, ni variación alguna en la difusividad o en la densidad, la ecuación (25-18) se reduce a:

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = D_{AB} \nabla^2 c_A \tag{25-20}$$

La ecuación (25-20) se denomina segunda *"ley" de Fick de la difusión*. La suposición de que no hay movimiento del fluido restringe su aplicabilidad a la difusión en sólidos o líquidos estacionarios y a sistemas binarios de gases o líquidos, donde N_A es igual en magnitud pero actúa en dirección opuesta a N_B; esto es, en el caso de la contradifusión equimolar. La ecuación (25-20) es análoga a la segunda "ley" de Fourier de la conducción de calor:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T \tag{16-18}$$

iv) Las ecuaciones (25-17), (25-18) y (25-20) se pueden simplificar aún más cuando el proceso que se va a definir es un proceso en estado permanente; esto es: $\partial c_A / \partial t = 0$. La ecuación correspondiente a una densidad constante y una difusión también constante, es:

$$\mathbf{v} \cdot \nabla c_A = D_{AB} \nabla^2 c_A + R_A \tag{25-21}$$

Cuando la densidad es constante, lo mismo que la difusividad y no hay producción química, $R_A = 0$, se obtiene:

$$\mathbf{v} \cdot \nabla c_A = D_{AB} \nabla^2 c_A \tag{25-22}$$

Si además, $v = 0$, la ecuación se reduce a

$$\nabla^2 c_A = 0 \tag{25-23}$$

La ecuación (25-23) es la *ecuación de Laplace* en función de la concentración molar.

Todas las ecuaciones, desde la (25-15) hasta la (25-23) están escritas en forma vectorial, por lo cual, todas son válidas en cualquier sistema ortogonal de coordenadas. La transformación de la ecuación al sistema deseado de coordenadas se realiza escribiendo el operador Laplaciano, ∇^2, en la forma adecuada. La segunda "ley" de Fick de la difusión, en coordenadas rectangulares es:

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = D_{AB}\left[\frac{\partial^2 c_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c_A}{\partial z^2}\right] \tag{25-24}$$

y en coordenadas cilíndricas

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = D_{AB}\left[\frac{\partial^2 c_A}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial c_A}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 c_A}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 c_A}{\partial z^2}\right] \tag{25-25}$$

y en coordenadas esféricas es:

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = D_{AB}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial c_A}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial c_A}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial^2 c_A}{\partial \phi^2}\right] \tag{25-26}$$

La ecuación diferencial general de transferencia de masa de la componente A, o la ecuación de continuidad de A, en coordenadas rectangulares, es:

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + \left[\frac{\partial N_{A,x}}{\partial x} + \frac{\partial N_{A,y}}{\partial y} + \frac{\partial N_{A,z}}{\partial z}\right] = R_A \tag{25-27}$$

en coordenadas cilíndricas es:

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rN_{A,r}) + \frac{1}{r}\frac{\partial N_{A,\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial N_{A,z}}{\partial z}\right] = R_A \tag{25-28}$$

y en coordenadas esféricas

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + \left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 N_{A,r}) + \frac{1}{\text{r sen }\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(N_{A,\theta}\sin\theta) + \frac{1}{\text{r sen }\theta}\frac{\partial N_{A,\phi}}{\partial \phi}\right] = R_A \tag{25-29}$$

25.3 CONDICIONES DE FRONTERA ENCONTRADAS USUALMENTE

Se puede describir un proceso de transferencia de masa resolviendo una de las ecuaciones diferenciales de transferencia de masa, ya sea usando las condiciones iniciales de frontera, o ambas, que resulten convenientes para la determinación de las constantes de integración. Las condiciones iniciales y de frontera utilizadas en el caso de la transferencia de masa son muy similares a

las usadas en la sección 16.3 para la transferencia de energía. Tal vez sea de utilidad al estudiante repasar, en esa sección, lo referente a condiciones iniciales y de frontera.

La condición inicial en los procesos de transferencia de masa es la concentración de la especie en difusión al principio del intervalo de tiempo bajo estudio, expresada ya sea en unidades molares o en unidades de concentración de masa. La concentración puede ser, sencillamente, una constante:

$$\text{a } t=0, \qquad c_A = c_{A_0} \text{ en unidades molares}$$

$$\text{a } t=0, \qquad \rho_A = \rho_{A_0} \text{ en unidades de masa}$$

o puede ser una expresión más complicada, si la distribución de concentraciones es una función de las variables al iniciar la medición del tiempo.

Las condiciones de frontera que generalmente se encuentran, son las siguientes:

1. Se puede especificar la concentración de una superficie. Esta concentración puede estar en función de la concentración molar, $c_A = c_{A_1}$ de fracciones molares, $y_A = y_{A_1}$, en gases o $x_A = x_{A_1}$, en líquidos y sólidos; de concentración de masa, $\rho_A = \rho_{A_1}$ o de fracción de masa, $w_A = w_{A_1}$. Cuando el sistema es un gas, la concentración se relaciona con la presión parcial por medio de la ley de Dalton; asimismo, la concentración puede estar en función de la presión parcial, $\rho_A = \rho_{A_1} = y_{A_1} P$. En el caso específico de la difusión de un líquido a una fase gaseosa, la condición de frontera en la superficie del líquido está definida para una solución líquida ideal, por medio de la ley de Raoult, de la siguiente manera $p_{A1} = x_A P_A$, donde x_A es la fracción molar en el líquido y P_A es la presión del vapor de la especie A evaluada a la temperatura del líquido.

2. El flujo de masa en la superficie puede estar especificado; por ejemplo: $j_A = j_{A_1}$ o $N_A = N_{A_1}$. Los casos de interés en ingeniería incluyen aquel en el que el flujo es cero debido a una superficie impermeable y aquellos en los que el flujo de masa está especificado en la forma siguiente:

$$j_{A,z \text{ surface}} = -\rho D_{AB} \frac{d\omega_A}{dz}\bigg|_{z=0}$$

3. La rapidez de una reacción química puede estar especificada, por ejemplo, si A desaparece en la frontera debido a una reacción química de primer orden, se puede escribir $N_{A_1} = k_1 c_{A_1}$, donde k_1 es la rapidez constante en una reacción de primer orden. Cuando la especie en difusión desaparece en la frontera debido a una reacción instantánea, la concentración de esa especie se supone, a menudo, igual a cero.

4. Cuando un fluido fluye en la fase para la cual está escrita la ecuación diferencial de masa, la especie puede perderse de la fase de interés por medio de la transferencia convectiva de masa. El flujo de masa en la frontera, se define, entonces, así:

$$N_{A_1} = k_c (c_{A_1} - c_{A_\infty}) \qquad (25\text{-}30)$$

donde $c_{A\infty}$ es la concentración de la corriente de fluido adyacente a la superficie y k_c es el coeficiente de transferencia de masa de convección que se definió en la sección 24.3.

Se aplicarán estas condiciones iniciales y de frontera en la solución de problemas de difusión molecular en los capítulos 26 y 27. En seguida se presentará un ejemplo de reducción en la ecuación diferencial general de transferencia de masa de manera que solamente queden los términos relevantes.

EJEMPLO 1

En una barra cilíndrica de combustible nuclear que contiene material fisionable, la rapidez de producción de neutrones es proporcional a la producción de los mismos. Use una de las ecuaciones diferenciales generales de transferencia de masa para escribir la ecuación diferencial que describa el proceso de transferencia de masa. Haga una lista de las condiciones obvias de frontera.

En el caso de la componente A, la ecuación (25-11) establece lo siguiente:

$$\nabla \cdot \mathbf{N}_A + \frac{\partial c_A}{\partial t} - R_A = 0$$

Como la rapidez de producción es proporcional a la concentración neutrónica $R_A = kc_A$. En los casos de difusión en sólidos, en los que la contribución del movimiento global es cero,

$$\mathbf{N}_A = -D_{AB}\nabla c_A$$

Al sustituir estas relaciones en la ecuación (25-11), se obtiene:

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = D_{AB}\left[\frac{\partial^2 c_A}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial c_A}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 c_A}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 c_A}{\partial z^2}\right] + kc_A$$

Si el cilindro es relativamente largo comparado con su radio $\partial^2 c_A/\partial z^2 = 0$ y si la concentración no varía con el ángulo, θ, $\partial^2 c_A/\partial \theta^2 = 0$; la ecuación se reduce a:

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = D_{AB}\left[\frac{\partial^2 c_A}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial c_A}{\partial r}\right] + kc_A$$

La única condición de frontera que resulta obvia es:

$$\left.\frac{\partial c_A}{\partial r}\right|_{r=0} = 0$$

la cual requiere que la concentración de la especie en difusión sea finita en el centro del cilindro.

25.4 CONCLUSION

La ecuación diferencial general de transferencia de masa se ha obtenido en este capítulo para la componente en difusión de una mezcla. Se presentaron las formas de la ecuación general, válidas en situaciones específicas. También se listaron las condiciones de frontera encontradas con mayor frecuencia en los procesos de transferencia de masa.

PROBLEMAS

25.1 Obtenga la ecuación (25-11) correspondiente a la componente A en función de las unidades molares, empezando con la expresión de volumen de control correspondiente a la conservación de la masa.

25.2 Obtenga la ecuación de continuidad de la componente A, utilizando un volumen de control cilíndrico e infinitamente grande y coordenadas cilíndricas.

25.3 Transforme la ecuación (25-27) de coordenadas rectangulares:

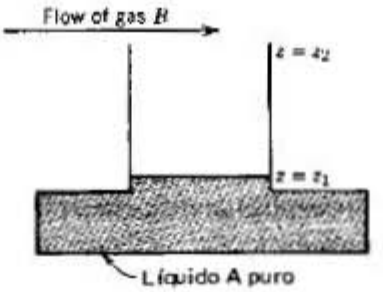
$$\frac{\partial c_A}{\partial t}+\frac{\partial N_{A,x}}{\partial x}+\frac{\partial N_{A,y}}{\partial y}+\frac{\partial N_{A,z}}{\partial z}=R_A$$

a una ecuación equivalente en coordenadas cilíndricas.

25.4 Una celda de difusión de Arnold es un aparato sencillo usado para medir coeficientes de difusión de gases. Un estanque de líquido se mantiene en el fondo de un tubo de diámetro pequeño. Un gas, insoluble en el líquido, fluye a través de la boda del tubo extrayendo los vapores de A que se difunden a través del espacio de gas que se encuentra sobre el estanque de líquido. En condiciones isotérmicas e isobáricas, la evaporación de A es un proceso en estado permanente.

Reduzca la ecuación diferencial general de transferencia de masa para escribir la ecuación diferencial específica que describa este proceso de transferencia de masa.

¿Cuál sería la forma de la ley de Fick, correspondiente a la especie A que se substituiría en la ecuación diferencial? Proporcione dos condiciones de frontera que podrían ser utilizadas para resolver la ecuación diferencial resultante.



25.5 Un reactor de carbón fluidizado se ha propuesto para una nueva planta de energía. Si se puede suponer que el carbón es de forma esférica, reduzca la ecuación diferencial general de transferencia de masa para obtener una ecuación diferencial específica que describa la difusión, en estado permanente, del oxígeno a la superficie de la partícula de carbón. Determine la relación correspondiente a la ley de Fick que describa el flujo de oxígeno del aire del medio ambiente, si:

a) solamente se produce monóxido de carbono, CO en la superficie de la partícula de carbón.

b) solamente se produce bióxido de carbono CO_2 en la superficie de la partícula de carbón.

Si la reacción es instantánea en la superficie de la partícula de carbón, mencione dos condiciones de frontera que puedan usarse en la solución de la ecuación diferencial.

25.6 Demuestre que la ecuación (25-5) se puede escribir en la forma:

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + (\nabla \cdot \rho_A \mathbf{v}) - D_{AB} \nabla^2 \rho_A = r_A$$

25.7 El monóxido de carbono se difunde a través de una capa de 0.1 in de aire a un vaso de ácido sulfúrico, donde es instantáneamente absorbido. La concentración de monóxido de carbono en el borde exterior de la capa de aire es de tres moles por ciento. Use la ecuación diferencial general de transferencia de masa para escribir la ecuación diferencial correspondiente a este proceso de transferencia unidimensional de masa en estado permanente. Haga una lista de las condiciones de frontera.

25.8 Se están secando en una corriente de aire unas esferitas de jabón de radio R. Suponga que la humedad del aire es constante y corresponde a una concentración superficial de agua en el jabón, de c_{A_1}. Si la concentración inicial uniforme de agua en el jabón es c_{A_0}, escriba: la ecuación diferencial y las condiciones de frontera necesarias para describir la concentración local de agua en función de radio, r, y del tiempo, t. Suponga que no existe resistencia a la transferencia de masa de la interfase al aire y que el coeficiente de difusión del agua dentro de las esferas de jabón es constante.

25.9 Se hace pasar el gas A sobre una superficie catalizadora plana sobre la cual la reacción de dimerización $2A \rightarrow B$. No hay reacción alguna en la fase fluida. El producto B que se origina, se difunde alejándose de la superficie e internándose en la corriente de fluido. Si la transferencia de masa de A a la superficie se representa por medio de una difusión a través de una capa gaseosa, reduzca la ecuación diferencial general de transferencia de masa para obtener una ecuación diferencial que describa la difusión de A.

25.10 El siguiente dibujo explica la difusión en la fase gaseosa en la vecindad de una superficie catalizadora.

La componente A, se difunde a través de una película estancada a la superficie catalizadora, en la cual se convierte instantáneamente en la especie B debido a la reacción:

$$A \rightarrow B$$

Cuando la especie B se difunde en la película estancada, comienza a descomponerse debido a una reacción de primer orden:

$$B \rightarrow A$$

La rapidez de formación de la componente A es igual a

$$R_A = k_1 y_B \quad \frac{\text{moles producidos por } A}{(\text{tiempo})\,(\text{volumen})}$$

donde y_B es la concentración de B expresada en forma de fracción molar.

Use la ecuación diferencial general de transferencia de masa para escribir la ecuación diferencial que describa este proceso de difusión. Haga una lista de las condiciones de frontera que podrían usarse en la solución de la ecuación diferencial.

25.11 Un trozo de carbón comprimido está formado con un contenido inicial de humedad de ρ_{A_0}. El carbón es de forma aproximadamente esférica con un radio de r_0. Se le coloca en un secador de aire que produce un contenido de humedad de $\rho_{A,s}$ en la superficie inferior. Reduzca la ecuación diferencial general de transferencia de masa para obtener una ecuación diferencial que describa el proceso de secado en el interior del carbón comprimido.

25.12 Un gran carro cisterna se vuelca y derrama un herbicida sobre un campo. El fluido permanece sobre la tierra durante 30 min, antes de evaporarse en la atmósfera. Reduezca la ecuación diferencial general de transferencia de masa para escribir lo que se pide a continuación:

a) la ecuación diferencial en estado permanente que describa la evaporación del herbicida al aire.

b) la ecuación diferencial que describa la difusión del herbicida al terreno.

25.13 Utilice la ecuación diferencial general de transferencia de masa para escribir la ecuación diferencial específica que describa el perfil de concentración de un microorganismo si a éste se le coloca inicialmente, en

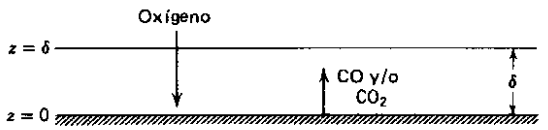
un fluido estancado o gel y, al difundirse, sufre una división celular que se comporta de acuerdo con la reacción de primer orden:

$$A \rightarrow 2A$$

Proporcione dos condiciones de frontera que puedan usarse para resolver la ecuación diferencial.

25.14 Se coloca una esfera de naftalina de 1 cm de diámetro en aire inmóvil a 60° F y 755 mm de Hg. de presión. A esta temperatura la presión del vapor de naftalina es de 0.0363 mm de Hg. Use la ecuación diferencial general de transferencia de masa para escribir la ecuación diferencial específica que describa la sublimación que emana de la esfera de naftalina. Mencione dos condiciones de frontera que puedan utilizarse en la solución de la ecuación diferencial.

25.15 En una cámara caliente de combustión se difunde el oxígeno a través del aire hasta llegar a una superficie de carbón donde reacciona para transformarse en CO y/o CO_2. Suponiendo que la superficie del carbón es plana, reduzca la ecuación diferencial general de transferencia de masa para escribir una ecuación diferencial específica que describe el siguiente proceso de transferencia de masa en estado permanente:



La concentración del oxígeno en $z = \delta$ es de 21 moles por ciento. Se puede suponer que la reacción que se opera en la superficie es instantánea. En la película de gas no ocurre ninguna reacción.

¿Cuál sería la forma de la relación correspondiente a la ley de Fick, si:

a) solamente se produce bióxido de carbono en la superficie del carbón?

b) solamente se produce monóxido de carbono sobre la superficie del carbón?

c) ocurre la reacción instantánea siguiente:

$$3\,C + 2\,O_2 \rightarrow 2\,CO + CO_2\ ?$$

25.16 Fluye un líquido sobre una hoja delgada y plana de sólido soluble. Sobre la región en la que está ocurriendo la difusión, la velocidad del líquido se puede suponer paralela a la placa y dada por la relación $v = ay$, donde y es la distancia a la placa y a es una constante. Demues-

tre que la ecuación que rige la transferencia de masa, con algunas suposiciones para simplificarla, es:

$$D\left(\frac{\partial^2 c_A}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 c_A}{\partial y^2}\right)=ay\frac{\partial c_A}{\partial x}$$

Haga una lista de las suposiciones hechas para simplificar la ecuación.

25.17 Los líquidos A y B están separados, inicialmente, por medio de un disco removible. Al quitar dicho disco, hay una interdifusión unidimensional de ambos líquidos. Escriba la ecuación diferencial de la distribución de concentraciones de la especie A y establezca las condiciones de frontera necesarias para resolver la ecuación diferencial.

26
DIFUSION MOLECULAR EN ESTADO PERMANENTE

En este capítulo se atenderá a la descripción de la transferencia de masa en estado permanente desde un punto de vista diferencial. Para esto deben establecerse, tanto la ecuación diferencial, como las condiciones de frontera que describen el fenómeno físico. El método será paralelo al utilizado anteriormente, en el capítulo 8, en el análisis de un elemento diferencial en flujo laminar y en el capítulo 17, en el análisis de la conducción de calor en estado permanente. Durante este estudio se usarán dos clases de presentación: (1) se generará la ecuación diferencial principal definiendo el volumen de control adecuado en cada situación específica y (2) se eliminarán los términos irrelevantes y se obtendrá la ecuación diferencial principal, usando las ecuaciones diferenciales generales de transferencia de masa. Al utilizar ambos métodos, el estudiante se familiarizará con los diferentes términos de la ecuación diferencial general de transferencia de masa.

Recuérdese la ecuación diferencial general de transferencia de masa:

$$\nabla \cdot \mathbf{N}_A + \frac{\partial c_A}{\partial t} - R_A = 0 \qquad (25\text{-}11)$$

Hay tres términos que pueden estar relacionados con la transferencia de masa: R_A, la rapidez de producción química de la especie A, en la fase a través de la cual se transfiere la masa; $\partial c_A/\partial t$, la acumulación de A en la fase y $\nabla \cdot \mathbf{N}_A$, la rapidez neta de flujo de masa de la especie A. Estos términos pueden o no estar relacionados con un proceso particular de transferencia de masa; por ejemplo, en la transferencia de masa en el estado permanente, la concentración en un punto dado no varía con el tiempo, de manera que $\partial c_A/\partial t$ es igual a cero. Con el objeto de ganar confianza en el manejo de los procesos de transferencia de masa, se estudiará, inicialmente, el caso más sencillo, la difusión en estado permanente, independiente de producción química. Después se obtendrán soluciones para operaciones de transferencia de masa, cada vez más complejas.

26.1 TRANSFERENCIA UNIDIMENSIONAL DE MASA, INDEPENDIENTE DE REACCIONES QUIMICAS

En esta sección se estudiará la transferencia molecular de masa en estado permanente a través de sistemas simples en los cuales la concentración y el flujo de masa son funciones de una sola coordenada espacial. Aunque se pueden usar los cuatro flujos: $\mathbf{N}_A$, $\mathbf{n}_A$, $\mathbf{J}_A$, y $\mathbf{j}_A$, para describir operaciones de transferencia de masa, sólo se utilizará en el estudio del flujo molar relativo a un conjunto de ejes fijos en el espacio $\mathbf{N}_A$. En un sistema binario, la componente del flujo en la dirección de z, está expresada por medio de la ecuación (24-20)

$$N_{A,z} = -cD_{AB}\frac{dy_A}{dz} + y_A(N_{A,z} + N_{B,z}) \qquad (24\text{-}20)$$

DIFUSION A TRAVES DE UNA PELICULA DE GAS ESTANCADO

El coeficiente de difusión o difusividad de la masa se puede medir experimentalmente, en una celda de Arnold, de difusión. Esta celda está esquemáticamente representada en la figura 26.1. El tubo delgado, parcialmente lleno de líquido puro A, se mantiene a temperatura y presión constantes. El gas B, que fluye a través del extremo abierto, posee una solubilidad despreciable en el líquido A y también es químicamente inerte a A. La componente A se vaporiza y difunde en la fase gaseosa, se puede medir físicamente la rapidez de vaporización y también se puede expresar matemáticamente en función del flujo de masa molar.

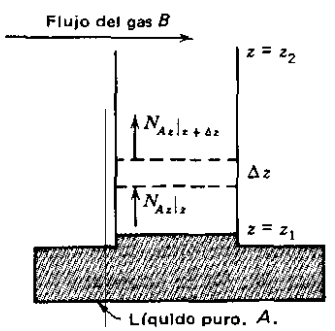


Figura 26.1 Celda de difusión de Arnold.

Analicemos el volumen de control $S\,\Delta z$, donde S es el área de sección transversal uniforme de tubo. Si se equilibra la masa en este volumen de control en una operación en estado permanente, se obtiene:

$$SN_{A,z}|_{z+\Delta z} - SN_{A,z}|_z = 0$$

Al dividir esta expresión entre el volumen $S\,\Delta z$, y evaluar en el límite, cuando Δz tiende a cero, se obtiene la ecuación diferencial siguiente:

$$\frac{d}{dz}N_{A,z}=0 \tag{26-1}$$

Esta relación establece un flujo molar constante de A en toda la fase gaseosa, de z_1 a z_2.

La ecuación (26-1) se podría haber obtenido a partir de la ecuación diferencial general de transferencia de masa,

$$\nabla\cdot\mathbf{N}_A+\frac{\partial c_A}{\partial t}-R_A=0 \tag{25-11}$$

ó

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}N_{A,x}+\frac{\partial}{\partial y}N_{A,y}+\frac{\partial}{\partial z}N_{A,z}\right]+\frac{\partial c_A}{\partial t}-R_A=0$$

En un proceso en estado permanente, $\partial c_A/\partial t=0$, y cuando no hay producción química de A, se tiene $R_A=0$. En el caso de la difusión que ocurre únicamente en la dirección de z es importante la componente, en la dirección de z, del vector de flujo de masa, $\mathbf{N}_A$. Así pues, en el caso presente, la ecuación (25-11) se reduce a la (26-1).

También puede generarse una ecuación diferencial semejante que corresponde a la componente B,

$$\frac{d}{dz}N_{B,z}=0 \tag{26-2}$$

y por lo tanto, el flujo molar de B también será constante en toda la trayectoria de difusión, desde z_1 hasta z_2. Tomando en cuenta únicamente el plano y la restricción de que el gas B no es soluble en el líquido A, se percata uno de que $N_{B,z}$ es cero en el plano z_1 por lo cual puede concluirse que $N_{B,z}$, el flujo neto de B, es cero a lo largo de la trayectoria de difusión; por esto, la componente B es un gas estacionario.

El flujo molar constante de A fue descrito en el capítulo 24 por la ecuación:

$$N_{A,z}=-cD_{AB}\frac{dy_A}{dz}+y_A(N_{A,z}+N_{B,z}) \tag{24-20}$$

esta ecuación, cuando $N_{B,z}=0$, se reduce a:

$$N_{A,z}=-\frac{cD_{AB}}{1-y_A}\frac{dy_A}{dz} \tag{26-3}$$

Esta ecuación se puede integrar, con las siguientes condiciones de frontera

$$\text{cuando } z=z_1 \qquad y_A=y_{A_1}$$

y

$$\text{cuando } z = z_2 \qquad y_A = y_{A_2}$$

Suponiendo que el coeficiente de difusión es independiente de la concentración y percatándose de que $N_{A,z}$ es constante a lo largo de la trayectoria de difusión, debido a lo especificado en la ecuación (26-1), se obtiene, por integración:

$$N_{A,z} \int_{z_1}^{z_2} dz = cD_{A,z} \int_{y_{A_1}}^{y_{A_2}} -\frac{dy_A}{1-y_A} \tag{26-4}$$

Si se despeja $N_{A,z}$, se obtiene:

$$N_{A,z} = \frac{cD_{AB}}{(z_2 - z_1)} \ln \frac{(1-y_{A_2})}{(1-y_{A_1})} \tag{26-5}$$

La concentración logarítmica media de la componente B se define de la siguiente manera:

$$y_{B,lm} = \frac{y_{B_2} - y_{B_1}}{\ln (y_{B_2}/y_{B_1})}$$

o, en el caso de una mezcla binaria, esta ecuación se puede expresar en función de la componente A, de la siguiente manera:

$$y_{B,lm} = \frac{(1-y_{A_2}) - (1-y_{A_1})}{\ln [(1-y_{A_2})/(1-y_{A_1})]} = \frac{y_{A_1} - y_{A_2}}{\ln [(1-y_{A_2})/(1-y_{A_1})]} \tag{26-6}$$

Si se inserta la ecuación (26-6) en la (26-5), se obtiene:

$$N_{A,z} = \frac{cD_{AB}}{z_2 - z_1} \frac{(y_{A_1} - y_{A_2})}{y_{B,lm}} \tag{26-7}$$

La ecuación (26-7) también debe escribirse en función de las presiones. En un gas ideal,

$$c = \frac{n}{V} = \frac{P}{RT}$$

y

$$y_A = \frac{p_A}{P}$$

la ecuación equivalente a la (26-7) es:

$$N_{A,z} = \frac{D_{AB}P}{RT(z_2 - z_1)} \frac{(p_{A_1} - p_{A_2})}{p_{B,lm}} \tag{26-8}$$

Las ecuaciones (26-7) y (26-8) se denominan, usualmente, *ecuaciones de difusión en estado permanente de un gas a través de un segundo gas estacionario.*

Muchas operaciones de transferencia incluyen la difusión de una componente gaseosa a través de otra que no está en difusión; la *absorción* y la *humidificación* son operaciones típicas definidas por estas dos ecuaciones.

La ecuación (26-8) también se ha usado en la descripción de coeficientes convectivos de transferencia de masa por medio del "*concepto de película*" o *teoría de la película*. En la figura 26.2 aparece el flujo de gas sobre una su-

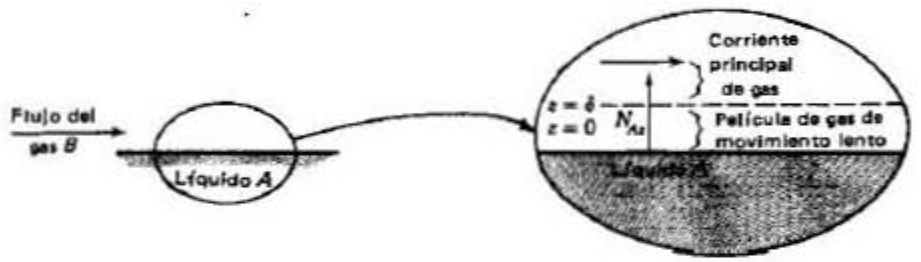


Figura 26.2 Modelo de película correspondiente a la transferencia de masa de la componente A hacia una corriente de gas en movimiento.

perficie líquida. El "concepto de película" se basa en un modelo en el cual se supone que toda la resistencia a la difusión de la superficie líquida a la corriente gaseosa principal, ocurre en una película estancada o laminar de grosor constante, δ. En otras palabras, en este modelo, δ es una longitud ficticia que representa el grosor de una capa de fluido que ofrece la misma resistencia a la difusión molecular que la resistencia encontrada en el proceso combinado de difusión molecular y difusión debida al mezclado que ocasiona el fluido en movimiento. Si este modelo es exacto, el coeficiente de transferencia convectiva de masa se puede expresar en función del coeficiente de difusión del gas. Si $z_2 - z_1$ es igual a δ, la ecuación (26-8) se transforma en:

$$N_{A,z} = \frac{D_{AB}P}{RTp_{B,lm}\delta}(p_{A_1} - p_{A_2})$$

y, a partir de la ecuación (25-30), se tiene:

$$N_{A,z} = k_c(c_{A_1} - c_{A_2})$$

y

$$N_{A,z} = \frac{k_c}{RT}(p_{A_1} - p_{A_2})$$

Una comparación revela que el coeficiente de la película está expresado en la forma:

$$k_c = \frac{D_{AB}P}{p_{B,lm}\delta} \tag{26-9}$$

cuando la componente en difusión se transporta a través de un gas que no se encuentra en difusión. Aunque este modelo es físicamente poco realista, el "concepto de película" ha demostrado un valor educativo ya que ha simplificado la explicación de un proceso complicado. El concepto de película, sin embargo, ha originado errores al sugerir que el coeficiente de transferencia de masa es siempre directamente proporcional a la difusividad de la masa. En este capítulo, así como en el capítulo 28 se estudiarán otros modelos del coeficiente convectivo. Cuando se haga esto, se verá que k_c está en función del coeficiente de difusión elevado a un exponente que varía de 0.5 a 1.0.

A menudo resulta necesario expresar el perfil de concentración con el fin de completar la descripción de la operación física por medio de la cual se está transfiriendo masa. Recuérdese, la ecuación (26-1),

$$\frac{d}{dz} N_{A,z} = 0 \tag{26-1}$$

y la (26-3)

$$N_{A,z} = -\frac{cD_{AB}}{1-y_A}\frac{dy_A}{dz} \tag{26-3}$$

de acuerdo con las cuales se puede obtener la ecuación diferencial que describe la variación en la concentración a lo largo de la trayectoria de difusión. Esta ecuación es:

$$\frac{d}{dz}\left(-\frac{cD_{AB}}{1-y_A}\frac{dy_A}{dz}\right) = 0 \tag{26-10}$$

Como c y D_{AB} son constantes en condiciones isotérmicas e isobáricas, la ecuación se reduce a

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-y_A}\frac{dy_A}{dz}\right) = 0 \tag{26-11}$$

Esta ecuación de segundo orden se puede integrar dos veces con respecto a z, obteniéndose

$$-\ln(1-y_A) = c_1 z + c_2 \tag{26-12}$$

Ambas constantes de integración pueden evaluarse usando las siguientes condiciones de frontera:

$$\text{cuando } z = z_1 \qquad y_A = y_{A_1}$$

y

$$\text{cuando } z = z_2 \qquad y_A = y_{A_2}$$

Al sustituir las constantes resultantes en la ecuación (26-12) se obtiene una expresión que corresponde al perfil de concentración de la componente A y es la siguiente:

$$\left(\frac{1-y_A}{1-y_{A_1}}\right)=\left(\frac{1-y_{A_2}}{1-y_{A_1}}\right)^{(z-z_1)/(z_2-z_1)} \tag{26-13}$$

o, ya que $y_A + y_B = 1$,

$$\left(\frac{y_B}{y_{B_1}}\right)=\left(\frac{y_{B_2}}{y_{B_1}}\right)^{(z-z_1)/(z_2-z_1)} \tag{26-14}$$

Las ecuaciones (26-13) y (26-14) describen perfiles logarítmicos de concentración de ambas especies. La concentración media de una de las especies a lo largo de la trayectoria de difusión se puede evaluar, a manera de ejemplo, para la especie B, por medio de la ecuación:

$$\bar{y}_B=\frac{\int_{z_1}^{z_2} y_B\,dz}{\int_{z_1}^{z_2} dz} \tag{26-15}$$

Cuando se sustituye la ecuación (26-14) en la (26-15), se obtiene:

$$\begin{aligned}\bar{y}_B &= y_{B_1}\frac{\int_{z_1}^{z_2}\left(\frac{y_{B_2}}{y_{B_1}}\right)^{(z-z_1)/(z_2-z_1)}dz}{z_2-z_1}\\ &=\frac{(y_{B_2}-y_{B_1})(z_2-z_1)}{\ln\,(y_{B_2}/y_{B_1})(z_2-z_1)}=\frac{y_{B_2}-y_{B_1}}{\ln\,(y_{B_2}/y_{B_1})}\\ &= y_{B,lm}\end{aligned} \tag{26-6}$$

El siguiente problema ejemplifica la aplicación del análisis anterior a una situación de transferencia de masa.

EJEMPLO 1

A través de la apertura accidental de una válvula se ha derramado agua sobre el suelo de una planta industrial en un área remota, de difícil acceso. Se desea calcular el tiempo requerido para que el agua se evapore hacia la atmósfera circundante de aire en reposo. La capa de agua es de 0.04 in de grueso puede suponerse que permanece a una temperatura constante de 75° F. El aire también se encuentra a 75° F y a 1 atm de presión con una humedad absoluta de 0.002 lb de agua por cada libra de aire seco. Se supone que la evaporación tiene lugar por difusión molecular a través de una película gaseosa de 0.20 in de grueso. *Base* 1 ft^2 de área

$$\text{Volumen de agua evaporada} = (1\text{ ft}^2)\frac{0.04\text{ in.}}{12\text{ in/ft}^2} = 0.0033\text{ ft}^3$$

$$\text{Peso del agua evaporada} = (0.0033\ \text{ft}^3)\left(7.48\frac{\text{gal}}{\text{ft}^3}\right)\left(8.34\frac{\text{lb}_m}{\text{gal}}\right)$$

$$= 0.206\ \text{lb}_m$$

$$\text{Moles de agua evaporada} = \frac{0.206\ \text{lb}_m}{18\ \text{lb}_m/\text{lb mole}} = 0.0114\ \text{lb mole}$$

Los moles de agua evaporados por pie cuadrado, por unidad de tiempo se pueden expresar mediante la ecuación:

$$N_{A,z} = \frac{cD_{AB}}{(z_2 - z_1)}\frac{(y_{A_1} - y_{A_2})}{y_{B,lm}} \tag{26-7}$$

La concentración molar total en la fase gaseosa, c, se puede evaluar por medio de la ley de los gases ideales a la temperatura y presión establecidas:

$$PV = nRT$$

ó

$$c = \frac{n}{V} = \frac{P}{RT}$$

Para evaluar la constante universal de los gases, R, se utilizarán las condiciones estándar en las que 1 lb mol ocupa 359 ft^3 a 1 atmósfera de presión y 492° R,

$$R = \frac{PV}{nT} = \frac{(1\ \text{atm})(359\ \text{ft}^3)}{(1\ \text{lb mole})(492°\text{R})} = 0.73\frac{\text{atm ft}^3}{\text{lb mole °R}}$$

Si las condiciones son de 1 atm y 75° F o 535 R,

$$c = \frac{P}{RT} = \frac{1\ \text{atm}}{(0.73\ \text{atm ft}^3/\text{lb mole°R})(535°\text{R})} = 0.00256\frac{\text{lb mole}}{\text{ft}^3}$$

Del Apéndice J se obtienen los siguientes datos: el coeficiente de difusión del gas de vapor de agua en aire a 298 K y 1 atm es de 0.260 cm^2/seg. Este valor puede ajustarse a nuestra escala de temperatura de 75° F o 535 R, por medio de la ecuación (24-41)

$$D_{AB}|_{T_2} = D_{AB}|_{T_1}\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{3/2} \tag{24-41}$$

Como $T_1 = 298$ K o 537° R, se tiene:

$$D_{AB\ \text{at}\ 75°\text{F}} = 0.260\left(\frac{535}{537}\right)^{3/2} = 0.259\ \text{cm}^2/\text{s}$$

La ecuación (24-26) se utiliza para efectuar la conversión de unidades,

$$D_{AB} = \left(0.258\frac{\text{cm}^2}{\text{s}}\right)\left(3.87\frac{\text{ft}^2/\text{hr}}{\text{cm}^2/\text{s}}\right) = 1.00\ \text{ft}^2/\text{hr}$$

Los valores de la concentración se pueden evaluar a partir de una tabla de agua-aire-humedad. A 75° F la humedad saturada es de 0.0189 lb H_2O/lb aire seco o sea:

$$\left(0.0189\frac{\text{lb}_m\ \text{agua}}{\text{lb}_m\ \text{aire seco}}\right)\left(\frac{\text{lbmol. agua}}{18\ \text{lb}_m\ \text{agua}}\right)\left(\frac{29\ \text{lb}_m\ \text{aire}}{\text{lbmol. aire}}\right) = 0.0304\frac{\text{lbmol. agua}}{\text{lbmol. aire}}$$

y convertido a base molar fraccionaria,

$$y_{A_1} = \frac{0.0304}{1.0304} = 0.0295$$

La humedad de la corriente de aire es:

$$\left(0.002 \frac{\text{lb}_m \text{ agua}}{\text{lb}_m \text{ aire seco}}\right)\left(\frac{\text{lb mol. agua}}{18 \text{ lb}_m \text{ agua}}\right)\left(\frac{29 \text{ lb}_m \text{ aire}}{\text{lb mol. aire}}\right) = 0.00322 \frac{\text{lb mol. agua}}{\text{lb mol. aire}}$$

ó

$$y_{A_2} = \frac{0.00322}{1.0032} = 0.0032$$

de acuerdo con esto:

$$y_{A_1} - y_{A_2} = 0.0263$$

En un sistema binario,

$$y_{B_1} = 1 - y_{A_1} = 0.9705$$

y

$$y_{B_2} = 1 - y_{A_2} = 0.9968$$

De acuerdo con la ecuación (26-6)

$$y_{B,lm} = \frac{y_{B_2} - y_{B_1}}{\ln (y_{B_2}/y_{B_1})} = \frac{0.9968 - 0.9705}{\ln (0.9968/0.9705)} = 0.983$$

La trayectoria de difusión, $z_2 - z_1$ es igual a 0.20 in/(12 in/ft) = 0.0167 ft. Si se sustituyen estos valores en la ecuación (26-7), se obtiene:

$$N_{A,z} = \frac{(0.00256 \text{ lb mole/ft}^3)(1.00 \text{ ft}^2/\text{hr})}{0.0167 \text{ ft}} \left(\frac{0.0263}{0.983}\right)$$

$$= 0.00410 \text{ lb mole/ft}^2 \text{ hr}$$

Como se tienen 0.01151 lb mol que se van a evaporar por pie cuadrado el tiempo que se requiere para que se lleve a cabo la evaporación es:

$$t = \frac{0.0114 \text{ lb mole/ft}^2}{0.00410 \text{ lb mole/ft}^2 \text{ hr}} = 2.78 \text{ hr} \qquad (10\,010 \text{ s})$$

DIFUSION EN ESTADO PSEUDO PERMANENTE A TRAVES DE UNA PELICULA DE GAS ESTANCADO

En muchas operaciones de transferencia de masa una de las fronteras puede cambiar de lugar con el tiempo. Si la longitud de la trayectoria de difusión cambia un poco en un período grande de tiempo, se puede utilizar un modelo de difusión de estado pseudo permanente. Cuando existe esta condición, la ecuación (26-7) describe el flujo de masa en la película de gas estancado. Vuélvase a estudiar la figura 26.1, que tiene una superficie líquida en movimiento, tal como la figura 26.3. Ahí aparecen dos niveles superficiales, uno en el tiempo t_0 y el segundo en el tiempo t_1. Si la diferencia de niveles del

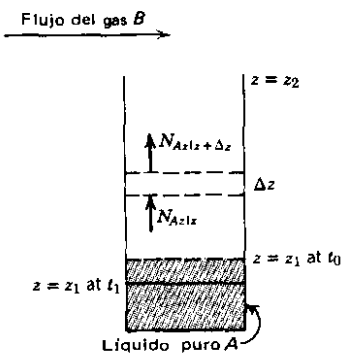


Figura 26.3 Celda de difusión de Arnold con una superficie líquida en movimiento.

líquido A en el intervalo de tiempo bajo estudio, representa sólo una pequeña fracción de la trayectoria total de difusión y $t_1 - t_0$ es un período de tiempo relativamente grande, el flujo molar en la fase gaseosa, en cualquier instante de ese período se puede evaluar por medio de la ecuación:

$$N_{A,z} = \frac{cD_{AB}(y_{A_1} - y_{A_2})}{z y_{B,lm}} \tag{26-7}$$

donde $z_2 - z_1$ es igual a z, que es la longitud de la trayectoria de difusión en el tiempo t.

El flujo molar $N_{A,z}$ se relaciona con la cantidad de A que abandona el líquido, por medio de la relación:

$$N_{A,z} = \frac{\rho_{A,L}}{M_A}\frac{dz}{dt} \tag{26-16}$$

en la cual, $\rho_{A,L}/M_A$ es la densidad molar de A en la fase líquida. En condiciones de estado pseudo permanente, se pueden combinar las ecuaciones (26-7) y (26-16), produciendo la siguiente:

$$\frac{\rho_{A,L}}{M_A}\frac{dz}{dt} = \frac{cD_{AB}(y_{A_1} - y_{A_2})}{z\, y_{B,lm}} \tag{26-17}$$

La ecuación (26-17) se puede integrar de $t = 0$ a $t = t$ y de $z = z_{t0}$ a $z = z_t$, de la siguiente manera:

$$\int_{t=0}^{t} dt = \frac{\rho_{A,L} y_{B,lm}/M_A}{cD_{AB}(y_{A_1} - y_{A_2})} \int_{z_{t_0}}^{z_t} z\, dz$$

de donde se obtiene

$$t = \frac{\rho_{A,L} y_{B,lm}/M_A}{cD_{AB}(y_{A_1} - y_{A_2})}\left(\frac{z_t^2 - z_{t_0}^2}{2}\right) \tag{26-18}$$

Si se reordena esta expresión se obtendrá la ecuación que se utiliza usualmente en la evaluación del coeficiente de difusión del gas a partir de los datos experimentales obtenidos mediante la celda de Arnold. Esta ecuación es:

$$D_{AB} = \frac{\rho_{A,l} y_{B,lm} / M_A \left(\frac{z_t^2 - z_b^2}{2} \right)}{c(y_{A_1} - y_{A_2})t} \tag{26-19}$$

En el ejemplo siguiente se evalúa un coeficiente de difusión a partir de datos experimentales.

EJEMPLO 2

E. M. Larson,* usando una celda de Arnold, midió la difusividad del cloroformo en aire a 25°C y una atmósfera de presión. La densidad del cloroformo líquido a 25°C es de 1.485 g/cm^3 y su presión de vapor a 25°C es de 200 mm de Hg. En el tiempo $t = 0$, la superficie del cloroformo líquido estaba a 7.40 cm de la parte superior del tubo y después de 10 horas la superficie del líquido había descendido a 0.44 cm. Si la concentración del cloroformo en la parte superior del tubo es cero, ¿cuál será el coeficiente de difusión del cloroformo en aire?

A 25°C, la presión de vapor del cloroformo es de 200 mm de Hg. De acuerdo con la ley de Dalton:

$$y_{A_1} = \frac{P_{A_1}}{P} = \frac{200 \text{ mm Hg}}{760 \text{ mm Hg}} = 0.263$$

$$y_{B_1} = 1 - 0.263 = 0.737$$

solamente está fluyendo B puro a través de la parte superior del tubo, por lo cual:

$$y_{B_2} = 1 \qquad y_{A_2} = 0$$

y

$$y_{A_1} - y_{A_2} = 0.263$$

De acuerdo con la ecuación (26-6),

$$y_{B,lm} = \frac{y_{B_2} - y_{B_1}}{\ln (y_{B_2}/y_{B_1})} = \frac{1.0 - 0.737}{\ln (1.0/0.737)} = 0.862$$

El peso molecular del cloroformo es de 119.39 g/mol. La densidad molar del cloroformo se calcula por medio de la siguiente expresión:

$$\rho_A / M_A = (1.485 \text{ g/cm}^3)(\text{mol}/119.39 \text{ g}) = 0.0124 \text{ mol/cm}^3$$

A la temperatura y presión estipuladas, la ley de los gases ideales

$$PV = nRT$$

se puede usar para expresar la concentración en la forma:

$$c = \frac{n}{V} = \frac{P}{RT}$$

*E. M. Larson, Diffusion Coefficients of Chlorinated Hydrocarbons in Air. Tesis de Ingeniería Química, Oregon State University, 1964.

Para evaluar la constante universal de los gases, R, se utilizarán las siguientes condiciones estándar, en las que 1 g mol ocupa 22,400 cm^3 a 1 atm de presión y 273 K,

$$R = \frac{PV}{nT} = \frac{(1\text{ atm})(22\,400\text{ cm}^3)}{(1\text{ mol})(273\text{ K})} = 82.06 \frac{\text{atm cm}^3}{\text{mol K}}$$

En las condiciones de la celda, la concentración molar en la fase gaseosa es:

$$c = \frac{P}{RT} = \frac{1\text{ atm}}{(82.06\text{ atm cm}^3/\text{mol K})(298\text{ K})} = 4.09 \times 10^{-5}\text{ mol/cm}^3$$

Los dos niveles de líquido son:

$$z_0 = 7.40\text{ cm}$$

y

$$z_t = 7.84\text{ cm}$$

y el tiempo es:

$$(10)(3600) = 36\,000\text{ seg.}$$

Al sustituir estos valores en las ecuaciones (26-19), se obtiene:

$$D_{AB} = \left(\frac{(0.01242\text{ mol/cm}^3)(0.855)}{(4.09 \times 10^{-5}\text{ mol/cm}^3)(0.263)}\right)\left(\frac{(7.84\text{ cm})^2 - (7.40\text{ cm})^2}{(2)(36\,000\text{ s})}\right)$$
$$= 0.093\text{ cm}^2/\text{s} \qquad (9.3 \times 10^{-6}\text{ m}^2/\text{s})$$

CONTRADIFUSION EQUIMOLAR

Una situación física que se encuentra en la *destilación* de dos constituyentes cuyos calores molares latentes de vaporización son esencialmente iguales, establece que el flujo de una componente gaseosa es igual pero de sentido opuesto a la otra componente gaseosa, o sea: $N_{A,z} = -N_{B,z}$. La ecuación (25-11)

$$\nabla \cdot \mathbf{N}_A + \frac{\partial c_A}{\partial t} - R_A = 0 \tag{25-11}$$

se puede reducir, en el caso de la transferencia de masa en estado permanente sin reacción química, a:

$$\nabla \cdot N_A = 0$$

En el caso de la transferencia en la dirección de z, esta ecuación se reduce a:

$$\frac{d}{dz} N_{A,z} = 0$$

Esta relación establece que $N_{A,z}$ es constante a lo largo de la trayectoria de transferencia. El flujo molar, $N_{A,z}$, de un sistema binario a temperatura y presión constantes, está descrito por la ecuación:

$$N_{A,z} = -D_{AB} \frac{dc_A}{dz} + y_A (N_{A,z} + N_{B,z}) \tag{24-20}$$

Al sustituir la restricción: $N_{A,z} = -N_{B,z}$, en la ecuación anterior, se obtiene una ecuación que describe el flujo de A cuando existen condiciones de *contradifusión equimolar*:

$$N_{A,z} = -D_{AB}\frac{dc_A}{dz} \tag{26-20}$$

La ecuación (26-20) se puede integrar usando las siguientes condiciones de frontera

$$\text{en } z = z_1 \qquad c_A = c_{A_1}$$

y

$$\text{en } z = z_2 \qquad c_A = c_{A_2}$$

dando

$$N_{A,z}\int_{z_1}^{z_2} dz = -D_{AB}\int_{c_{A_1}}^{c_{A_2}} dc_A$$

a partir de lo cual se obtiene:

$$N_{A,z} = \frac{D_{AB}}{(z_2 - z_1)}(c_{A_1} - c_{A_2}) \tag{26-21}$$

Cuando se cumple la ley de los gases ideales, la concentración molar de A se relaciona con la presión parcial de A por medio de

$$c_A = \frac{n_A}{V} = \frac{p_A}{RT}$$

Al sustituir esta expresión de c_A, en la ecuación (26-21), se obtiene:

$$N_{A,z} = \frac{D_{AB}}{RT(z_2 - z_1)}(p_{A_1} - p_{A_2}) \tag{26-22}$$

Las ecuaciones (26-21) y (26-22) se denominan, frecuentemente, *ecuaciones de contradifusión equimolar en estado permanente*.

El perfil de concentración correspondiente a los procesos de contradifusión equimolar se pueden obtener sustituyendo la ecuación (26-20) en la ecuación diferencial que describe la transferencia en la dirección de z:

$$\frac{d}{dz}N_{A,z} = 0$$

ó

$$\frac{d^2c_A}{dz^2} = 0$$

Esta ecuación de segundo orden se puede integrar dos veces con respecto a z, dando:

$$c_A = C_1 z + C_2$$

Ambas constantes de integración se evalúan utilizando las ecuaciones de frontera:

$$\text{at } z = z_1 \qquad c_A = c_{A_1}$$

$$\text{at } z = z_2 \qquad c_A = c_{A_2}$$

para obtener el perfil de concentración lineal:

$$\frac{c_A - c_{A_1}}{c_{A_1} - c_{A_2}} = \frac{z - z_1}{z_1 - z_2} \tag{26-23}$$

Es interesante hacer notar que cuando se estudia el "concepto de película" en la transferencia de masa con contradifusión equimolar, la definición del coeficiente de transferencia convectiva de masa es diferente del de la difusión en una película de gas estancado. En el caso de la contradifusión equimolar:

$$k^0 = \frac{D_{AB}}{\delta} \tag{26-24}$$

El superíndice del coeficiente de transferencia de masa se usa para significar que no existe transferencia neta de masa en la película debido a la contradifusión equimolar. Al comparar las ecuaciones (26-24) y (26-9) se percata uno de que ambas ecuaciones dan los mismos resultados solamente cuando la concentración de A es muy pequeña y $P_{B,lm}$ es esencialmente igual a P.

El siguiente ejemplo servirá para explicar la aplicación del análisis de contradifusión equimolar.

EJEMPLO 3

Una torre sencilla de destilación consiste en un tubo vertical muy grande alimentado desde abajo con un vapor binario de benceno y tolueno. Los vapores que abandonan la parte superior del tubo se condensan y parte del producto regresa para fluir en forma de película líquida descendente a lo largo de la pared interior del tubo. En un plano del tubo el vapor contiene 85.3 moles por ciento de benceno y la capa adyacente de líquido contiene 70 moles por ciento de benceno. La temperatura en este punto es de 86.8° C. La resistencia difusional a la transferencia de masa entre la interfase vapor-líquido y las condiciones globales de la corriente de vapor se supone equivalente a la resistencia difusional de una capa estancada de gas de 0.1 in de grueso. Como el tubo es grande, esta capa relativamente delgada aparece como película unidireccional, que no se ve afectada por la curvatura del tubo. Los calores molares latentes de vaporización del benceno y del tolueno son esencialmente iguales. Por lo tanto: $N_{\text{tolueno}_z} = -N_{\text{benceno}_z}$. Se desea calcular la rapidez de intercambio de benceno y tolueno entre vapor y líquido si la torre se opera a presión atmosférica.

La ecuación (26-22) es aplicable a la situación física existente:

$$N_{A,z} = \frac{D_{AB}}{RT(z_2 - z_1)}(p_{A_1} - p_{A_2}) \tag{26-22}$$

El coeficiente de difusión correspondiente al benceno en difusión en el tolueno se puede evaluar por medio de la ecuación de Hirschfelder. A 86.8°C(359.8K) y 1 atm ($1{,}013 \times 10^5$ Pa) de presión, el valor del coeficiente es:

$$D_{\text{benzeno-tolueno}} = 5.06 \times 10^{-6}\ \text{m}^2/\text{s}$$

La presión parcial del tolueno, inmediatamente sobre la superficie del líquido se puede evaluar por medio de la ley de Raoult: $p_{\text{tolueno}|z_1} = x_{\text{tolueno}|z_1} P_{\text{tolueno}}$: la presión del vapor de tolueno a 359.8K es de 4.914×10^4 Pa y la fracción molar del tolueno en el líquido es igual a $1 - 0.70$ ó 0.30. Por lo tanto se obtiene:

$$p_{\text{tolueno}|z_1} = (0.30)(4.914 \times 10^4\ \text{Pa}) = 1.474 \times 10^4\ \text{Pa}$$

Debido a la ley de Dalton la concentración en la corriente de vapor es:

$$\begin{aligned} p_{\text{tolueno}|z_2} &= y_{\text{tolueno}|z_2} P \\ &= (1 - y_{\text{benceno}|z_2} P \\ &= (0.147)(1.013 \times 10^5) = 1.489 \times 10^4\ \text{Pa} \end{aligned}$$

Entonces $p_{A_1} - p_{A_2} = (1.474 - 1.489) \times 10^4 = -1.50 \times 10^2$ Pa. La longitud de la trayectoria de difusión, $z_2 - z_1$ es de 0.1 ó 2.54×10^{-3} m. La constante universal de los gases en unidades SI se evaluó en el ejemplo 1, capítulo 24, resultando igual a 8.314 Pa · m^3/mol K.

La rapidez de transferencia del tolueno se puede calcular sustituyendo los valores anteriores en la ecuación (26-22):

$$N_{\text{tolueno}|z} = \frac{D_{\text{tolueno-benceno}}}{RT(z_2 - z_1)}(p_{\text{tolueno}|1} - p_{\text{tolueno}|2})$$

$$= \frac{(5.06 \times 10^{-6}\ \text{m}^2/\text{s})(-1.50 \times 10^2\ \text{Pa})}{(8.314\ \text{Pa} \cdot \text{m}^3/\text{mol} \cdot \text{K})(359.8\ \text{K})(2.54 \times 10^{-3}\ \text{m})}$$

$$= -9.99 \times 10^{-5}\ \text{mol/m}^2 \cdot \text{s} \qquad (-7.36 \times 10^{-5}\ \text{lb mole (hr)(ft}^2\text{)})$$

El signo negativo indica que el tolueno cambia de lugar, de z_2 a z_1, o sea, en función de la torre de destilación, de la corriente gaseosa a la interfase gas-líquido.

26.2 SISTEMAS UNIDIMENSIONALES ASOCIADOS CON LA REACCION QUIMICA

Muchas operaciones de difusión incluyen la difusión simultánea de una especie molecular y la desaparición o aparición de la especie a través de una reacción química, ya sea dentro o en la frontera de la fase bajo estudio. Hay una distinción entre los dos tipos de reacciones químicas: la reacción que se lleva a cabo de manera uniforme en toda una fase dada, se denomina: *reacción homogénea* y la reacción que tiene lugar en una región restringida dentro o en la frontera de la fase se llama *reacción heterogénea*.

La rapidez de aparición de la especie A debido a una reacción homogénea se encuentra expresada en la ecuación diferencial general de transferencia, por medio del término fuente, R_A.

$$\nabla \cdot \mathbf{N}_A + \frac{\partial c_A}{\partial t} - R_A = 0 \qquad (25\text{-}11)$$

La rapidez de aparición de A debido a una reacción heterogénea no aparece en la ecuación diferencial general ya que la reacción no tiene lugar dentro del volumen de control; en lugar de esto, entra en el análisis en forma de condición de frontera.

En esta sección se estudiarán dos casos sencillos que incluyen ambos tipos de reacción química. Si el lector desea estudiar el manejo de otros problemas más complicados, se le sugiere que consulte los dos excelentes tratados escritos por Crank* y Jost†.

DIFUSION SIMULTANEA Y REACCIONES QUIMICAS HETEROGENEAS DE PRIMER ORDEN: DIFUSION CON AREA VARIABLE

Muchos procesos industriales incluyen la difusión de un reactante en una interfase, en la que ocurre una reacción química. Como los pasos de la difusión y de la reacción se relacionan con el proceso global, la rapidez relativa de cada uno de los pasos, como miembros individuales de un equipo, es importante. Cuando la rapidez de reacción es relativamente grande comparada con la rapidez de difusión, el proceso se denomina *controlado por la difusión*. En cambio el proceso se llama *controlado por la reacción* cuando la rapidez de transferencia de masa está limitada por el paso de la reacción.

En muchas plantas de energía el aire fluidifica las partículas de carbón pulverizado en una cámara caliente de combustión en la cual el oxígeno del aire reacciona con el carbón para producir monóxido o bióxido de carbono. Este proceso, que se utiliza en la producción de energía por medio del calor de combustión, es un ejemplo del proceso de difusión simultánea y reacción heterogénea controlado por difusión.

Estúdiese ahora la difusión del oxígeno en la superficie de una partícula esférica de carbón, donde reacciona formando monóxido de carbono en la forma siguiente:

$$2C + O_2 \rightarrow 2CO$$

En condiciones de estado permanente, 2 moles de monóxido de carbono se volverán a difundir en la película gaseosa que rodea a la partícula de carbono por cada mol de oxígeno que se difunde en la superficie del carbono. La situación física es la que puede observarse en la figura 26.4.

*J. Crank, *The Mathematics of Diffusion*, Oxford Univ. Press, Londres, 1957.
†W. Jost, *Diffusion in Solids, Liquids and Gases*, Academic Press, Inc., Nueva York, 1952.

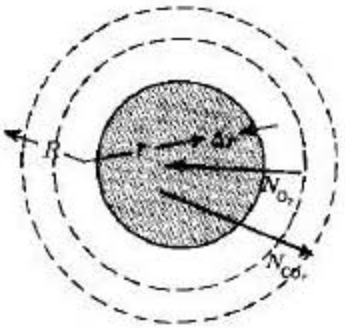


Figura 26.4 Difusión a través de una película esférica.

Como modelo inicial, supongamos que no ocurre ninguna reacción entre el oxígeno y el monóxido de carbono en la película gaseosa. Si se equilibra el oxígeno sobre el elemento esférico, se obtiene:

$$N_{O_2,r}4\pi r^2|_r - N_{O_2,r}4\pi r^2|_{r+\Delta r} = 0 \tag{26-25}$$

Si se divide esta expresión entre el volumen $4\pi r^2 \Delta r$, y se evalúa en el límite, cuando Δr tiende a cero, se obtiene la ecuación diferencial:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2 N_{O_2,r}) = 0 \tag{26-26}$$

Esta ecuación especifica que $r^2 N_{O_2,r}$ es constante en la trayectoria de difusión:

$$r^2 N_{O_2,r}|_{r_1} = r^2 N_{O_2,r}|_{r_2} = r^2 N_{O_2,r}|_r$$

Si se comparan las ecuaciones (26-26) y (26-1), se observará que la relación que permanece constante en la trayectoria de difusión es completamente diferente en la difusión en un área variable que en la difusión en un área constante. El equilibrio de la masa debe hacerse para cada una de las figuras geométricas, dado que cada una de ellas tiene su propia ecuación diferencial característica.

También se puede estudiar la ecuación diferencial general de transferencia de masa en coordenadas esféricas, ecuación (25-29) y eliminar los términos irrelevantes para obtener la misma ecuación. Esta ecuación diferencial es la siguiente:

$$\frac{\partial c_{O_2}}{\partial t} + \left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 N_{O_2,r}) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(N_{O_2,\theta}\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial N_{O_2,\phi}}{\partial\phi}\right] = R_{O_2} \tag{25-29}$$

En condiciones estables, $\partial c_{O_2}/\partial t = 0$, y cuando no existe una producción neta de O_2 en la reacción química *dentro* del volumen de control, $R_{O_2} = 0$. El flujo de masa ocurre solamente en la dirección de r; por lo tanto, $N_{O_2,\theta}$ y $N_{O_2,\phi}$

son cero. En estas condiciones, la ecuación (25-29) se reduce a la ecuación diferencial establecida anteriormente

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2 N_{O_2,r}) = 0$$

ó

$$\frac{d}{dr}(r^2 N_{O_2,r}) = 0 \qquad (26\text{-}26)$$

En el caso del monóxido de carbono, un equilibrio similar, en el mismo elemento esférico, produce el resultado siguiente:

$$\frac{d}{dr}(r^2 N_{CO,r}) = 0 \qquad (26\text{-}27)$$

La estequiometría de la reacción química establece que se producirán dos moléculas de monóxido de carbono las cuales volverán a difundirse en la película gaseosa por cada mol de oxígeno que se difunda en la superficie, por lo tanto, el flujo del monóxido de carbonose relaciona con el flujo de oxígeno, mediante:

$$-N_{CO,r} = 2N_{O_2,r} \qquad (26\text{-}28)$$

El signo negativo se necesita para indicar la difusión en dirección opuesta. En el sistema binario, se evalúa el flujo de oxígeno en la dirección de, r, usando la ecuación de Fick:

$$N_{O_2,r} = -cD_{O_2-air}\frac{dy_{O_2}}{dr} + y_{O_2}(N_{O_2,r} + N_{CO,r} + N_{N_2,r})$$

o en esta ecuación específica, como N_2 no se difunde:

$$N_{O_2,r} = -cD_{O_2-air}\frac{dy_{O_2}}{dr} + y_{O_2}(N_{O_2,r} - 2N_{O_2,r})$$

Esta ecuación se simplifica, dando origen a:

$$N_{O_2,r} = \frac{-cD_{O_2-air}}{1 + y_{O_2}}\frac{dy_{O_2}}{dr} \qquad (26\text{-}29)$$

Cuando se sustituye la ecuación (26-29) en la (26-26), el flujo de masa y la concentración se pueden calcular haciendo uso de las condiciones de frontera:

$$\text{en } r = R \qquad y_{O_2} = y_{O_2}|_R$$

y

$$\text{en } r = \infty \qquad y_{O_2} = 0.21$$

La transferencia total de masa se calcula fácilmente definiendo la rapidez de transferencia de masa, W_{O_2}, en función del flujo en un radio determinado:

$$W_{O_2} = 4\pi r^2 N_{O_2,r}|_R \tag{26-30}$$

En la ecuación (26-26) se observa que W_{O_2} es constante a lo largo de la trayectoria de difusión. Si se sustituye la ecuación (26-29) en la (26-30), se obtiene:

$$W_{O_2} = 4\pi r^2 N_{O_2,r}|_R = 4\pi r^2 N_{O_2,r}|_r$$

$$W_{O_2} = -4\pi r^2 c \frac{D_{O_2\text{-air}}}{1+y_{O_2}} \frac{dy_{O_2}}{dr}$$

ó

$$W_{O_2} \frac{dr}{r^2} = -4\pi c D_{O_2\text{-air}} \frac{dy_{O_2}}{1+y_{O_2}} \tag{26-31}$$

Esta ecuación se puede integrar sobre la trayectoria definida de difusión, y se obtiene:

$$W_{O_2} = +4\pi c D_{O_2\text{-air}} R \ln\left(\frac{1+y_{O_2}|_R}{1+0.21}\right) \tag{26-32}$$

Como se conoce la rapidez con la que se transfiere el oxígeno a la superficie del carbón, puede determinarse la rapidez de combustión del carbón y, a su vez, la rapidez con la que la reacción de combustión libera energía.

Se pueden proponer otros modelos para este proceso. Por ejemplo, si se produjera bióxido de carbono en la superficie, debido a la reacción

$$C + O_2 \rightarrow CO_2$$

el flujo de bióxido de carbono sería igual pero en dirección opuesta al flujo de oxígeno, $N_{O_2,r} = -N_{CO_2,r}$. Al sustituirse esta relación en la ecuación de Fick:

$$N_{O_2,r} = -cD_{O_2\text{-aire}} \frac{dy_{O_2}}{dr} + y_{O_2}(N_{O_2,r} + N_{CO_2,r} + N_{N_2,r})$$

se obtiene una nueva expresión cuando $N_{N_2,r}$ es cero,

$$N_{O_2,r} = -cD_{O_2\text{-aire}} \frac{dy_{O_2}}{dr} \tag{26-33}$$

La transferencia total de masa de oxígeno, W_{O_2}, se determina en forma análoga a la utilizada en la obtención de la ecuación (26-32). Se sugiere al estudiante efectuar este ejercicio. Se podría proponer otro modelo en el cual el monóxido de carbono se oxida transformándose en bióxido de carbono. En este caso ocurre una reacción homogénea en la fase gaseosa, por lo cual se tiene que incluir un término R_A en la ecuación diferencial que describe el proceso.

Es importante darse cuenta de que en reacciones heterogéneas la información acerca de la rapidez de la reacción química proporciona una importante condición de frontera:

$$\text{at } r = R \qquad N_{A,r}|_R = -k_s c_A|_R \tag{26-34}$$

donde k_s es la rapidez de reacción, que es constante en relación con la superficie y el signo negativo indica que la especie A está desapareciendo en la superficie. Si la reacción química se considera instantánea con relación al paso de difusión simultánea, la concentración de la componente en difusión en la superficie de reacción, $c_A|_R$ se supone igual a cero; por ejemplo, la ecuación (26-32) se transforma en:

$$W_{O_2} = 4c\pi D_{O_2\text{-air}} R \ln\left(\frac{1}{1+0.21}\right) \tag{26-35}$$

Esta es una cantidad negativa ya que se está transfiriendo oxígeno en la dirección de r pero en sentido negativo. Si la reacción no es instantánea en la superficie, la concentración en la superficie se puede obtener de la ecuación (26-34):

$$y_A|_R = \frac{-N_A|_R}{k_s c}$$

Si se sustituye este valor en la ecuación (26-32), se obtiene una ecuación trascendental que corresponde a $N_{A,r}$

$$W_{O_2} = 4\pi R^2 N_{O_2,r}|_R = 4\pi c D_{O_2\text{-air}} R \ln\left[\frac{1-\dfrac{N_{O_2,r}|_R}{ck_s}}{1+0.21}\right]$$

Cuando k_s es grande, el logaritmo de $1-(N_{O_2,r}|_R/ck_s)$ se puede expandir en una serie de Taylor y la ecuación resultante se puede simplificar, transformándose en:

$$W_{O_2} = \frac{4\pi c D_{O_2\text{-air}} R}{1+\dfrac{D_{O_2\text{-air}}}{k_s R}} \ln\left[\frac{1}{1+0.21}\right] \tag{26-36}$$

Esta ecuación explica la reacción superficial combinada y el proceso de difusión.

En el siguiente ejemplo se estudiará la combustión en estado pseudo permanente de una partícula de carbón pulverizado.

EJEMPLO 4

Se ha propuesto un reactor de carbón fluidificado para una nueva planta de energía. Si se opera a 1145 K, el proceso se verá limitado por la difusión del contraflujo del oxígeno

al monóxido de carbono, CO, que se forma en la superficie de la partícula. Supóngase que el carbón es puro y tiene una densidad de 1.28×10^3 kg/m^3 y la partícula es esférica con un diámetro inicial de 1.50×10^{-4} m. Existe aire (21% O_2 y 79% N_2) a varios diámetros de la esfera. En las condiciones del proceso de combustión la difusividad del oxígeno en la mezcla gaseosa se puede evaluar para la temperatura, resultando 1.3×10^{-4} m^2/seg. Si se supone que el proceso ocurre en el estado permanente, calcúlese el tiempo necesario para reducir el diámetro del carbón a 5.0×10^{-5} m.

La ecuación (26-35) describe la transferencia instantánea de masa de oxígeno a la superficie del carbón.

$$W_{O_2} = 4\pi c D_{O_2,\,aire} R \ln\left(\frac{1}{1.21}\right) \tag{26-35}$$

La reacción superficial $2C + O_2 \rightarrow 2CO_2$ establece que desaparecerán 2 átomos de carbono por cada mol de oxígeno que alcance la superficie, por lo cual,

$$-W_C = 2W_{O_2}$$

La desaparición del carbón también puede definirse en función de la densidad molar del carbón y de su cambio de volumen respecto al tiempo, mediante la ecuación

$$W_C = \frac{\rho_{coal}}{M_{coal}} \frac{dV}{dt} = \frac{\rho_C}{M_C} 4\pi R^2 \frac{dR}{dt} \tag{26-37}$$

Al sustituir la ecuación (26-35) en la (26-37), se obtiene:

$$dt = \frac{-\rho_C}{2M_C c D_{O_2,\,air} \ln(1.21)} R\,dR$$

Esta ecuación se puede integrar entre los límites:

$$\text{at } t = 0 \qquad R = R_{\text{inicial}}$$

$$\text{at } t = t_{\text{final}} \qquad R = R_{\text{final}}$$

obteniéndose:

$$t_{\text{final}} = \frac{\rho_C (R^2_{\text{inicial}} - R^2_{\text{final}})}{4M_C c D_{O_2,\,\text{aire}} \ln(1.21)}$$

La composición molar del gas, c se puede reemplazar por P/RT, debido a la ley de los gases ideales. Una vez hecha la sustitución de los valores conocidos, se obtiene:

$$t_{\text{final}} = \frac{(1.28\times10^6\ \text{g/m}^3)(8.314\ \text{Pa}\cdot\text{m}^3/\text{mol}\cdot\text{K})(1145\ \text{K}) \times[(0.75\times10^{-4}\ \text{m})^2 - (2.5\times10^{-5}\ \text{m})^2]}{4(12\ \text{g/mol})(1.013\times10^5\ \text{Pa})(1.3\times10^{-4}\ \text{m}^2/\text{s})[\ln(1.21)]}$$

$$= 0.50\ \text{s}$$

DIFUSION CON UNA REACCION QUIMICA HOMOGENEA DE PRIMER ORDEN

En la operación unitaria de absorción, uno de los constituyentes de una mezcla gaseosa se disuelve, de preferencia, en un líquido en contacto con ella. Dependiendo de la naturaleza química de las moléculas que actúen en el proceso, la absorción puede o no incluir reacciones químicas. Cuando existen o una producción o una desaparición de la componente en difusión, se puede utilizar la ecuación (25-11) en el análisis de transferencia de masa en la fase líquida. El siguiente análisis explica la transferencia de masa acompañada de una reacción química homogénea.

Véase la figura 26.5 en la cual aparece una capa de un medio absorbente. En la superficie líquida, la composición de A es c_{A_0}. El espesor de la capa, δ, se define de tal manera:

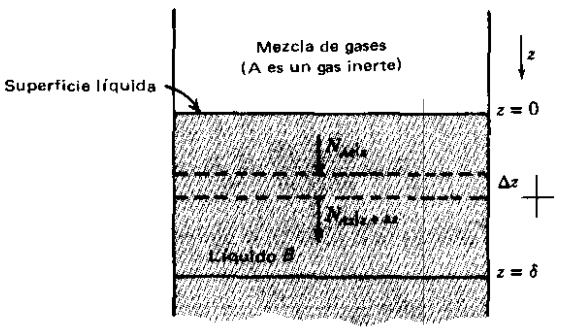


Figura 26.5 Absorción con reacción química homogénea.

que la concentración de A más allá de esta película sea siempre cero, esto es: $c_{A\delta} = 0$. Si el movimiento del fluido es muy poco en la película y si la concentración de A en la misma se supone pequeña, el flujo molar en la película está descrito por la ecuación

$$N_{A,z} = -D_{AB}\frac{dc_A}{dz} \tag{26-38}$$

En la transferencia de masa en estado uniforme, la ecuación diferencial general de transferencia de masa se reduce a:

$$\frac{d}{dz}N_{A,z} - R_A = 0 \tag{26-39}$$

La desaparición de la componente A debido a una reacción de primer orden, está definida por:

$$-R_A = k_1 c_A \tag{26-40}$$

donde k_1 es la constante de rapidez de reacción química. Si se sustituyen las ecuaciones (26-38) y (26-40) en la ecuación (26-39) se obtiene una ecuación diferencial de segundo orden que describe la transferencia simultánea de masa acompañada de una reacción química de primer orden:

$$-\frac{d}{dz}\left(D_{AB}\frac{dc_A}{dz}\right)+k_1c_A=0 \tag{26-41}$$

o de un coeficiente constante de difusión; éste se reduce a:

$$-D_{AB}\frac{d^2c_A}{dz^2}+k_1c_A=0 \tag{26-42}$$

La solución general a la ecuación (26-42) es:

$$c_A=c_1\cosh\sqrt{k_1/D_{AB}}\,z+c_2\operatorname{senh}\sqrt{k_1/D_{AB}}\,z \tag{26-43}$$

Las condiciones de frontera:

$$\text{en } z=0 \qquad c_A=c_{A_0}$$

y

$$\text{en } z=\delta \qquad c_A=0$$

permiten la evaluación de las dos constantes de integración. La constante c_1 es igual a c_{A_0} y c_2 es igual a $-(c_{A_0})/(\tanh\sqrt{k_1/D_{AB}}\,\delta)$, donde δ es el grosor de la película líquida. La sustitución de estas constantes en la ecuación (26-43) produce la ecuación correspondiente al perfil de concentración:

$$c_A=c_{A_0}\cosh\sqrt{k_1/D_{AB}}\,z-\frac{c_{A_0}\operatorname{senh}\sqrt{k_1/D_{AB}}\,z}{\tanh\sqrt{k_1/D_{AB}}\,\delta} \tag{26-44}$$

El flujo molar de masa en la superficie del líquido se puede determinar diferenciando la ecuación (26-44) y calculando la derivada: $(dc_A/dz)|_{z=0}$. La derivada de c_A con respecto a z es:

$$\frac{dc_A}{dz}=+c_{A_0}\sqrt{k_1/D_{AB}}\operatorname{senh}\sqrt{k_1/D_{AB}}\,z-\frac{c_{A_0}\sqrt{k_1/D_{AB}}\cosh\sqrt{k_1/D_{AB}}\,z}{\tanh\sqrt{k_1/D_{AB}}\,\delta}$$

la cual, cuando $z=0$, se transforma en:

$$\left.\frac{dc_A}{dz}\right|_{z=0}=0-\frac{c_{A_0}\sqrt{k_1/D_{AB}}}{\tanh\sqrt{k_1/D_{AB}}\,\delta}=-\frac{c_{A_0}\sqrt{k_1/D_{AB}}}{\tanh\sqrt{k_1/D_{AB}}\,\delta} \tag{26-45}$$

Cuando se sustituye la ecuación (26-45) en la (26-38) y se multiplica por δ/δ, se obtiene:

$$N_{A,z}|_{z=0} = \frac{D_{AB}c_{A_0}}{\delta}\left[\frac{\sqrt{k_1/D_{AB}}\,\delta}{\tanh\sqrt{k_1/D_{AB}}\,\delta}\right] \tag{26-46}$$

Es interesante examinar la operación más sencilla de transferencia de masa que incluye la absorción de A en el líquido B sin ir acompañada de una reacción química. El flujo molar de A se determina fácilmente integrando la ecuación (26-38) entre las dos condiciones de frontera, dando:

$$N_{A,z} = \frac{D_{AB}c_{A_0}}{\delta} \tag{26-47}$$

Resulta obvio que el término $[(\sqrt{k_1/D_{AB}}\,\delta)/(\tanh\sqrt{k_1/D_{AB}}\,\delta)]$ demuestra la influencia de la reacción química, si se comparan estas dos ecuaciones. Este término es una cantidad adimensional, llamada a menudo *número Hatta**.

Al aumentar la rapidez de la reacción química, la constante de rapidez de reacción k_1, aumenta y el término correspondiente a la tangente hiperbólica, $\tanh\sqrt{k_1/D_{AB}}\,\delta$, tiende al 1.0, por lo tanto, la ecuación (26-46) se reduce a:

$$N_{A,z}|_{z=0} = \sqrt{D_{AB}k_1}(c_{A_0} - 0)$$

La comparación de esta ecuación con la (25-30)

$$N_{A,z} = k_c(c_{A_1} - c_{A_2}) \tag{25-30}$$

revela que el coeficiente de la película, k_c es proporcional al coeficiente de difusión elevado a la potencia 1/2. La componente A desaparecerá, por medio de una reacción química relativamente rápida, después de penetrar sólo una corta distancia en el medio absorbente, por lo cual se ha propuesto un segundo modelo de transferencia convectiva de masa: el *modelo de la teoría de penetración*, en la cual k_c se considera como función de D_{AB} elevada a la potencia 1/2. En el estudio anterior acerca de otro modelo de transferencia convectiva de masa, el modelo de la teoría de la película, el coeficiente de transferencia de masa era una función del coeficiente de difusión elevado a la primera potencia. En la sección 26.4 del capítulo 28 se volverán a estudiar los coeficientes de transferencia convectiva de masa.

26.3 SISTEMAS BIDIMENSIONALES Y TRIDIMENSIONALES

En las secciones 26.1 y 26.2 se han analizado problemas en los que la concentración y la transferencia de masa eran funciones de una sola variable espacial. Aunque muchos problemas están dentro de esta categoría, hay sis-

*S. Hatta, *Technol. Repts. Tohoku Imp. Univ.* 10, 119 (1932).

temas que incluyen fronteras irregulares o concentraciones no uniformes a lo largo de la frontera en la que no se puede aplicar el método unidimensional. En tales casos, el perfil de concentración puede ser una función de dos o hasta tres coordenadas espaciales.

En esta sección se repasarán algunos de los métodos de análisis de transferencia molecular de masa en sistemas bidimensionales y tridimensionales. Como la transferencia de calor por conducción es análoga a la transferencia molecular de masa, se encontrará que las técnicas: analítica, gráfica, analógica y numérica, descritas en el capítulo 17, son directamente aplicables.

SOLUCION ANALITICA

Una solución analítica a cualquier problema de transferencia debe satisfacer la ecuación diferencial general que describe la transferencia así como las condiciones de frontera especificadas por la situación física. Un estudio completo de las soluciones analíticas de sistemas bidimensionales y tridimensionales requiere de un conocimiento de las ecuaciones diferenciales parciales así como de la teoría de variable compleja. Como la mayor parte de este material es demasiado elevado para un curso de introducción, limitaremos nuestro estudio a un ejemplo bidimensional relativamente sencillo. Crank* escribió un tratado excelente que se refiere exclusivamente a las soluciones matemáticas de problemas más complicados de difusión.

El método clásico de obtención de una solución exacta de la ecuación de Laplace es el de separación de variables. Se explicará este método aplicándolo a una situación física bidimensional relativamente sencilla. Tómese en cuenta un paso rectangular delgado en una partícula catalizadora. La componente A se difunde en el paso a través de la superficie superior y, al llegar a las otras tres superficies, sufre una reacción instantánea para producir B; esto es: la concentración de A en las tres superficies del paso será cero. La figura 26.6 muestra estas condiciones de frontera.

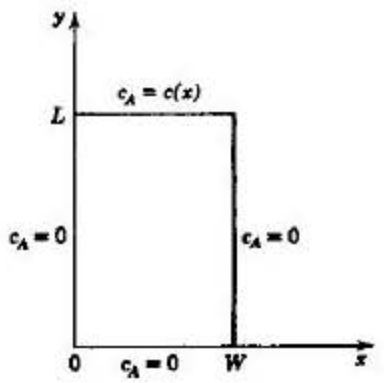


Figura 26.6 Modelo bidimensional correspondiente a un paso de catalizador.

*J. Crank *The Mathematics of Diffusion*, Oxford University Press, Londres, 1957.

El paso mide W unidades de ancho y L unidades de longitud. La concentración en la superficie, $y = L$ no es uniforme y se expresa funcionalmente en la forma $c(x)$. Si no existe movimiento global en el interior del paso, esto es, si $N_A = -N_B$, la distribución de concentraciones en el paso está definida por la ecuación de Laplace,

$$\frac{\partial^2 c_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_A}{\partial y^2} = 0 \tag{25-23}$$

La ecuación (25-23) es una ecuación diferencial parcial homogénea, lineal. Este tipo de ecuación se puede integrar a menudo, suponiendo una solución en forma de producto como la siguiente:

$$c_A(x, y) = X(x)\,Y(y) \tag{26-48}$$

en la cual $X(x)$ es solamente función de x y $Y(y)$ solamente es función de y. Al sustituir la ecuación (26-48) en la (25-23) se obtiene una expresión en la que están separadas las variables,

$$-\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} \tag{26-49}$$

El lado izquierdo de esta ecuación es únicamente función de x, en tanto que el lado derecho es solamente función de y. Como ninguno de los lados puede variar cuando varían x e y, ambos den ser iguales a una constante, digamos, λ^2. Por lo tanto, se tienen dos ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \tag{26-50}$$

y

$$\frac{d^2Y}{dy^2} - \lambda^2 Y = 0 \tag{26-51}$$

La solución general a la ecuación (26-50) es:

$$X = A\cos\lambda x + B\,\mathrm{sen}\,\lambda y \tag{26-52}$$

y la solución general a la (26-51) es:

$$Y = De^{-\lambda y} + Ee^{\lambda y} \tag{26-53}$$

De acuerdo con la ecuación (26-48) la concentración se define en función del producto XY, por lo cual,

$$c_A = (A\cos\lambda x + B\,\mathrm{sen}\,\lambda x)(De^{-\lambda y} + Ee^{\lambda y}) \tag{26-54}$$

donde A, B, D y E son constantes que se van a calcular a partir de las condiciones de frontera siguientes:

$$\text{en } x = 0 \qquad c_A = 0$$
$$\text{en } x = W \qquad c_A = 0$$
$$\text{en } y = 0 \qquad c_A = 0$$

y

$$\text{en } y = L \qquad c_A = c(x)$$

Las constantes de la ecuación (26-54) se pueden evaluar por medio de las sustituciones siguientes: como primera condición, en $x = 0$,

$$A(De^{-\lambda y} + Ee^{\lambda y}) = 0$$

como segunda condición, en $x = W$,

$$(A \cos \lambda W + B \operatorname{sen} \lambda W)(De^{-\lambda y} + Ee^{\lambda y}) = 0$$

y como tercera condición:

$$(A \cos \lambda x + B \operatorname{sen} \lambda x)(D + E) = 0$$

La tercera condición se puede satisfacer solamente si $D = -E$ y la primera condición, únicamente si $A = 0$; usando estos resultados, se observa que la segunda condición se simplifica, hasta quedar en la forma:

$$DB \operatorname{sen} \lambda W(e^{-\lambda y} - e^{\lambda y}) = 2DB \operatorname{sen} \lambda W \operatorname{senh} \lambda y = 0 \qquad (26\text{-}55)$$

Ni B ni D pueden valer cero si se desea encontrar otra solución diferente a la trivial, $c_A = 0$, a través del paso. Como esta expresión es válida para todos los valores de y, la condición especificada por la ecuación (26-55) se puede satisfacer si el $\operatorname{sen} \lambda W = 0$, o sea, si $\lambda = n\pi/W$, donde $n = 1, 2, 3, \ldots$. Existe una solución diferente para cada entero, n y cada una de las soluciones tiene una constante de integración, A_n, separada. Si se suman estas soluciones, se obtiene:

$$c_A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{W} \operatorname{senh} \frac{n\pi y}{W} \qquad (26\text{-}56)$$

La última condición de frontera, en $y = L$, establece que:

$$c_A = c_A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{W} \operatorname{senh} \frac{n\pi L}{W} \qquad (26\text{-}57)$$

La constante A_n se puede evaluar a partir de la ecuación (26-57) una vez que el perfil de $c_A(x)$ está dado en la superficie, $y = L$. Se puede obtener una ecuación que describa la variación de c_A con x e y, después de sustituir el valor de A en la ecuación (26-56).

El método de separación de variables se puede extender a casos tridimensionales, suponiendo que c_A es igual al producto: $X(x)Y(y)Z(z)$, y sustituyendo esta expresión de c_A en la ecuación diferencial. Si se pueden separar las variables se obtienen ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, las cuales se pueden integrar usando las condiciones dadas de frontera.

SOLUCION GRAFICA POR MEDIO DE LA GRAFICACION DEL FLUJO

Se puede obtener una solución aproximada de la ecuación de Laplace correspondiente a un sistema bidimensional, graficando el campo de potencial. Este método se utilizó en el capítulo 18 en la solución de la ecuación de Laplace de transferencia de calor, graficando el campo de potencial correspondiente a las isotermas y a las líneas de flujo de calor. La ecuación análoga de Laplace de transferencia de masa, que es la ecuación (25-23), se puede resolver por medio de una gráfica de campo de potencial del flujo de la masa y las líneas de concentración constante. Los pasos que se toman en la aplicación de esta técnica son idénticos en ambos fenómenos de transferencia molecular.

El objeto de una solución gráfica es construir una red que consista en líneas de concentración constante y líneas idénticas de la dirección de flujo de la masa. Los principios básicos del método gráfico, tal como se estipuló en la sección 17.4, relativa a la transferencia molecular de calor, se explicarán al estudiar la transferencia molecular de masa a través de una placa plana de longitud infinita, tal como puede verse en la figura 26-7.

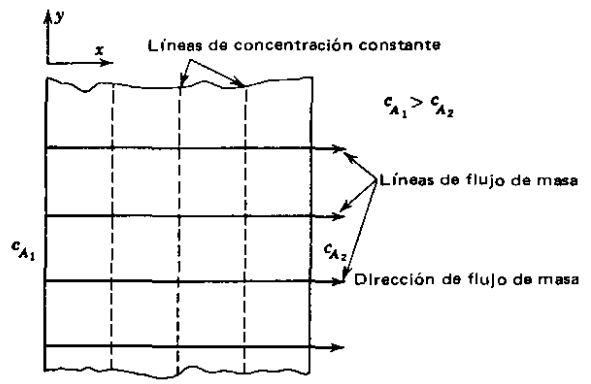


Figura 26.7 Líneas de concentración constante y líneas de flujo de masa en una placa plana de longitud infinita.

Cuando ambas concentraciones superficiales, c_{A_1} y c_{A_2} son constantes en las caras de la placa, las líneas de flujo de masa son perpendiculares a las líneas de composición, como se observa. El principio básico de graficación de un sistema de cualquier configuración es el de trazar, a menudo por medio del método de prueba y error, las líneas de concentración constante y las

líneas de flujo de masa, de tal manera que sean perpendiculares entre si en cada uno de los puntos de intersección. También deben satisfacer las condiciones de frontera. Después de establecer la malla y de conocer la temperatura de distribución, se puede calcular la rapidez de transferencia de masa. Si se separan debidamente las líneas de flujo de masa, se transferirá la misma cantidad de masa a través de cada uno de los tubos de flujo formados entre las líneas adyacentes de flujo de masa. La rapidez total de transferencia de masa es igual al flujo de masa de cada tubo, $N_{A,x}\,\Delta x = D_{AB}\,\Delta c_A$, por el número de tubos, sin importar el tamaño de los cuadros.

En la construcción de la gráfica de flujo, el procedimiento general consiste en dividir el cuerpo en cuadrados curvos por medio del método de prueba y error, satisfaciendo a la vez las condiciones de frontera impuestas al proceso de transferencia. En función de la gráfica de flujo de masa, los requerimientos son los siguientes:

1. Las líneas de concentración constante y flujo de masa deben intersectarse mutuamente formando ángulos rectos y una red de cuadrados curvos.
2. Las diagonales de los cuadrados curvos deben bisectarse a 90° y bisectar a toda arista del cuerpo.
3. Las líneas de concentración constante deben ser paralelas a las fronteras de concentración constante en la frontera.
4. Las líneas de flujo de masa deben ser independientes a las fronteras de concentración constante, en la frontera.
5. Las líneas de flujo de masa que conducen al vértice de una frontera de concentración constante bisectan al ángulo formado entre las superficies de la frontera formada en el vértice.

Una solución gráfica, así como una solución analítica que satisface la ecuación diferencial principal y las condiciones adecuadas de frontera, es una solución única. Si se satisfacen los requerimientos mencionados anteriormente, se obtendrá una solución correcta a la ecuación de Laplace de transferencia de masa.

SOLUCION ANALOGICA

El reconocimiento de la semejanza entre cualesquiera dos o más fenómenos de transferencia permite el análisis de cada uno de los fenómenos por medios matemáticos análogos. Como se demostró anteriormente en la sección 17.4, la ecuación bidimensional de Laplace se puede utilizar en la descripción de fenómenos semejantes de distribución de potencial eléctrico en un campo eléctrico,

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = 0$$

y de distribución de temperaturas en un campo de temperatura,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0$$

Como el fenómeno de transferencia de masa es análogo al de transferencia de calor, tal como lo establece la ecuación de Laplace de transferencia de masa,

$$\frac{\partial^2 c_A}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 c_A}{\partial y^2}=0 \tag{25-23}$$

es de esperarse que también el potencial eléctrico, E, sea análogo al potencial de concentración, c_A. En otras palabras, las líneas de voltaje constante de un campo eléctrico corresponden a las líneas de composición constante en un campo de flujo de transferencia de masa y las líneas de flujo de corriente eléctrica corresponden a las líneas de flujo de masa. Esto permite el uso del graficador de campo análogo en la solución de problemas de transferencia de masa así como en la solución de problemas de transferencia de calor.

SOLUCIONES NUMERICAS

Las técnicas de solución estudiadas hasta aquí, correspondientes a la transferencia molecular de masa, son de considerable utilidad cuando, tanto la geometría como las condiciones de frontera son lo suficientemente simples como para permitir su empleo. Las soluciones analíticas requieren de funciones y geometrías relativamente simples; la graficación de flujos requiere fronteras equipotenciales. Cuando la situación de interés se torna al suficientemente compleja o cuando las condiciones de frontera excluyen el uso de técnicas sencillas de solución se puede uno ver forzado a utilizar una solución numérica.

De nuevo, el hecho de reconocer la semejanza entre la transferencia molecular de masa y la transferencia de energía por conducción, permite predecir las ecuaciones resultantes de entre las encontradas en la sección 17.4. Se sugiere al lector que relea esta sección en la que se introdujeron los conceptos de formulación y solución de problemas numéricos.

Las diferenciales parciales con las que nos topamos en la ecuación (25-23) se pueden manejar como diferencias finitas. Con base en la ecuación (17-66) se puede escribir la diferencia finita de $\partial^2 c_A/\partial x^2$ en la forma:

$$\frac{\partial^2 c_A}{\partial x^2}=\frac{\partial(\partial c_A/\partial x)}{\partial x}=\frac{\dfrac{(c_{A,i+1,j}-c_{A,i,j})}{\Delta x}+\dfrac{(c_{A,i-1,j}-c_{A,ij})}{\Delta x}}{\Delta x}$$

$$=\frac{c_{A,i+1,j}-2c_{A,i,j}+c_{A,i-1,j}}{(\Delta x)^2} \tag{26-58}$$

La forma de la diferencia finita de $\partial^2 c_A/\partial y^2$ es:

$$\frac{\partial^2 c_A}{\partial y^2} = \frac{c_{A,i,j+1} - 2c_{A,i,j} + c_{A,i,j-1}}{(\Delta y)^2} \tag{26-59}$$

Cuando se sustituyen las ecuaciones (26-58) y (26-59) en la (25-23), se obtiene:

$$\frac{c_{A,i+1,j} - 2c_{A,i,j} + c_{A,i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{c_{A,i,j+1} - 2c_{A,i,j} + c_{A,i,j-1}}{(\Delta y)^2} = 0 \tag{26-60}$$

Los índices del nodo adyacente son los que aparecen en la figura 17.19. La malla se establece usualmente en forma conveniente, con un ancho nodal constante, Δx igual a la altura nodal constante Δy. Cuando se cumple lo anterior, la ecuación (26-60) se simplifica hasta quedar así:

$$c_{A,i+1,j} + c_{A,i-1,j} + c_{A,i,j+1} + c_{A,i,j-1} - 4c_{A,i,j} = 0 \tag{26-61}$$

Esta ecuación final establece que en un patrón de malla correspondiente a la transferencia de masa en estado permanente en ausencia de producción química, la concentración de la especie de difusión en cualquier punto dado, $c_{A,i,j}$, es igual al promedio aritmético de las concentraciones de sus nodos adyacentes.

La ecuación (26-61) se puede aplicar a una malla cuadrada trazada en cualquier geometría bidimensional. En las cuatro fronteras de esta malla las concentraciones, o son conocidas, o son fijas. Las concentraciones internas se desconocen. Por ejemplo, para el punto (2,2), la ecuación (26-61) se transforma en:

$$c_{A,3,2} + c_{A,1,2} + c_{A,2,3} + c_{A,2,1} - 4c_{A,2,2} = 0$$

Si este es un punto interno, las cinco concentraciones serán desconocidas, pero si el punto se encuentra a una distancia Δx o Δy de la frontera, una de las concentraciones será conocida. Pueden escribirse N ecuaciones con N incógnitas si existen N nodos internos. Esto significa que habrá un gran número de ecuaciones algebraicas lineales simultáneas que deberán resolverse para determinar el perfil de concentración. Obviamente, el uso de una computadora digital ayuda a simplificar la solución de las ecuaciones.

26.4 TRANSFERENCIA SIMULTANEA DE MOMENTO, CALOR Y MASA

En las secciones anteriores se ha considerado que la transferencia de masa en estado permanente es independiente de los otros fenómenos de transferencia. Muchas situaciones incluyen la transferencia simultánea de masa y energía o momento y, en algunos casos, la transferencia simultánea de masa,

energía y momento. El secado de una superficie por un gas seco y caliente es un ejemplo excelente en el que están contenidos los tres fenómenos. La energía se transfiere a la superficie más fría por convección y radiación; la masa y su entalpia asociada se vuelven a transferir a la corriente de gas en movimiento. Los procesos de transferencia simultánea son más complejos y requieren del manejo simultáneo de cada uno de los fenómenos de transferencia que toman parte.

En esta sección se estudiarán dos ejemplos que incluyen la transferencia simultánea de masa y un segundo fenómeno de transferencia.

TRANSFERENCIA SIMULTANEA DE CALOR Y MASA

Generalmente un proceso de difusión va acompañado de la transferencia de energía, aun dentro de un sistema isotérmico. Como cada una de las especies en difusión lleva su propia entalpia individual, el flujo de calor en un plano dado, se puede describir mediante la ecuación:

$$\frac{\mathbf{q}_D}{A} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{N}_i \bar{H}_i \tag{26-62}$$

en la cual $\mathbf{q}_D/A$ es el flujo de calor debido a la difusión de la masa alrededor del plano especificado y $\bar{H}_i$ es la entalpia molar parcial de la especie i de la mezcla. Cuando existe una diferencia de temperatura la energía se transportará mediante uno de los tres mecanismos de transferencia de calor. Por ejemplo, la ecuación que corresponde a la transferencia de energía total por conducción y difusión molecular se transforma en:

$$\frac{\mathbf{q}}{A} = -k\nabla T + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{N}_i \bar{H}_i \tag{26-63}$$

Si la transferencia de calor se realiza por convección, el primer término de transferencia de energía de la ecuación (26-63) se reemplazará por el producto del coeficiente de transferencia convectiva de calor y una fuerza motriz ΔT.

Un proceso de importancia en muchos procesos ingenieriles así como en sucesos de la vida diaria es el que incluye la condensación de un vapor sobre una superficie fría. Los ejemplos de este proceso incluyen el "exudado" de los tubos de agua fría y la condensación del vapor sobre los vidrios fríos de las ventanas. La figura 26.8 muestra el proceso en el que toma parte una película de líquido condensado fluyendo en forma descendente por una superficie fría y una película de gas a través de la cual se transfiere la condensación por difusión molecular. Este proceso incluye la transferencia simultánea de calor y masa.

Se establecerán las siguientes condiciones en esta situación física particular en estado permanente: La componente pura A se condensará a partir de una mezcla binaria. Por psicrometría, la composición y_{A_1} y la temperatura T_1 se conocen en el plano z_1. La temperatura de la superficie en condensación, T_3, también se conoce. Debido a consideraciones relacionadas con las

transferencias de calor, los coeficientes de transferencia convectiva de calor correspondientes a la película líquida de condensación y a la película de gas, se pueden calcular a partir de las ecuaciones estudiadas en el capítulo 20. Por ejemplo, en la fase gaseosa, cuando el gas que transporta es aire y el contenido de vapor de la especie en difusión es relativamente escaso, el coeficiente de transferencia de calor:

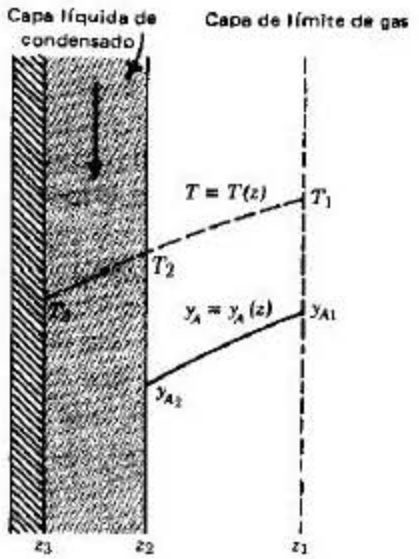


Figura 26.8 Condensación de vapor sobre una superficie fría.

correspondiente a la convección natural se puede calcular mediante la ecuación (20-24)

$$h_c = 0.29(T_1 - T_2)^{1/4} \qquad \text{Btu/hr ft}^2\,^\circ\text{F} \tag{20-24}$$

Si se utiliza la ecuación diferencial de transferencia de masa, que es la (25-11) se verá que la ecuación diferencial que describe la transferencia de masa en la fase gaseosa es:

$$\frac{d}{dz} N_{A,z} = 0 \tag{26-64}$$

La ecuación (26-64) establece que el flujo de masa en la dirección de z es constante en la trayectoria de difusión. Para terminar la descripción del proceso, debe escogerse la forma correcta de la ley de Fick. Si la componente A está en difusión a través de un gas estancado, el flujo de masa está definido por una forma de la ecuación (26-4)

$$N_{A,z} = \frac{-cD_{AB}}{1 - y_A} \frac{dy_A}{dz} \tag{26-4}$$

Como existe un perfil de temperatura dentro de la película y, tanto el coeficiente de difusión como la concentración total del gas varían con la temperatura, esta variación a lo largo de z debe, a menudo, tomarse en cuenta. Desde luego esto complica el problema y requiere de información adicional antes de poder integrar la ecuación (26-4).

Cuando se conoce o puede calcularse aproximadamente el perfil de la temperatura, se puede manejar la variación del coeficiente de difusión. Por ejemplo, si el perfil de la temperatura tiene la forma:

$$\frac{T}{T_1} = \left(\frac{z}{z_1}\right)^n \tag{26-65}$$

la relación entre el coeficiente de difusión y el parámetro de longitud se puede encontrar utilizando la ecuación (24-41) en la forma siguiente:

$$D_{AB} = D_{AB}|_{T_1}\left(\frac{T}{T_1}\right)^{3/2} = D_{AB}|_{T_1}\left(\frac{z}{z_1}\right)^{3n/2} \tag{26-66}$$

La variación de la concentración total debido a la variación de la temperatura se puede calcular así:

$$c = \frac{P}{RT} = \frac{P}{RT_1(z/z_1)^n}$$

Ahora, la ecuación de flujo se ha transformado en:

$$N_{A,z} = \frac{-PD_{AB}|_{T_1}}{RT_1(1-y_A)}\left(\frac{z}{z_1}\right)^{n/2}\frac{dy_A}{dz} \tag{26-67}$$

Este es el mismo método usado en el ejemplo 2 del capítulo 15, que trató acerca de la transferencia de calor por conducción cuando la conductividad térmica es variable.

En una pequeña gama de valores de la temperatura se pueden utilizar un coeficiente promedio de difusión y la concentración molar total. Con esta suposición se simplifica la ecuación (26-4) hasta quedar en la forma:

$$N_{A,z} = -\frac{(cD_{AB})_{\text{prom}}\, dy_A}{(1-y_A)\quad dz} \tag{26-68}$$

Al integrar esta ecuación entre las condiciones de frontera

$$\text{en } z = z_1 \qquad y_A = y_{A_1}$$

and

$$\text{en } z = z_2 \qquad y_A = y_{A_2}$$

se obtiene la relación:

$$N_{A,z} = \frac{(cD_{AB})_{\text{prom}}(y_{A_1} - y_{A_2})}{(z_2 - z_1)y_{B,lm}} \tag{26-69}$$

La temperatura T_2 se necesita para evaluar $(cD_{AB})_{prom.}$, que es la diferencia de temperatura entre la superficie del líquido y el valor adyacente y la presión del vapor de la especie A en la superficie del líquido. Esta temperatura se puede calcular a partir de consideraciones relativas a la transferencia de calor. El flujo total de energía a través de la superficie del líquido también pasa a través de la película de líquido. Esto puede expresarse mediante la relación:

$$\frac{q_z}{A} = h_{líquido}(T_2 - T_3) = h_c(T_1 - T_2) + N_{A,z}M_A(H_1 - H_2) \qquad (26\text{-}70)$$

donde $h_{líquido}$ es el coeficiente de transferencia convectiva de calor en la película de líquido; h_c es el coeficiente natural de transferencia convectiva de calor en la película de líquido; M_A es el peso molecular de A y H_1 y H_2 son las entalpias del vapor en el plano 1 y del líquido en el plano 2, respectivamente, en la especie A, por unidad de masa. Es importante darse cuenta de que existen dos contribuciones al flujo de energía que entra a la superficie del líquido desde la película de gas, transferencia convectiva de calor y la energía que lleva consigo la especie en condensación.

Se requiere de una solución de prueba y error para resolver la ecuación (26-70). Si se supone un valor de la temperatura en la superficie del líquido, igual a T_2, se pueden calcular h_c y $(cD_{AB})_{prom.}$ La composición de equilibrio, y_{A_2}, se puede determinar a partir de relaciones termodinámicas. Por ejemplo, si es válida la ley de Raoult,

$$p_{A_2} = x_A P_A$$

en la que x_A, correspondiente a un líquido puro es de 1.0 y la presión parcial sobre la superficie del líquido es igual a la presión del vapor, P_A. Debido a la ley de Dalton, la fracción molar de A en el gas, justamente sobre el líquido es:

$$y_{A_2} = \frac{p_{A_2}}{P} \quad \text{o} \quad \frac{P_A}{P}$$

donde P es la presión total del sistema y P_A la presión del vapor de A a la temperatura supuesta, T_2. Si se conocen $(cD_{AB})_{prom.}$ e y_{AZ}, se puede evaluar N_{AZ} por medio de la ecuación (26-69). Los coeficientes de transferencia de calor en la película del líquido, pueden calcularse usando las ecuaciones del capítulo 20. Ahora se conoce el valor de cada uno de los términos de la ecuación (26-70). Cuando ambos lados de la ecuación son iguales la suposición acerca de la temperatura de la superficie del líquido es correcta. Si la temperatura que se supuso en un principio no da como resultado la igualdad, deben seguirse haciendo tentativas hasta que se satisfaga la ecuación (26-70).

Existen varios procesos industriales en los cuales la transferencia de calor y masa ocurren simultáneamente entre un gas y un líquido. La concentración de ácido sulfúrico en la cámara de ácido sulfúrico de una planta fue uno de los primeros procesos de este tipo. El calor con el que contribuyeron los

gases calientes produjo la evaporación de agua y la liberación de óxidos nitrosos. Un método más reciente se relaciona con el enfriamiento de las naves espaciales durante su regreso por medio de la sublimación de material desgastado por ablación. Otros de los procesos en los que intervienen simultáneamente las transferencias de calor y de masa son el enfriamiento de agua y la humidificación o deshumidificación de aire.

TRANSFERENCIA SIMULTANEA DE MOMENTO Y MASA

En varias operaciones de transferencia de masa, se intercambia masa entre dos fases. Un ejemplo importante que ya anteriormente se había hallado, es la *absorción* o sea, la disolución selectiva de una de las componentes de una mezcla gaseosa debido a un líquido. Usualmente se utiliza una columna de pared mojada, como la de la figura 26.9, en el estudio del mecanismo de esta operación de transferencia de masa, ya que proporciona un área de contacto bien definida entre las dos fases. En esta operación fluye una película delgada a lo largo de la pared de la columna mientras está en contacto con una mezcla de gases. La longitud del contacto entre ambas fases es relativamente pequeña durante la operación normal. Como sólo se absorbe una pequeña cantidad de masa, se supone que las propiedades del líquido no se alteran; la velocidad del líquido descendente, por lo tanto, permanecerá virtualmente inalterada por el proceso de difusión.

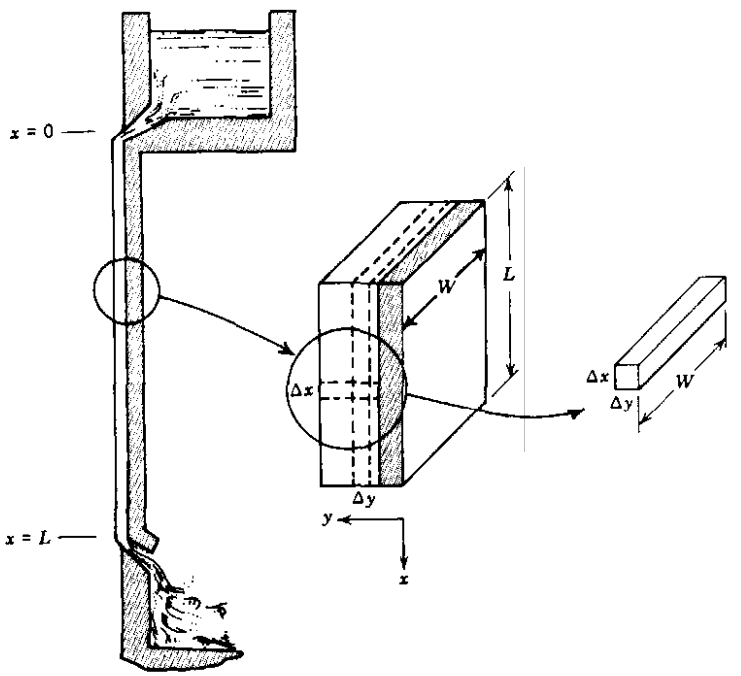


Figura 26.9 Absorción en una película descendente de líquido.

En el proceso interviene la transferencia, tanto de momento como de masa. En el capítulo 8 se estudió el flujo laminar descendente de un fluido en un plano inclinado. Cuando el ángulo de inclinación es de 90° los resultados obtenidos en la sección 8.2 se pueden utilizar en la descripción del perfil de velocidad del líquido descendente. Mediante esta sustitución, la ecuación diferencial de transferencia de momento se transforma en:

$$\frac{d\tau_{yz}}{dy} + \rho g = 0$$

y las condiciones de frontera que deben satisfacerse son:

$$\text{en } y = 0 \qquad v_z = 0$$

y

$$\text{en } y = \delta \qquad \frac{\partial v_z}{\partial y} = 0$$

La expresión definitiva del perfil de la velocidad es:

$$v_z = \frac{\rho g \delta^2}{\mu}\left[\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right]$$

La velocidad máxima se alcanzará en la orilla de la película, donde $y = \delta$. Su valor será:

$$v_{\text{máx}} = \frac{\rho g \delta^2}{2\mu}$$

Al sustituir este resultado en el perfil de la velocidad se obtiene otra forma de la expresión que corresponde a v_z

$$v_z = 2v_{\text{máx}}\left[\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right] \tag{26-71}$$

La ecuación diferencial de transferencia de masa puede obtenerse mediante el uso de la ecuación diferencial general de transferencia de masa y la eliminación de los términos irrelevantes o haciendo un balance sobre el volumen de control, $\Delta x\ \Delta y W$, tal como puede apreciarse en la figura 26.9. Es importante percatarse de que la componente a lo largo de y del flujo de masa, $N_{A,y}$, está asociada con la dirección negativa de y, de acuerdo con los ejes previamente fijados al hacer las consideraciones pertinentes acerca del flujo de fluidos. El balance de masa sobre el volumen de control es:

$$N_{A,x}|_{x+\Delta x} W\,\Delta y - N_{A,x}|_x W\,\Delta y + N_{A,y}|_{y+\Delta y} W\,\Delta x - N_{A,y}|_y W\,\Delta x = 0$$

Cuando se divide entre $W\,\Delta x\,\Delta y$, y Δx y Δy se hacen tender a cero, se obtiene la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial N_{A,x}}{\partial x} + \frac{\partial N_{A,y}}{\partial y} = 0 \tag{26-72}$$

Los flujos molares unidireccionales están definidos por:

$$N_{A,x} = -D_{AB}\frac{\partial c_A}{\partial x} + x_A(N_{A,x} + N_{B,x}) \tag{26-73}$$

y

$$N_{A,y} = -D_{AB}\frac{\partial c_A}{\partial y} + x_A(N_{A,y} + N_{B,y}) \tag{26-74}$$

Tal como se dijo anteriormente, el tiempo de contacto entre el vapor y el líquido es relativamente corto, por lo tanto se creará un gradiente despreciable de concentración en la dirección de x y la ecuación (26-73) se reducirá a:

$$N_{A,x} = x_A(N_{A,x} + N_{B,x}) = c_A v_x \tag{26-75}$$

El término correspondiente a la transferencia convectiva en la dirección negativa de y, $y_A(N_{A,y} + N_{B,y})$, consta de la multiplicación de dos valores extremadamente pequeños y es despreciable, por lo que la ecuación (26-74) se transforma en:

$$N_{A,y} = -D_{AB}\frac{\partial c_A}{\partial y} \tag{26-76}$$

Al sustituir las ecuaciones (26-75) y (26-76) en la ecuación (26-72), se obtiene:

$$\frac{\partial(c_A v_x)}{\partial x} - D_{AB}\frac{\partial^2 c_A}{\partial y^2} = 0 \tag{26-77}$$

o, como v_x depende únicamente de y:

$$v_x\frac{\partial c_A}{\partial x} - D_{AB}\frac{\partial^2 c_A}{\partial y^2} = 0 \tag{26-78}$$

El perfil de velocidad, tal como lo define la ecuación (26-71) se puede sustituir en la ecuación (26-78), obteniéndose:

$$2v_{\text{máx}}\left[\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right]\frac{\partial c_A}{\partial x} = D_{AB}\frac{\partial^2 c_A}{\partial y^2} \tag{26-79}$$

Las condiciones de frontera correspondientes a la transferencia de masa en la película descendente son:

$$\text{en } x = 0 \qquad c_A = 0$$

$$\text{en } y = 0 \qquad \frac{\partial c_A}{\partial y} = 0$$

y

$$\text{en } y = \delta \qquad c_A = c_{A_0}$$

Johnstone y Pigford* resolvieron la ecuación (26-79) y obtuvieron, para el perfil adimensional de concentración, la expresión:

$$\frac{c_A|_{x=L} - c_A|_{y=\delta}}{c_A|_{x=0} - c_A|_{y=\delta}} = 0.7857e^{-5.1213n} + 0.1001e^{-39.318n} + 0.03500e^{-105.64n} + 0.01811e^{-204.75n} + \cdots \tag{26-80}$$

donde $c_A|_{x=L}$ es la concentración del soluto en el fondo de la columna; $c_A|_{y=\delta}$ es la concentración del soluto en la interfase gas-líquido; $c_A|_{x=0}$ es la concentración del soluto en la parte superior de la columna; n es la razón

$$D_{AB}L/\delta^2 v_{\text{máx}}$$

L es la altura de la columna; δ es el espesor de la película; $v_{\text{máx}}$ es la velocidad máxima de la película, localizada en la superficie de la misma y D_{AB} es el coeficiente de difusión del soluto en el líquido.

El caso específico en el cual el soluto A penetra solamente una pequeña distancia dentro de la película del líquido a causa de la lentitud con la que se lleva a cabo la difusión o debido al corto tiempo de exposición, puede atacarse por medio del modelo de la *teoría de penetración* desarrollado por Higbie†. Al transferirse el soluto A a la película en $y = \delta$, el efecto de la película descendente sobre la especie en difusión es tal que se puede considerar que el fluido está fluyendo con la velocidad uniforme $v_{\text{máx}}$. La figura 26.10 representa la profundidad de penetración. El soluto A no se verá afectado por la presencia de la pared, por lo tanto puede considerarse que el fluido tiene una profundidad infinita. Con estas simplificaciones, la ecuación (26-79) se reduce a:

$$v_{\text{max}}\frac{\partial c_A}{\partial x} = D_{AB}\frac{\partial^2 c_A}{\partial y^2} \tag{26-81}$$

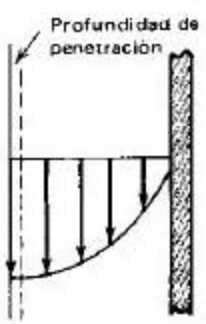


Figura 26.10 Profundidad de penetración de una película descendente.

*H. F. Johnstone y R. L. Pigford, *Trad. AIChE*, 38, 25 (1942).

† R. Higbie *Trad AIChE*, 31, 368-389 (1935).

Con las siguientes condiciones de frontera:

$$\text{en } x = 0 \qquad c_A = 0$$

$$\text{en } y = \delta \qquad c_A = c_{A_0}$$

y

$$\text{en } y = -\infty \qquad c_A = 0$$

La ecuación (26-81) puede transformarse en una forma que se encuentra usualmente en la transferencia de masa en estado no permanente. Si se hace que el valor de ξ sea igual a $\delta - y$, la ecuación transformada y las condiciones de frontera se convierten en:

$$v_{\text{máx}} \frac{\partial c_A}{\partial x} = D_{AB} \frac{\partial^2 c_A}{\partial \xi^2} \tag{26-82}$$

y

$$\text{en } x = 0 \qquad c_A = 0$$

$$\text{en } \xi = 0 \qquad c_A = c_{A_0}$$

y

$$\text{en } \xi = \infty \qquad c_A = 0$$

La solución de la ecuación (26-82) se expresa, usualmente en términos de la función complementaria de error. La función de error y la función complementaria de error son dos formas matemáticas que se encuentran a menudo en las soluciones de los problemas de transferencia transitoria y se estudiaron en el capítulo 18. En el Apéndice L, aparecen tabuladas. La solución al modelo de penetración correspondiente a una capa descendente de líquido es:

$$c_A = c_{A_0} \operatorname{erfc} \frac{\xi}{\sqrt{4 D_{AB} x / v_{\text{máx}}}} \tag{26-83}$$

ó

$$c_A = c_{A_0} \operatorname{erfc} \frac{\xi}{\sqrt{4 D_{AB} t_{\text{exp}}}} \tag{26-84}$$

donde el tiempo de exposición está definido por la expresión $t_{\text{exp}} = x/v_{\text{máx}}$. El flujo local de masa en la superficie, en el cual $\xi = 0$ o $y = \delta$, se obtiene diferenciando la ecuación (26-83) con respecto a ξ sustituyendo la derivada en la ecuación (26-76)

$$N_{A,y}|_{\xi=0} = N_{A,y}|_{y=\delta} = -D_{AB} \left. \frac{\partial c_A}{\partial y} \right|_{y=\delta}$$

El flujo unidireccional se transforma en:

$$N_{A,y}|_{y=\delta} = c_{A_0}\sqrt{\frac{D_{AB}v_{máx}}{\pi x}} \tag{26-85}$$

ó

$$N_{A,y}|_{y=\delta} = c_{A_0}\sqrt{\frac{D_{AB}}{\pi t_{exp}}} \tag{26-86}$$

Tal como se demostró anteriormente en la sección 26.2, cuando la difusión se encuentra acompañada por una rápida desaparición química de la componente en difusión, el flujo de masa del modelo de penetración varía en relación con el coeficiente de difusión elevado a la potencia 1/2.

26.5 CONCLUSION

En este capítulo se han estudiado las soluciones de los problemas de transferencia de masa. Las ecuaciones que definen la transferencia de masa se establecieron mediante el uso de una expresión del volumen de control correspondiente a la conservación de la masa, o usando la ecuación diferencial de transferencia de masa. Se espera que este medio doble de atacar el problema dote al estudiante de una comprensión de los diversos términos contenidos en la ecuación diferencial y le permita decidir su empleo en cualquier situación específica.

Se estudiaron, asimismo, sistemas unidireccionales con y sin producción química y se introdujeron dos modelos de transferencia de masa: película y penetración. Estos modelos se usarán en el capítulo 28 en la evaluación y explicación de los coeficientes convectivos de transferencia de masa.

Se analizaron cuatro clases de soluciones a problemas de transferencia de masa en más de una dirección. Estos métodos incluyeron las técnicas: analítica, gráfica, analógica y numérica.

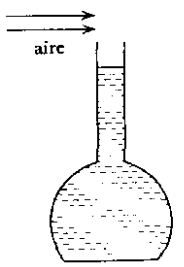
PROBLEMAS

26.1 En el caso de la difusión a través de un medio no difusor, el flujo de masa de la componente A está descrito por la ecuación (26-8).

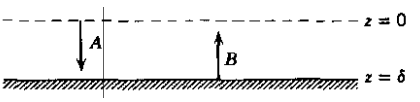
a) ¿En qué forma varía el flujo de la componente A si se duplica la presión ejercida sobre el sistema?

b) Como debe existir el gradiente parcial de la presión correspondiente a la componente A si esta última se transfiere, y como la presión total de un sistema dado a menudo permanece constante, también debe existir un gradiente parcial de la presión que corresponda a la componente B. Si este es el caso, ¿cómo es que se puede considerar que la componente B no es un gas en difusión ($N_B = 0$)?

26.2 Una celda de Arnold modificada, como la que aparece en la figura se utilizó para estudiar la rapidez de evaporación del etanol de un tubo de diámetro pequeño. El tubo a través del que se llevó a cabo la difusión es de 3 in de longitud y 1/16 in de diámetro. Si el bulbo estaba, inicialmente lleno de etanol hasta la salida del tubo, ¿cuánto tiempo tardó el nivel del etanol en descender 1 in? El aire circundante se hallaba a 75° F y 1 atm. La presión del vapor de etanol es de 53 torr a 75° F.



26.3 El siguiente dibujo muestra la difusión en la fase gaseosa en la vecindad de una superficie catalizadora. La componente A se difunde a través de una película estancada a la superficie catalizadora en la cual se con-



vierte instantáneamente en B, por medio de la reacción:

$$A \rightarrow 3B$$

B se difunde alejándose de la superficie catalizadora, de nuevo a través de la película estancada.

a) Determine la rapidez con la que A entra en la película de gas si este es un proceso en estado permanente.

b) Evalúe el perfil de concentración, esto es, y_A contra z.

26.4 Se determinó la difusividad del tetracloruro de carbono, CCl_4 en el oxígeno, O_2, en una celda evaporante de Arnold en un estado permanente. La celda, cuya sección transversal es de 0.82 cm^2 se operó a 273 K y una presión de 755 mm de Hg. La longitud media de la trayectoria de difusión es de 17.1 cm.

a) Si se evaporaron 0.0208 cm^3 de CCl_4 en 10 h de operación en estado permanente, ¿cuál deberá ser el valor de la difusividad del CCl_4 en el O_2?

b) Calcule la misma difusividad, usando la ecuación de Hirshfelder y compárense los valores de ambos coeficientes.

c) Calcule el perfil de la concentración; esto es, y en función de z. A 273 K la presión de vapor del tetracloruro de carbono es de 33 mm Hg y la densidad del CCl_4 es de 1.59 g/cm^3.

26.5 Se diseñó una celda de Arnold para la evaluación experimental de las difusividades de los gases. Se le colocaron a la celda diagramas movibles que pueden insertarse simultáneamente en la columna cilíndrica que se encuentra sobre el líquido en difusión. La columna tiene una sección transversal de 1 cm^2. Las muestras de gases recolectadas en los primeros cuatro compartimientos producidos por la inserción de diagramas, se analizaron produciendo los siguientes resultados de A en difusión a través de B estancado:

	$z - z_1$ *Distancia de la superficie del líquido al nivel de la sección en cm.*		
Sección	*Parte inferior*	*Parte superior*	*Fracción molar de* A
I	0.10	1.10	0.840
II	1.10	2.10	0.733
III	2.10	3.10	0.535
IV	3.10	4.10	0.279

La celda se operó a 20° C y 760 mm de Hg. La presión de vapor de A a 20° C es de 670 mm de Hg. La rapidez que se midió de evaporación de A fue de 0.00622 mol/h.

a) Pruebe la consistencia de los datos. ¿Cuáles son sus conclusiones acerca de los datos?

b) Calcule el "mejor" valor correspondiente a la difusividad de A en B.

26.6 En un proceso de tratamiento de aguas negras se inyectó gas de cloro en el agua como agente desinfectante. Compare el tiempo requerido para que 1 mol de cloro se difunda a través de una película de 0.4 cm. de grosor de:

a) aire estancado a 290 K

b) agua estancada a 290 K

cuando los niveles de concentración de cloro son: 0.025 mol/m^3 en un borde de la capa y cero en el otro borde.

26.7 El monóxido de carbono se difunde a través de una película de aire estancado de 0.1 in a un baño de ácido sulfúrico en el cual desaparece instantáneamente en una reacción química. Calcule la rapidez de transferencia a lo largo de un área de un pie cuadrado si la temperatura y presión del sistema son, respectivamente, de 10° C y 1 atm y si la concentración de monóxido de carbono en el borde exterior de la capa de aire es de 3 moles por ciento. Determine el perfil de la concentración de este proceso.

26.8 Una bolita de naftalina de forma esférica y de 3/4 in de diámetro está suspendida en aire estacionario. La presión y temperatura del sistema son de 1 atm y 165° F, respectivamente. Determine la cantidad de naf-

talina que entra en la fase gaseosa en un período de 24 h. La naftalina tiene un peso molecular de 128 g/mol y una presión de vapor de 5 mm de Hg a 165° F.

26.9 La permeabilidad de los sólidos a los gases se determina experimentalmente mediante mediciones de la difusión en estado permanente. El soluto en difusión se introdujo en un lado de la membrana y se extrajo del otro lado en forma de gas.

En un gas diatómico, A_2, que se disocia al disolverse en un sólido, la ley de Sievert relaciona la concentración c_1, de átomos de A en la capa superficial de la membrana en equilibrio, con la presión, p_1, aplicada, del gas diatómico, mediante la relación:

$$c_1 = k(p_1)^{1/2}$$

Esta misma ecuación también es válida en la otra superficie de la membrana, a la presión de gas, p_2. La ley de Sievert es una variación de la ley de Henry correspondiente a los gases que se disocian al disolverse.

a) Demuestre que la rapidez de difusión de un gas diatómico procedente de un depósito a gran presión, p_1, a través de una membrana de grosor z, hasta un depósito a baja presión, p_2, es:

$$J_{A_2} = \frac{-D_{A_2}k}{z}(p_1^{1/2} - p_2^{1/2})$$

donde D_{A_2} es la difusividad de A_2 a través de la membrana. Cuando se emplean presiones estándar con una membrana de espesor estándar, J_{A_2} se llama permeabilidad de A_2.

b) Parte de un equipo de laboratorio que opera a 700° C contiene gas de hidrógeno a 8 atmósferas separado de un espacio que permanece al vacío por medio de un disco de níquel de 2 mm de espesor. La solubilidad del hidrógeno en níquel a una atmósfera de presión y 700° C es, aproximadamente, de 7.0 cm^3 por cada 100 g de níquel. La difusividad del hidrógeno en el níquel a 700° C es de 6×10^{-5} cm^2/seg y la densidad del níquel a 700° C es de 9.0 g/cm^3. Calcule el número de centímetros cúbicos de hidrógeno que se difunden en el níquel en cada hora.

26.10 Se utiliza una celda de Arnold en estado permanente en la determinación de la difusividad del alcohol etílico en aire a 297 K y 1 atm. Si los resultados concuerdan con el valor que aparece en el Apéndice J 1 y la celda tiene una sección transversal de 0.82 cm^2 y una trayectoria de difusión de 15 cm, ¿qué cantidad de etanol deberá suministrarse a la celda para mantener constante el nivel del líquido? A 297 K, la presión de vapor de etanol es de 53 mm de Hg y su gravedad específica es de 0.79.

26.11 La celda de Arnold descrita en el problema 26.10 se va a operar como una celda en estado pseudo permanente. Si el tubo estuviera inicial-

mente lleno de etanol hasta la boca del tubo, ¿cuánto tardaría el nivel del etanol en descender?

a) 2 cm.

b) 4 cm.

c) 10 cm.

26.12 Calcule la rapidez de difusión del azúcar a través de una película de café de 0.1 cm de espesor cuando las concentraciones son de 14% y 6% respectivamente, en cualquiera de los lados de la película. Suponga que la difusividad del azúcar en el café en las condiciones especificadas es de 0.7×10^{-5} cm^2/seg. y la densidad de una solución al 10% es de 1.013 g/cm^3.

26.13 Compare el tiempo que tarda 1 mol de etanol en difundirse a través de

a) una película de aire estancado

b) una película estancada de agua líquida si en cada uno de estos casos el espesor de la película es de 3 mm y las concentraciones inicial y final son de 0.010 mol/m^3 y cero, respectivamente. La presión y temperatura del sistema son 1.013×10^5 Pa y 283 K, respectivamente.

26.14 Una mezcla de vapor de agua y alcohol etílico se está rectificando por contacto con una solución de alcohol/agua líquida. El alcohol se transfiere desde el líquido hasta la fase de vapor y el agua se transfiere en dirección contraria. Ambas componentes se están difundiendo a través de una película gaseosa de 0.1 mm de espesor. La temperatura es de 95°C y la presión de 1 atm. A esa temperatura, los calores latentes de vaporización del alcohol y del agua son, respectivamente, de 483 Btu/lb_m y 976 Btu/lb_m. La fracción molar de alcohol es de 0.80 de un lado de la capa y de 0.20 del otro lado de la misma. Calcule la rapidez de difusión del alcohol etílico y del agua en libras por hora a través de un área de un pie cuadrado.

26.15 Se extrae amoniaco, NH_3, en forma selectiva, de una mezcla de aire y NH_3, mediante la absorción en agua. En este proceso en estado permanente, el amoniaco se difunde a través de una película de gas estancado de 2 cm de espesor y después a través de una capa de agua estancada de 1 cm de espesor. La concentración de amoniaco en la frontera externa de la capa de gas es de 4.5% por volumen y la concentración de amoniaco en la frontera exterior de la capa de agua es, esencialmente, igual a cero. La temperatura del sistema es de 15° C y la presión total sobre el mismo es de 1 atm. La concentración en la interfase entre el gas y las fases líquidas está dada por los siguientes datos de equilibrio:

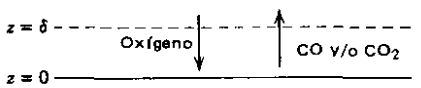
Datos de equilibrio correspondientes al amoniaco en aire sobre soluciones acuosas

p_{NH_3} (mm Hg)	5	10	15	20	25	30
c_{NH_3} $(mol/cm^3)(10^6)$	6.1	11.9	20.0	32.1	53.6	84.8

Determine la rapidez de difusión del amoniaco.

26.16 Calcule el tiempo requerido para la evaporación total de una esfera de naftalina cuyo diámetro inicial es de 1.0 cm cuando está suspendida en una cantidad infinita de aire a 318 K. Si la temperatura de la superficie de la naftalina se supone igual a 318 K, su presión de vapor de 1.06×10^4 Pa y su densidad de 1.14×10^3 kg/m^3. En estas condiciones, la difusividad del gas de naftalina en aire es de 6.9×10^{-7} m^2/seg.

26.17 En una cámara caliente de combustión se difunde oxígeno a través de aire hasta una superficie de carbono donde reacciona para formar CO y CO_2. La concentración de oxígeno en $z = \delta$ es de 21 moles por ciento. La reacción en la superficie puede suponerse instantánea. No ocurre



ninguna reacción en la película de gas. Determine la rapidez de difusión del oxígeno por hora, a través de un área de un metro cuadrado si

a) se produce solamente bióxido de carbono en la superficie del carbono

b) si se produce solamente monóxido de carbono en la superficie del carbono y

c) ocurre la siguiente reacción en la superficie del carbono;

$$3\,C + 2\,O_2 \rightarrow 2\,CO + CO_2$$

26.18 Una capa de etanol de 0.05 in de grosor se mantiene a 75° F en contacto con aire seco a 75° F y 1 atm. La gravedad específica del etanol es de 0.789. Suponiendo que la vaporización se lleva a cabo por difusión molecular a través de una película de gas de 0.15 in de espesor, calcule el tiempo necesario que debe transcurrir para que el etanol se evapore totalmente.

26.19 Se llenó un tubo capilar con acetona hasta una distancia de 1.10 cm. de su parte superior. El tubo se mantuvo a 20° C en tanto que fluía una corriente de aire sobre la parte superior del tubo. El nivel del líquido en el tubo descendió 2.05 cm durante 8 h de operación. La presión barométrica fue de 750 mm y la acetona ejerció una presión de vapor de 180 mm. Determine la difusividad de la acetona en aire.

26.20 Una partícula de carbón pulverizado se quema en aire a 2,200° F. El proceso está limitado por la difusión del contraflujo del oxígeno al CO_2 formado en la superficie de la partícula. Suponga que el carbón está formado por carbono puro con una densidad de 80 lb$_m$/ft^3 y que la partícula es esférica y tiene un diámetro inicial de 0.006 in. Existe aire (21% de O_2 y 79% de N_2) a varios diámetros de distancia de la esfera. En las condiciones del proceso de combustión, la difusividad del oxígeno en la mezcla gaseosa se puede suponer de 4.0 ft^2/h ¿Cuánto tiempo se necesita para reducir el diámetro de la partícula a 0.001 in?

26.21 Calcule cuánto tiempo se empleará en reducir el diámetro del hemisferio de una gota de agua que descansa sobre una superficie plana, de 0.6 cm a 0.125 cm si el agua se evapora por difusión molecular a través de una "película efectiva" de nitrógeno, de 0.5 cm de espesor que circunda a la gota. El cuerpo principal de nitrógeno que se encuentra más allá de la película efectiva puede suponerse libre de vapor de agua. El agua de la gota se mantendrá a una temperatura tal que la presión del vapor de agua será siempre de 1.013×10^4 Pa. La presión del sistema es de 1.013×10^5 Pa. A esta presión y temperatura, el coeficiente de difusión del agua en nitrógeno puede tomarse de: $2.1 \times 10^{-5}\ m^2/seg$. Desprecie inicialmente el efecto del movimiento de la fase gaseosa que se requiere para reemplazar el líquido evaporado. ¿En qué forma variaría el cálculo si se tomara el movimiento global de la fase requerido para reemplazar el líquido en evaporación?

26.22 En la oxidación de varios metales se forma una película de óxido en la superficie del metal. Para que tenga lugar la oxidación, el oxígeno deberá difundirse a través de la película de óxido a la superficie del metal. El óxido producido tiene un volumen mayor que el metal consumido, por lo tanto, la trayectoria de difusión aumenta con el tiempo. Finalmente, la oxidación queda controlada por la difusión y la concentración de oxígeno en solución en la interfase óxido-metal, se hace cero. Si puede suponerse una condición de estado pseudo permanente, obtenga una expresión que informe acerca de la profundidad de la película de óxido en función del tiempo, la concentración del oxígeno de la superficie libre de la película de óxido y la difusividad del oxígeno a través del óxido.

26.23 Una partícula de carbón pulverizado se quema en aire a 1145 K. El proceso se encuentra limitado por la difusión del contraflujo de oxígeno a monóxido de carbono, CO, formado en la superficie de la partícula. Suponga que el carbón está formado por carbono puro con una densidad de 1280 kg/m^3 y que la partícula es de forma esférica y tiene un diámetro inicial de 0.015 cm. Hay aire (21% de oxígeno) a varios diámetros de la esfera. En las condiciones del proceso de combustión, la difusividad del oxígeno en la mezcla gaseosa se puede suponer de $10^{-4}\ m^2/seg$. Determine el tiempo necesario para reducir el diámetro de la partícula a 0.005 cm.

26.24 En un cilindro de combustible nuclear que contiene material fisionable, la rapidez de producción de neutrones es proporcional a la concentración neutrónica. Suponiendo que solamente se producen neutrones térmicos, determine el perfil de concentración neutrónica en un cilindro de combustible de radio R.

26.25 La isomerización de A para formar A_n,

$$nA \rightarrow A_n$$

ocurre en una partícula catalizadora con una rapidez tan grande que la difusión en la película estancada alrededor del catalizador controla la rapidez de isomerización. Obtenga una expresión correspondiente a la rapidez de isomerización en función de las propiedades del fluido, de las concentraciones de A y A_n en la fase fluida global y del espesor de la película estancada si el catalizador es:

a) esférico de radio R

b) una varilla cilíndrica de radio R y longitud L,

c) una placa plana de longitud L y espesor W.

26.26 Vuelva a resolver el problema 26.25 para el caso de la descomposición de A para formar n moles de A por medio de la reacción $A_n \rightarrow nA$.

26.27 En la ruptura catalítica de los aceites de hidrocarburo los gases de los hidrocarburos pesados se difunden en la superficie catalizadora donde se rompen, esto es, se descomponen. El producto se vuelve a difundir en la corriente de gas.

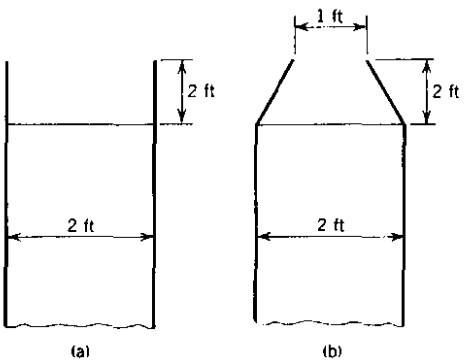
Una investigación cinética indicó que el compuesto se rompe de acuerdo con la reacción siguiente:

$$H \rightarrow 3L$$

La reacción se efectúa en una partícula catalizadora esférica con una rapidez tan grande que la difusión en la película estancada que circunda a la partícula controla la rapidez de la reacción.

Encuentre una expresión correspondiente a la rapidez de descomposición en función de las propiedades de la fase gaseosa, de la concentración de los compuestos H y L en la fase gaseosa, global, del diámetro de la partícula catalizadora y del espesor de la película estancada que circunda al catalizador.

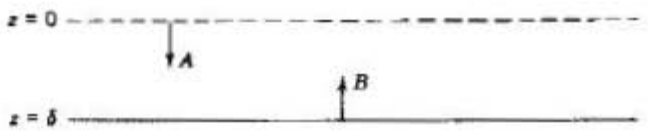
26.28 Un tanque que contiene agua tiene su parte superior abierta al aire. El tanque es cilíndrico y tiene un diámetro de 2 ft. El nivel del líquido se mantiene a 2 ft debajo de la parte superior del tanque, tal como se aprecia en la figura (a). ¿Cuántos moles de agua se pierden cada hora si se pasa aire caliente, a 100° F a lo largo de la parte superior del tanque?



Se propone añadir una parte superior de perfil trapezoidal tal como puede verse en el dibujo (b). ¿Cuál será la pérdida por hora en este caso si se hace pasar aire seco a 100° F a lo largo de la parte superior de este tanque?

26.29 Se quemaron unas esferas de carbón en una corriente de aire a presión atmosférica. El diámetro promedio de la esfera fue de 0.6 cm y la temperatura global del aire, de 1650 K. Calcule la rapidez teórica de combustión específica basándose en que la resistencia principal se presentó por medio de la difusión del oxígeno y en que:
a) solamente se formó monóxido de carbono
b) solamente se formó bióxido de carbono.

26.30 El siguiente dibujo representa la difusión en la fase gaseosa en la vecindad de una superficie catalizadora. La componente A se difunde a través de una película estancada a la superficie catalizadora, donde se



convierte instantáneamente en la especie B, por medio de la reacción

$$A \rightarrow B$$

Cuando la especie B se difunde en la película estancada, comienza a descomponerse de acuerdo con la reacción de primer orden:

$$B \rightarrow A$$

La rapidez de formación de la componente A es igual a:

$$R_A = k_1 y_B \qquad \text{moles producidos de } A/(\text{tiempo})(\text{volumen})$$

donde y es la concentración de B expresada como fracción molar.
a) Determine la rapidez con la cual entra A en la película de gas si es un proceso en estado permanente y si la reacción inversa

$$A \overset{k_1'}{\rightarrow} B$$

no ocurre en la película estancada que solamente contiene A y B.

$$A \underset{k_1}{\overset{k_1'}{\rightleftarrows}} B$$

ocurre dentro de la película.

26.31 Dos tanques de gas grandes a las mismas presión y temperatura están conectados por medio de un conducto circular de 6 in y 3 ft de longi-

tud. Uno de los tanques contiene una mezcla uniforme de 70 moles por ciento de amoniaco y 30 moles por ciento de aire y el otro tanque, una mezcla uniforme de 25 moles por ciento de amoniaco y 75 moles por ciento de aire. La temperatura del sistema es de 32° F y la presión de 1 atm. Determine la rapidez de transferencia del amoniaco entre ambos tanques, suponiendo una transferencia de masa en estado permanente.

26.32 Si los tanques descritos en el problema 26.31 hubieran estado conectados por medio de un conducto en forma de cono truncado, cuyos diámetros internos midieran 8 y 4 in, respectivamente, en los extremos ancho y angosto, determine la rapidez de transferencia del amoniaco entre los tanques. Suponga que el amoniaco se difunde a lo largo del conducto en la dirección de disminución del diámetro.

26.33 Un antiguo estudio de transferencia de masa acerca de la transferencia del oxígeno, le valió un premio Nobel a Augusto Krough. Viendo que un cilindro de tejidos circunda a cada una de las venas, propuso la idea de que la difusión del oxígeno que se aleja a la vena y entra en el tejido anular está acompañada de una reacción de orden cero, esto es, $R_A = -m$ donde m es una constante. Esta reacción se hacía necesaria para poder explicar el consumo metabólico de oxígeno para producir bióxido de carbono. Como se creía que los cilindros de tejido estaban ordenados en forma de manojo hexagonal, se sugirieron las siguientes condiciones de frontera:

en $r = R_1$, $p_A = p_{A_1}$, el valor de la presión promedio del oxígeno entre los extremos venoso y arterial del vaso sanguíneo

en $r = R_2$, $\dfrac{dp_A}{dr} = 0$, debido a que los cilindros vecinos de tejido tienen flujos idénticos de oxígeno

Determine el perfil de concentración, $p_A(r)$ y el flujo de oxígeno que entra al cilindro de tejido.

26.34 El compuesto A se transforma en el compuesto B en los "sitios activos", dentro de un catalizador esférico. La rapidez de desaparición de A en relación con la concentración de A en el catalizador, por medio de la reacción:

$$R_A = kac_A$$

donde a es el área superficial del catalizador por unidad de volumen del mismo. Encuentre una expresión que corresponda:

a) al perfil de concentración dentro del catalizador.

b) al flujo molar en la superficie $r = R$

en función de un "coeficiente de difusión efectiva", $D_{A,\text{eff}}$, de la concentración de A sobre la superficie, $C_{A,s}$, de la constante de rapidez de reacción, ka y del radio del catalizador, R.

26.35 Un tubo metálico enfriado de 3 in de diámetro se usa como condensador para extraer agua de una mezcla de agua, vapor y aire. En condiciones de estado permanente se forma una película líquida en el exterior del tubo; su espesor es equivalente a un coeficiente de película de transferencia de calor de 1500 Btu/h ft^2 °F. En un punto del condensador la temperatura de la superficie metálica es de 100° F y la mezcla de gas está a 200° F y a 1 atm de presión. Las fases gaseosa y líquida están en equilibrio en la superficie de la película de agua. El gas contiene 70 moles por ciento de vapor de agua. Si el vapor de agua se difunde por difusión molecular a través de una trayectoria cuya longitud es del 10% del tubo del radio, determine la rapidez de condensación del agua en libras por hora por pie de longitud del tubo.

27
DIFUSION MOLECULAR EN ESTADO NO PERMANENTE

Los procesos de transferencia, en los cuales la concentración en un punto determinado varía con el tiempo, se denominan *procesos en estado no permanente* o *procesos dependientes del tiempo*. Esta variación en la concentración se asocia con una variación del flujo de masa. Se pueden citar varios ejemplos comunes de transferencia en estado no permanente. Estos ejemplos se clasifican en dos categorías: el proceso que está en un estado no permanente solamente durante el comienzo y el proceso de lote o sea, la operación de sistema cerrado a lo largo de toda su duración.

En el capítulo 26 se estudiaron los problemas relacionados con la transferencia molecular de masa en estado permanente. Sin embargo, antes de poder alcanzar la condición de estado permanente, debe transcurrir algún tiempo después de iniciarse el proceso de transferencia de masa, antes de que desaparezcan completamente las condiciones transitorias. En las soluciones anteriores se supuso, sencillamente, que había transcurrido el período de transición y se habían alcanzado las condiciones de estado permanente.

En este capítulo se estudiarán los problemas relacionados con la difusión molecular en estado no permanente, así como sus soluciones. Las ecuaciones diferenciales dependientes del tiempo son fáciles de obtener a partir de la ecuación diferencial general de transferencia de masa. La ecuación de continuidad correspondiente a la componente A,

$$\nabla \cdot \mathbf{n}_A + \frac{\partial \rho_A}{\partial t} - r_A = 0 \qquad (25\text{-}5)$$

ó

$$\nabla \cdot \mathbf{N}_A + \frac{\partial c_A}{\partial t} - R_A = 0 \qquad (25\text{-}11)$$

contiene el término que depende del tiempo o término del estado no permanente. Por lo general la solución a estas ecuaciones diferenciales parciales es

difícil, e incluye técnicas matemáticas relativamente avanzadas. El estudio detallado de las matemáticas de la difusión va más allá de los límites de este libro; como excelente referencia acerca de la materia, se recomienda al lector un tratado escrito por Crank.* En las siguientes secciones de este capítulo se estudiarán algunos métodos para la solución de problemas prácticos de transferencia de masa en el estado permanente. Sin embargo, no entraremos en detalles matemáticos para obtener estas soluciones.

27.1 SOLUCIONES ANALITICAS

Aunque las ecuaciones diferenciales correspondientes a la difusión en el estado no permanente son fáciles de establecer, la mayoría de las soluciones a estas ecuaciones se han limitado a situaciones que incluyen geometrías y condiciones de frontera sencillas y un coeficiente constante de difusión. Muchas soluciones corresponden a la transferencia unidireccional de masa, tal como la define la segunda "ley" de Fick:

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = D_{AB}\frac{\partial^2 c_A}{\partial z^2} \tag{27-1}$$

Esta ecuación diferencial parcial describe una situación física en la que no existe ninguna contribución por parte del movimiento global, esto es, $v = 0$ y ninguna reacción química, o sea $R_A = 0$. Esta situación se tiene cuando la difusión tiene lugar en los sólidos, en los líquidos estacionarios o en los sistemas que cuentan con contradifusión equimolar. La ecuación (27-1) tiene una forma semejante a la de la segunda "ley" de Fourier en la conducción calorífica:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \tag{27-2}$$

estableciendo así una analogía entre la difusión molecular transitoria y la conducción de calor.

La solución a la segunda "ley" de Fick adopta, por lo general, una de dos formas estándar. Puede aparecer en forma de serie trigonométrica convergente para valores grandes de tiempo, o bien como una serie de funciones de error o de integrales relacionadas, con evaluación numérica posible para valores pequeños de tiempo. Estas soluciones se obtienen, usualmente, utilizando las técnicas matemáticas de: separación de variables o transformadas de Laplace.

Difusión transitoria en condiciones de resistencia superficial despreciable. El proceso más sencillo dependiente del tiempo se encuentra cuando un cuerpo se

*J. Crank, *Las Matemáticas de la Difusión*, Oxford Univ. Press, Londres, 1958.

ve sujeto a un cambio repentino en el medio circundante, el cual hace que su concentración superficial se transforme en $c_{A,s}$. Para comprender el método analítico utilizado en la solución de este tipo de problemas de difusión, pensemos en la forma en que se seca una lámina de madera de gran tamaño, cuyo grosor uniforme es L. Se supondrá que la distribución inicial de concentración a lo largo de la lámina es una función arbitraria de z. Este proceso de transmisión es análogo al calentamiento en condiciones de resistencia superficial despreciable, tal como se dijo en el capítulo 18.

La solución de la historia de la concentración debe satisfacer la ecuación (27-1), así como las siguientes condiciones iniciales y de frontera:

$$\begin{aligned} c_A &= c_{A_0}(z) && \text{en } t=0, \text{para } 0 \le z \le L \\ c_A &= c_{A,s} && \text{en } z=0, \text{para } t>0 \\ c_A &= c_{A,s} && \text{en } z=L, \text{para } t>0 \end{aligned}$$

Si las concentraciones se expresan en función de $Y=(c_A-c_{A,s})/(c_{A_0}-c_{A,s})$, que es el cambio no efectuado en la concentración. La ecuación diferencial parcial se transforma en:

$$\frac{\partial Y}{\partial t}=D_{AB}\frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} \tag{27-3}$$

con las siguientes condiciones iniciales y de frontera:

$$\begin{aligned} Y &= Y_0(z) && \text{en } t=0, \text{para } 0 \le z \le L \\ Y &= 0 && \text{en } z=0, \text{para } t>0 \\ Y &= 0 && \text{en } z=L, \text{para } t>0 \end{aligned}$$

La ecuación (18-10) de conducción de calor, análoga, se resolvió en el capítulo 18. La solución a la ecuación de transferencia transitoria de masa, será análoga a la (18-12).

$$Y=\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi z}{L}\right)e^{-(n\pi/2)^2X_D}\int_0^L Y_0\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi z}{L}\right)dz \tag{27-4}$$

donde X_D es la razón relacionada con el tiempo, $D_{AB}t/x_1^2$, donde x es la longitud característica de $L/2$. Si la lámina de madera tiene una concentración uniforme, $Y_0(z)=Y_0$, la distribución de concentraciones será análoga a la de la ecuación (18-13)

$$\frac{c_A-c_{A,s}}{c_{A_0}-c_{A,s}}=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi z}{L}\right)e^{-(n\pi/2)^2X_D}, \qquad n=1,3,5,\ldots \tag{27-5}$$

El flujo de masa, $N_{A,z}$, en cualquier plano de la lámina de madera, se puede evaluar por medio de la ecuación:

$$N_{A,z} = -D_{AB}\frac{\partial c_A}{\partial z} \tag{27-6}$$

En el caso de la lámina plana de longitud infinita con una distribución uniforme de concentración de c_{A_0}, el flujo de masa encualquier instante dado, t, es:

$$N_{A,z} = \frac{4D_{AB}}{L}(c_{A,s} - c_{A_0}) \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi z}{L}\right) e^{-(n\pi/2)^2 X_D}, \qquad n = 1, 3, 5, \ldots \tag{27-7}$$

Difusión transitoria en un medio semiinfinito. Otro caso importante de difusión transitoria de masa, susceptible de aceptar una solución analítica es la transferencia unidireccional de masa a un medio estacionario semiinfinito con una concentración superficial fija. Por ejemplo podría desearse describir la absorción de oxígeno del aire en la oxigenación de un lago o el proceso de difusión en la fase sólida incluida en el endurecimiento superficial del hierro dulce en una atmósfera carburante. En la figura 27.1 pueden observarse los perfiles de concentración al aumentar el tiempo en un medio semiinfinito, cuya concentración inicial era de c_{A_0} y que se sujetó a una concentración superficial constante de $c_{A,s}$.

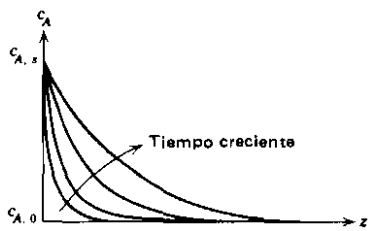


Figura 27.1 Difusión transitoria en un medio semiinfinito.

La ecuación diferencial que debe resolverse es:

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = D_{AB}\frac{\partial^2 c_A}{\partial z^2} \tag{27-8}$$

y las condiciones iniciales y de frontera, son:

$$c_A = c_{A_0} \quad \text{at } t = 0, \text{ para toda } z$$

$$c_A = c_{A,s} \quad \text{at } z = 0, \text{para toda } t$$

$$c_A = c_{A_0} \quad \text{as } z \to \infty, \text{para toda } t$$

La solución a este problema puede obtenerse en diversas formas, entre las cuales se cuentan la de las transformadas de Laplace y la de separación de

variables. El problema análogo de conducción de calor, que es el de la transferencia de calor a una pared semiinfinita, es el descrito por la ecuación (18-20) del capítulo 18. Por analogía se puede obtener, en forma inmediata, la solución al problema de difusión que nos ocupa

$$\frac{c_A - c_{A_0}}{c_{A,s} - c_{A_0}} = 1 - \text{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{D_{AB}t}}\right) \tag{27-9}$$

ó

$$\frac{c_{A,s} - c_A}{c_{A,s} - c_{A_0}} = \text{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{D_{AB}t}}\right)$$

La función de error que aparece en la solución a muchos problemas de transferencia en estado no permanente, tiene las siguientes propiedades:

$$\text{erf}\,(-\phi) = -\text{erf}\,\phi$$
$$\text{erf}\,(0) = 0$$
$$\text{erf}\,(\infty) = 1.0$$

En el Apéndice L aparece una lista de valores de erf ϕ. La ecuación (27-9) se utilizará para explicar el endurecimiento superficial del acero en el ejemplo siguiente:

EJEMPLO 1

Una pieza sobrecalentada de hierro dulce, cuya concentración inicial es de 0.20% por peso de carbono, se expone a una atmósfera carburante durante 1 h. En las condiciones del proceso, la concentración superficial del carbono es de 0.70%. Si la difusividad del carbono en el acero es de 1.0×10^{-11} m^2/seg, a la temperatura del proceso, determínese la composición del carbono a 0.01 cm, 0.02 cm y 0.04 cm bajo la superficie.

Como la concentración global en el hierro dulce es muy pequeña, su densidad puede considerarse constante, por lo cual:

$$\frac{c_{A,s} - c_A}{c_{A,s} - c_{A_0}} = \frac{\omega_{A,s} - \omega_A}{\omega_{A,s} - \omega_{A_0}} = \text{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{D_{AB}t}}\right)$$

$$= \frac{0.007 - \omega_A}{0.007 - 0.002} = \text{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{(1 \times 10^{-11}\ \text{m}^2/\text{s})(3600\ \text{s})}}\right)$$

$$= \frac{0.007 - \omega_A}{0.005} = \text{erf}\left(\frac{z}{3.79 \times 10^{-4}}\right)$$

ó

$$\omega_A = 0.007 - 0.005\ \text{erf}\left(\frac{z}{3.79 \times 10^{-4}}\right)$$

A la primera profundidad $z = 0.01$ cm $= 1 \times 10^{-4}$ m.

$$\text{erf}\left(\frac{z}{3.79\times10^{-4}}\right) = \text{erf}\left(\frac{1\times10^{-4}}{3.79\times10^{-4}}\right) = \text{erf}\,(0.264)$$

Si se consulta el Apéndice L, erf (0.264) = 0.291; entonces

$$w_A = 0.007 - 0.005(0.291) = 0.0055$$

o 0.55% de carbono.

A la segunda profundidad, $z = 0.02$ cm $= 2 \times 10^{-4}$ m,

$$\text{erf}\left(\frac{z}{3.79\times10^{-4}}\right) = \text{erf}\,(0.528) = 0.545$$

$$\omega_A = 0.007 - 0.005(0.545)$$

$$= 0.0043 \text{ or } 0.43\% \text{ carbón}$$

Y a la tercera profundidad, $z = 0.04$ cm $= 4 \times 10^{-4}$ m

$$\text{erf}\left(\frac{z}{3.79\times10^{-4}}\right) = \text{erf}\,(1.055) = 0.866$$

$$\omega_A = 0.007 - 0.005(0.866)$$

$$= 0.0027 \text{ or } 0.27\% \text{ carbón}$$

27.2 TABLAS DE TIEMPOS DE CONCENTRACION CORRESPONDIENTES A ALGUNAS FORMAS GEOMETRICAS SIMPLES

En las soluciones analíticas que se obtuvieron, el cambio no realizado, Y, se encontró que es una función del tiempo relativo, X_D. Las soluciones matemáticas de la transferencia de masa en el estado no permanente, en diversas formas simples con ciertas condiciones restrictivas de frontera, se han presentado en una gran cantidad de tablas para facilitar su uso. En el Apéndice aparecen dos formas de tablas como éstas.

Las tablas de "Gurney-Lurie" contienen las soluciones correspondientes a la placa plana, a la esfera y al cilindro largo. Como las ecuaciones diferenciales de conducción de calor y de difusión molecular son análogas, estas tablas se pueden utilizar en la solución de cualquiera de estos fenómenos de transferencia. Para la difusión molecular, las tablas están en función de cuatro razones adimensionales:

$$Y = \text{cambio no realizado de concentración} = \frac{c_{A,s} - c_A}{c_{A,s} - c_{A_0}}$$

$$X_D = \text{tiempo relativo} = \frac{D_{AB}t}{x_1^2}$$

$$n = \text{posición relativa} = \frac{x}{x_1}$$

$$m = \text{resistencia relativa} = \frac{D_{AB}}{k_c x_1}$$

La longitud característica, x_1, es la distancia del punto medio a la posición de interés. La resistencia relativa, m, es la razón de la transferencia convectiva de masa a la resistencia molecular interna a la transferencia de masa.

Estas tablas se pueden utilizar en la evaluación de los perfiles de concentración en los casos que incluyan la transferencia molecular de masa hacia, así como desde, los cuerpos de las formas especificadas cuando se satisfagan las condiciones siguientes:

a) Se supone la segunda ley de Fick de difusión, esto es: movimiento nulo del fluido, $v = 0$, no hay término de producción, $R_A = 0$ y una difusividad constante de la masa.
b) El cuerpo tiene una concentración inicial uniforme,
c) La frontera se encuentra sujeta a una nueva condición que permanece constante en el tiempo.

En las formas en que la transferencia tiene lugar sólo desde una de las caras, las razones adimensionales se calculan como si el espesor fuera del doble de su valor real; esto es: en una placa de espesor $2a$, el tiempo relativo, X_D, se toma como: $D_{AB}t/4a^2$.

Aunque las tablas se hicieron para la transferencia unidimensional, se pueden cambiar para producir soluciones correspondientes a las transferencias bidimensional y tridimensional. En dos dimensiones, Y_a calculada con el ancho, $x_1 = a$, e Y_b calculada con la profundidad, $x_1 = b$, se combinan para dar como resultado:

$$Y = Y_a Y_b \tag{27-10}$$

En seguida aparece un resumen de estas soluciones combinadas:

1. La correspondiente a la transferencia desde una barra rectangular con los extremos sellados es:

$$Y_{\text{bar}} = Y_a Y_b \tag{27-11}$$

donde Y_a se calculó tomando un ancho $x_1 = a$, e Y_b, con un espesor $x_1 = b$.

2. La correspondiente a la transferencia desde un paralelepípedo rectangular,

$$Y_{\text{paralelepípedo}} = Y_a Y_b Y_c \tag{27-12}$$

donde Y_a se evaluó con un ancho $x_1 = a$, Y_b con $x_1 = b$, con un espesor $x_1 = c$.

3. La que corresponde a la transferencia desde un cilindro, incluyendo ambos extremos,

$$Y_{\text{cilindro más extremos}} = Y_{\text{cilindro}} Y_a \tag{27-13}$$

En el siguiente ejemplo se demostrará la manera de utilizar estas tablas.

EJEMPLO 2

Una lámina gruesa de madera, cuyas dimensiones son 12 in × 12 in × 1 in se coloca expuesta al aire relativamente seco. Los bordes se encuentran sellados inicialmente para limitar el proceso de secado a las caras planas y grandes de la lámina. El líquido interior se difunde a la superficie, donde se evapora incorporándose a la corriente de aire que pasa. El contenido de humedad de la superficie permanece constante a 7% por peso. Después de 10 h de secado, el contenido de humedad del centro disminuye de 15 a 10% por peso. Si se puede considerar el coeficiente de transferencia convectiva de masa, de un valor suficientemente grande como para que la resistencia m, sea esencialmente igual a cero, calcúlese:

a) El coeficiente efectivo de difusión.
b) El contenido de humedad del centro, cuando se utilicen las seis caras en el mismo período de secado.
c) El tiempo necesario para hacer descender el contenido central de humedad de un cubo de 1 ft por lado de la misma madera, de 15 a 10% por peso si se utilizan las seis caras. Supóngase que el coeficiente de difusión efectiva calculado en el inciso (a) es constante en todo el cubo.

Como el cambio de concentración es pequeño en un período grande, se supondrá que la densidad de la madera es básicamente constante en un período diferencial de tiempo. Por lo tanto, la segunda ley de Fick describirá la operación de secado. Las concentraciones se pueden convertir en los términos de c_A a los utilizados usualmente en el secado, esto es, la humedad por unidad de masa de sólido seco, multiplicando cada término de c_A por el peso molecular de A y dividiendo entre el peso del sólido seco por unidad de volumen. Al hacer esto, cada término de c_A estará expresado en función de una base que permanece constante en todo el proceso de secado. La razón de concentración no efectuada, Y, se transforma en $(W_{A,s} - W_A)/(W_{A,s} - W_{A0})$,de W_A representa el contenido de humedad expresado en masa de agua por masa de sólido seco. El cambio no efectuado en el caso (a) se calcula así:

$$W_{A,s} = \frac{0.07}{1-0.07} = 0.075 \text{ lb}_m \text{ agua } / \text{lb}_m \text{ madera seca}$$

$$W_{A0} = \frac{0.15}{1-0.15} = 0.176 \text{ lb}_m \text{ agua } / \text{lb}_m \text{ madera seca}$$

$$W_A = \frac{0.10}{1-0.10} = 0.111 \text{ lb}_m \text{ agua } / \text{lb}_m \text{ madera seca}$$

$$Y = \frac{W_{A,s} - W_A}{W_{A,s} - W_{A0}} = \frac{0.075 - 0.111}{0.075 - 0.176} = 0.356$$

La composición deseada, W_A es la concentración de humedad en el centro, en $x = 0$. La posición relativa correspondiente, n, es $x/x_1 = 0$. La resistencia relativa, m, se estipuló que sería cero. Si se consulta la figura F. 7 del apéndice, cuando $Y = 0.356$ $n = 0$ y $m = 0$, el tiempo relativo, X_D es igual a 0.51. Como el secado tiene lugar desde ambas caras, $x = 1/24$ ft; entonces:

$$D_{AB} = \frac{X_D x_1^2}{t} = \frac{(0.51)(\frac{1}{24}\text{ ft})^2}{(10\text{ hr})} = 8.85 \times 10^{-5}\text{ ft}^2/\text{hr} \qquad (2.29 \times 10^{-9}\text{ m}^2/\text{s})$$

b) Cuando las otras caras también se usan para secar, se deben calcular los cambios no efectuados. Tanto para $X_{D,a}$, como para $X_{D,b}$, la mitad del espesor, x_1 es 1/2 pie; el tiempo relativo correspondiente a ambos bordes es:

$$X_D = \frac{D_{AB}t}{x_1^2} = \frac{(8.85 \times 10^{-5}\text{ ft}^2/\text{hr})(10\text{ hr})}{(\frac{1}{2}\text{ ft})^2} = 0.003$$

En una lámina gruesa, cuando $X_D = 0.003$, $n = 0$ y $m = 0$, Y vale aproximadamente, 1.0; entonces:

$$Y_{\text{paralelepípedo}} = Y_a Y_b Y_c = (1.0)(1.0)(0.356) = 0.356$$

y

$$W_A = 0.111\text{ lb}_m\text{ agua /lb}_m\text{ madera seca}$$

Esta solución simplifica la importancia tan pequeña que tienen los bordes en una lámina grande y delgada.

c) En el cubo de 1 pie por lado, en el cual se está transfiriendo masa desde las seis caras, el cambio no efectuado es:

$$Y = Y_a Y_b Y_c = Y_a^3$$

En este caso:

$$Y_a = Y^{1/3} = (0.356)^{1/3} = 0.708$$

$$x_1 = 0.5\text{ ft}$$

$$n = x/x_1 = 0$$

y

$$m = 0$$

y observando la figura F. 7, se verá que $X_D = 0.23$. Por lo tanto,

$$t = \frac{X_D x_1^2}{D_{AB}} = \frac{(0.23)(0.5\text{ ft})^2}{(8.85 \times 10^{-5}\text{ ft}^2/\text{hr})} = 650\text{ hr} \quad (2.34 \times 10^6\text{ s})$$

27.3 SOLUCION GRAFICA CORRESPONDIENTE AL FLUJO UNIDIRECCIONAL TRANSITORIO DE MASA: LA GRAFICA MODIFICADA DE SCHMIDT

En esta sección se modificará el método gráfico que se presenta en el capítulo 18 para resolver problemas de conducción de calor inestable y se

aplicará el método para difusión molecular transitoria. Esta técnica, la gráfica de Schmidt, se basa en el uso del cálculo de diferencias finitas para resolver la segunda ley de Fick de difusión.

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = D_{AB}\frac{\partial^2 c_A}{\partial z^2} \tag{27-1}$$

La exactitud de esta técnica depende del número de aproximaciones usadas en la obtención de la solución. Este método gráfico es muy flexible y produce soluciones a los problemas que no siempre pueden resolverse de manera conveniente por métodos analíticos.

Pensemos en una pared de espesor infinito que tiene una superficie en la que la concentración de la componente A es constante en $c_{A,s}$. La concentración inicial dentro de la pared es c_{A_0}. La figura 27.2 muestra la distribución de la concentración para $t = 0$, por medio de una línea continua.

La pared está dividida en capas, cada una de ellas de un espesor Δz. Cada una de las capas tiene en la parte superior de la gráfica un entero y las capas están numeradas empezando desde la superficie, donde la concentración es

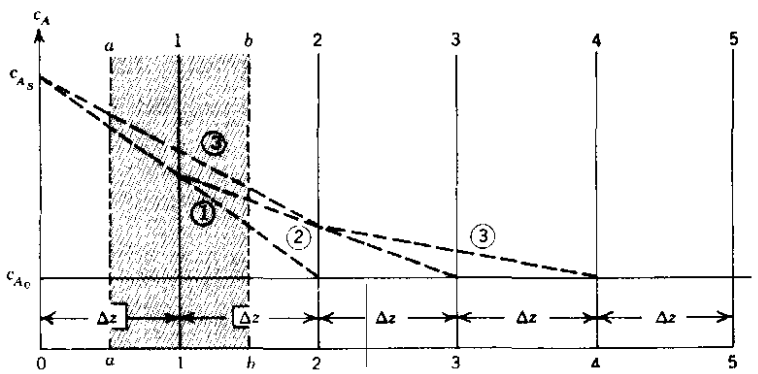


Figura 27.2 Gráfica de Schmidt en una pared de espesor infinito.

$c_{A,s}$. Estas líneas se denominan lineas de referencia de la concentración. Después de un corto intervalo de tiempo, Δt_1, la masa fluirá hacia el plano 1 a causa de la fuerza impulsora $c_{A,s} - c_{A_0}$. Si la fuerza impulsora entre los planos 1 y 2 continúa siendo igual a cero en este intervalo de tiempo, se acumulará masa en la capa sombreada ab, que se extiende $\Delta z/2$ a la izquierda y a la derecha del plano 1. Si se escribe un balance de la masa en el intervalo de tiempo Δt_1 con base en un área unitaria, se obtendrá:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Flujo de masa hacia}\\ \text{el plano de referencia 1}\\ \text{de la concentración,}\\ \text{durante } \Delta t_1\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{l}\text{flujo de masa del}\\ \text{plano 1 durante}\\ \Delta t_1\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\text{acumulación de}\\ \text{masa en la capa}\\ ab \text{ durante } \Delta t_1\end{array}\right\}$$

o sea:

$$\frac{D_{AB}(c_{A_3}-c_{A_1})}{\Delta z}-\frac{D_{AB}(c_{A_1}-c_{A_2})}{\Delta z}=\frac{\Delta z}{\Delta t_1}(c_{A_1}'-c_{A_1}) \tag{27-14}$$

donde c_{A_1}' es la nueva concentración en el plano de referencia 1 al finalizar el intervalo Δt_1.

Si se divide cada uno de los términos de la ecuación (27-14) entre D_{AB}/A_z, se simplifica la ecuación:

$$\frac{(\Delta z)^2}{D_{AB}\Delta t_1}(c_{A_1}'-c_{A_1})=c_{A_3}-2c_{A_1}+c_{A_2} \tag{27-15}$$

La técnica numérica desarrollada en la sección 18.3 para resolver problemas de conducción en estado no permanente se puede aplicar también a la transferencia transitoria de masa. La semejanza de estos dos fenómenos nos permite escribir la ecuación de transferencia unidireccional de masa, que es análoga a la ecuación (18-25)

$$\frac{D_{AB}}{\Delta z}(c_{A,i-1}|_t+c_{A,i+1}|_t-2c_{A,i}|_t)=\frac{(c_{A,i}|_{t+\Delta t}-c_{A,i}|_t)\,\Delta z}{\Delta t} \tag{27-16}$$

que se simplifica, quedando:

$$\frac{(\Delta z)^2}{D_{AB}\,\Delta t_1}(c_{A_1}|_{t+\Delta t_1}-c_{A_1}|_t)=c_{A,3}|_t-2c_{A_1}|_t+c_{A_2}|_t \tag{27-17}$$

La ecuación (27-17) es equivalente a la (27-15) y a la (18-26), que se obtuvo en relación con la conducción unidimensional transitoria de calor.

La razón adimensional, $D_{AB}\,\Delta t/(\Delta z)^2$, se asemeja al módulo de Fourier correspondiente a la conducción de calor. Esta razón es de suma importancia en la obtención de la solución ya que relaciona el incremento del tiempo con el tamaño del nodo, Δz. Se seleccionarán Δz y Δt, de tal modo que:

$$\frac{D_{AB}\,\Delta t}{(\Delta z)^2}=\frac{1}{2} \tag{27-18}$$

o, en función de Δt, esto es:

$$\Delta t=\frac{(\Delta z)^2}{2D_{AB}} \tag{27-19}$$

Esto permite la simplificación conveniente de la ecuación (27-15) resultando:

$$c_{A_1}'=\frac{c_{A_3}+c_{A_2}}{2} \tag{27-20}$$

Al escoger Δz y Δt se ha eliminado c_{A_1}, y la nueva concentración, c_{A_1}', es, simplemente, igual a la media aritmética de la concentración en los planos

adyacentes. La recta ① que une $c_{A,s}$ y c_{A_2} permite localizar a c_{A_1}' en el punto en que la línea ① intersecta al plano 1.

De la misma manera, se puede demostrar que la concentración en cualquier plano de referencia en el tiempo $(n+1)\,\Delta t$ es la media aritmética de las concentraciones de los planos adyacentes calculada en Δt, o:

$$c_{A,i}{}^{n+1} = \frac{c_{A,i-1}{}^{n} + c_{A,i+1}{}^{n}}{2} \tag{27-21}$$

donde el superíndice n se refiere al número de Δt intervalos y el subíndice i se refiere al plano de referencia de la concentración.

Se puede continuar la explicación para intervalos adicionales de tiempo, utilizando la ecuación (27-21). La figura 27.2 muestra la técnica gráfica. Para el segundo intervalo de tiempo Δt_2, se traza la línea ② entre la concentración c_{A_1}' en la línea de referencia 1 y c_{A_0} en la línea de referencia 3. Esta intersecta a la línea de referencia 2 en la concentración c_{A_2}''. Para el tercer intervalo de tiempo, Δt_3, se trazan dos líneas una entre ③ y la nueva $c_{A,s}$ en la línea de referencia 2 y una entre c_{A_2}'' y c_{A_0} en la recta de referencia 4. Estas rectas indican que la concentración en las líneas 1 y 3 será c_{A_1}''' y c_{A_3}''' al final del tercer intervalo de tiempo. Se puede continuar el mismo procedimiento en intervalos de tiempo adicionales. Es importante percatarse de que los valores constantes de Δz y Δt se usan en toda la solución

La rapidez de flujo de masa por unidad de área en cualquier instante, $N_{A,z}{}^{n}$ se puede obtener a partir de la pendiente del perfil de la concentración entre la superficie y la línea de referencia 1. La expresión algebraica es:

$$N_{A,z}{}^{n} = \frac{D_{AB}(c_{A,s} - c_{A_1}{}^{n})}{\Delta x} \tag{27-22}$$

Esta técnica gráfica tan conveniente se basa en la suposición de que el coeficiente de difusión es constante y en que el cuerpo posee inicialmente, un perfil conocido de concentración. La solución resultante es una buena aproximación a las soluciones analíticas más rigurosas de la segunda "ley" de Fick de la difusión. Su exactitud puede mejorarse utilizando subdivisiones más pequeñas de Δz.

El método de Schmidt se puede aplicar a cualquier condición inicial. Como ejemplo pensemos de nuevo en la lámina gruesa de madera del ejemplo 2.

EJEMPLO 3

Una lámina gruesa de madera de 12 in X 12 in X 1 in., se expone al aire relativamente seco. Sus bordes están sellados para limitar el proceso de secado a las caras grandes y planas de la madera. El líquido interno se difunde a la superficie, donde se evapora transfiriéndose a la corriente de aire que pasa. Inicialmente el contenido de humedad de la madera es de 35% de peso. Durante la operación de secado, el contenido de humedad de la superficie permanece constante, en un 7.0% de peso. Determínese el contenido central de humedad después de 4.4 h, si el coeficiente efectivo de difusión es de 8.68×10^{-6} ft^2/h.

Las concentraciones correspondientes con base en la parte seca son:

$$c_{A_0}' = \frac{0.35}{1-0.35} = 0.539 \text{ lb}_m \text{ agua /lb}_m \text{ madera seca}$$

y

$$c_{A,i}' = \frac{0.07}{1-0.07} = 0.075 \text{ lb}_m \text{ agua /lb}_m \text{ madera seca}$$

El incremento de longitud, Δz, se escogió de 0.1 in. Por lo tanto, debido a la ecuación (27-19), el incremento de tiempo es:

$$\Delta t = \frac{(\Delta z)^2}{2D_{AB}} = \frac{(0.1 \times \frac{1}{12} \text{ ft})^2}{(2)(8.68 \times 10^{-5} \text{ ft}^2/\text{hr})} = 0.4 \text{ hr}$$

El número requerido de intervalos de tiempo es 4.4/0.4 o sea, 11. En la figura 27.3 se muestra la gráfica de Schmidt correspondiente a este problema. El contenido central de humedad, después de 4.4 h de secado, es igual a 0.4 lb_m agua/lb_m madera seca (0.4 kg de agua/kg madera seca).

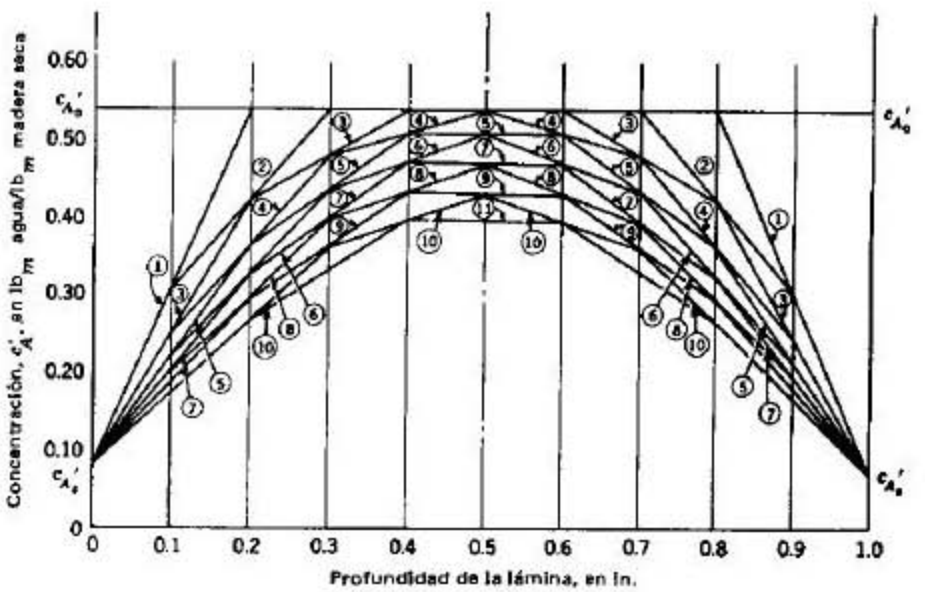


Figura 27.3 Gráfica de Schmidt correspondiente al ejemplo 3.

27.4 CONCLUSION

En este capítulo se ha estudiado la difusión molecular en estado no permanente. Las ecuaciones diferenciales parciales que describen los procesos transitorios se obtuvieron a partir de la ecuación diferencial general de transferencia de masa. Sin embargo, la mayor parte de las soluciones a estas ecuaciones diferenciales requirió el uso de matemáticas avanzadas más allá del

alcance de este texto. Se presentaron dos clases de soluciones a la segunda "ley" de Fick de la difusión. Se introdujeron asimismo, tablas para la solución de problemas de transferencia molecular en estado no permanente y se presentó una gráfica modificada de Schmidt para la solución gráfica de un flujo unidireccional y transitorio de masa.

PROBLEMAS

27.1 La evaluación de la rapidez de difusión en los metales es un problema metalúrgico muy importante. Para medir el coeficiente de difusión se aplica una capa delgada del soluto particular al extremo de una barra permitiéndole difundirse en ésta. Después de un intervalo de tiempo apropiado, se quitan algunas secciones delgadas paralelas a la interfase inicial. Estas secciones de espesor constante se analizan apra descubrir la concentración del soluto. Ahora se utiliza esta técnica con un indicador radiactivo como soluto en difusión ya que la concentración del indicador se puede determinar con mucha mayor precisión que utilizando el análisis químico. Un trozo de corta longitud de una aleación de cobre y 5% de níquel se agregó a una barra de cobre puro. Después de 100,000 seg, se tomaron secciones paralelas al plano de unión con la ayuda de un torno. Cada una de estas secciones se analizó para determinar su contenido de níquel. Al fijar arbitrariamente la distancia de la última sección, sin contenido de níquel, como cero, se obtuvieron las siguientes composiciones promedio para la sección particular:

% Níquel	0.10	0.21	0.41	0.67	1.05	1.31	1.96
z', distancia, al principio de la sección, en pulg.	0.000	0.002	0.004	0.006	0.008	0.010	0.012

% Níquel	2.52	3.05	3.69	4.02	4.32	4.63	4.82	4.92
z'	0.014	0.016	0.018	0.020	0.022	0.024	0.026	0.028

a) Demuestre que la siguiente expresión satisface la segunda ley de Fick y las condiciones de frontera del proceso de difusión,

$$c_A = \frac{M}{\sqrt{4\pi D_A t}} e^{-z^2/4D_A t}$$

donde c_A es la concentración del soluto en difusión, M es la cantidad de soluto aplicado al extremo de la barra, t es el tiempo, z la distancia en dirección normal a la película inicial de soluto.

b) Evalúe el coeficiente de difusión, suponiendo que D_A es independiente de la composición.

c) ¿Existe alguna evidencia que indique si D_A es o no independiente de la composición?

27.2 La concentración superficial de un gran lago, cuya concentración inicial de oxígeno era uniforme y de 1 kg/m^3, aumentó repentinamente y se mantuvo a un nivel de concentración de 9 kg/m^3. Dibuje el perfil de la concentración, c_A (z), correspondiente al período de:

a) 4000 seg.

b) 100,000 seg.

c) 1,000,000 seg.

si el lago se encuentra a 283 K.

27.3 Una hoja de acero con una concentración inicial de carbono de 0.20% se expone a 1,200 K por 3,600 seg. a un gas cuya concentración en la superficie del acero es de 0.50% de carbono. Encuentre la concentración de carbono para $z = 0.1$ mm., 0.2 mm y 0.4 mm. La difusividad del carbón en el acero es de 1×10^{-11} m^2/seg. a 1,200 K.

27.4 Trace una curva que muestre la razón de la concentración correspondiente al hidrógeno,

$$\frac{c_A - c_{A_1}}{c_{A_0} - c_{A_1}}$$

en función de la distancia mientras se difunde en una hoja delgada de hierro dulce de 6 mm de espesor. La difusividad del hidrógeno es igual a $1.6 \times 10^{-2}\, e^{-9200/RT}$ cm^2/seg, donde T está en K y $R = 1.98$. Se exponen algunas muestras de la hoja de acero al hidrógeno a 1 atmósfera de presión y 500° C por período de:

a) 1 min.

b) 1 hora

c) 1 día

27.5 Calcule la profundidad bajo la superficie de una placa de hierro dulce a la cual se puede esperar que tal concentración de carbono disminuya a la mitad de su valor inicial como resultado de su exposición a condiciones fuertemente descarburantes a 1,200 K para: (a) 7,200 seg y (b) 36,000 seg, si la difusividad del carbono en acero a 1,200 K es de 1.0×10^{-11} m^2/seg.

27.6 Un camión cisterna se vuelca derramando herbicida sobre un campo. Si la difusividad de la masa del fluido en la tierra es de 1×10^{-8} m^2/seg y el fluido permanece sobre el terreno durante 1,800 seg antes de evaporarse al aire, determine la profundidad a la que es probable que se destruya la vida animal y vegetal, si una concentración de 0.1% por peso, es capaz de destruir casi toda forma de vida.

27.7 Una lámina gruesa de barro de 2 in de espesor se secó en ambas superficies, planas, con los cuatro bordes delgados sellados por la exposición al aire seco. El contenido inicial de humedad era de 15% por peso. En

las condiciones específicas de secado, éste estaba controlado por la difusión interna de agua líquida a la superficie. El contenido superficial de humedad fue constante en todo el proceso, en 4% por peso. En 5 horas el contenido central de humedad había caído a 10% por peso. Si la resistencia relativa en la superficie era, esencialmente cero, calcule:

a) la difusividad efectiva

b) en las mismas condiciones de secado, el tiempo necesario para reducir el contenido de humedad central a 5% por peso.

c) el tiempo necesario para que el contenido central de humedad de una esfera de barro de 6 in de radio descienda de 15% por peso a 6% por peso, bajo las mismas condiciones de secado.

d) el tiempo necesario para disminuir el contenido de humedad de un cilindro de barro de 1 ft de longitud y 6 in de diámetro de 15% a 6% por peso, bajo las mismas condiciones de secado.

27.8 Grafique el perfil de concentración de humedad en la lámina y en la esfera del problema 27.7 después de 10 h de secado.

27.9 Una esfera porosa se satura con etanol. El espacio vacante en el sólido aporta los poros suficientes para que pueda tener lugar la difusión molecular a través del líquido del paso. La esfera se deja caer dentro de un depósito grande de agua pura, bien agitada, a 10° C. Si la difusividad efectiva es de 5.0×10^{-7} cm^2/seg, calcule la concentración de etanol en el centro de la esfera después de 50 h.

27.10 El perfil de la concentración, resultante de la difusión transitoria desde una hoja grande de madera en condiciones de resistencia superficial despreciable, se describió por medio de la ecuación (27-5). Use esta ecuación para evaluar y graficar el perfil de concentración media adimensional, $(\bar{c}_a - c_{A,s})/(c_{A_0} - c_{A,s})$ en función de la razón adimensional de tiempo relativo, X_D.

27.11 Un trozo de carbón, de forma aproximadamente esférica, con un radio de 3 cm, posee un contenido inicial de humedad de 500 kg/m^3. Se le coloca en un secador de aire que produce una concentración superficial de humedad de 1 kg/m^3. Si la difusividad del agua en el carbón es de 1.3×10^{-6} m^2/seg y la resistencia superficial es despreciables, calcule el tiempo requerido para secar el centro del carbón hasta tener una concentración de 50 kg/m^3.

27.12 Una placa de barro de 2 in de espesor se secó solamente de una de sus caras, con sus cuatro bordes delgados sellados debido a su exposición al aire seco. El contenido inicial uniforme era de 15% por peso. Durante la operación de secado, el contenido superficial de humedad permaneció constante, a 3% por peso. La difusividad del agua a través del barro se calcula que es de 5.0×10^{-4} ft^2/h. Determine el intervalo de tiempo necesario para hacer descender el contenido de humedad en el centro de la placa a 10% por peso si la resistencia relativa a la transferencia de masa en la superficie era en la superficie esencialmente igual a cero.

27.13 Determine el lapso de tiempo necesario para hacer descender el contenido promedio de humedad de la placa descrita en el problema 27.12, a 10% por peso, si la resistencia relativa a la transferencia de masa en la superficie era esencialmente igual a cero.

27.14 En un esfuerzo para mantener frescas las flores en un desfile del Festival de las Rosas, un florista propuso que se hicieran sujetadores individuales de poliuretano poroso. Una esfera porosa de este material, de 1/4 in de diámetro se va a saturar inicialmente con agua. El agua se difundirá a la superficie, donde se evaporará rápidamente, incorporándose al aire seco circundante que se encuentra a 75° F. La transferencia de masa del agua será controlada por la rapidez de difusión en la esfera. Si la difusividad efectiva a través de la esfera porosa es de un décimo del valor de la difusividad del vapor de agua en el aire, determine el tiempo requerido para reducir el contenido de humedad del centro de la esfera, de 0.2 a 0.1% de humedad por peso.

27.15 El rodillo de roble de una podadora de pasto, cuyo contenido inicial de humedad es de 35% por peso, se coloca en un horno en el que su contenido superficial de humedad se mantiene a 3% por peso. Si el contenido máximo de humedad del rodillo seco se fija en 15% por peso, ¿cuánto tiempo debe haber transcurrido desde que se secó el rodillo, de 4 in de diámetro por 18 in de longitud, cuando:

a) los extremos del rodillo quedan sellados por una barrera de vapor

b) la superficie del cilindro queda sellada por una barrera de vapor

c) el secado se extiende a toda la superficie?

La resistencia superficial puede suponerse despreciable y la difusividad de la humedad en el roble es de 4.0×10^{-5} ft^2/h.

27.16 Una tabla de pino blanco, de 5 cm de espesor, tiene un contenido de 20% de humedad por peso al principio del proceso de secado. El contenido de humedad en equilibrio es de 5% por peso en las condiciones de humedad del aire que está realizando el proceso de secado. Tanto los extremos como los bordes están cubiertos con una capa impermeable para evitar la evaporación. Si la difusividad del agua en el pino es de 1×10^{-9} m^2/seg y la resistencia superficial es igual a la resistencia interna a la difusión, determine, por medio de una gráfica modificada de Schmidt el tiempo necesario para reducir el contenido de humedad en el eje central, a 10% por peso.

27.17 Determine el tiempo necesario para reducir el contenido de humedad de la tabla de pino blanco descrita en el problema 27.16 a 10% por peso, usando las tablas de estado no permanente.

27.18 Se va a secar un cilindro de barro de 1 pie de longitud y 6 in de diámetro, en una corriente de aire seco. La composición inicial uniforme es de 14% por peso y la composición final deseada será de 7% por peso. En las condiciones especificadas de secado, éste estará controlado por la difusión interna de agua líquida a la superficie. La difusividad del

agua en el barro se calcula que es de 5.0×10^{-4} ft^2/h. El contenido superficial de humedad permanecerá constante a través de todo el proceso, a 3% por peso. Determine el tiempo requerido para la operación de secado, si éste último se realiza desde:

a) los lados del cilindro, únicamente

b) los lados y los extremos del cilindro

27.19 Se utiliza una corriente de aire a gran velocidad, 80° F y una humedad relativa de 50% , para secar una tabla de madera de 2 pulg de espesor. Los cuatro bordes delgados, así como los extremos están cubiertos con una capa impermeable para evitar la evaporación. El contenido de humedad en equilibrio de la madera en contacto con la corriente de aire, es de 3% por peso. La difusividad del agua en la madera se puede suponer que es de 4.0×10^{-5} ft^2/h. Al principio del proceso de secado, el contenido promedio de humedad es de 25% por peso. Si la resistencia superficial es igual a la resistencia interna a la difusión, calcúlese el contenido de humedad en el eje central después de

a) 50 h

b) 100 h

c) 150 h

27.20 Una lámina gruesa de pino Douglas, de 5 cm de espesor, tiene un contenido de humedad de 30% por peso al principio del proceso de secado. El contenido de humedad de equilibrio es de 5% de humedad en las condiciones de humedad del aire que efectúa el secado. Los extremos y bordes están cubiertos con una capa impermeable. Suponga que la resistencia relativa a la transferencia de masa en la superficie es despreciable y que la difusividad del agua en el pino es de 4×10^{-5} ft^2/h. Determine el tiempo de secado requerido para reducir el contenido de humedad del eje central a 15% por peso, mediante el uso de

a) las tablas de estado no permanente

b) una gráfica modificada de Schmidt.

28
TRANSFERENCIA CONVECTIVA DE MASA

La transferencia de masa por convección es la que se realiza entre una superficie límite y un fluido en movimiento o entre dos fluidos en movimiento, relativamente no miscibles. La ecuación de rapidez correspondiente a la transferencia de masa ya ha sido expresada anteriormente en la forma:

$$N_A = k_c \, \Delta c_A \tag{24-52}$$

en la que el flujo de masa, N_A, se lleva a cabo en la dirección en la que disminuye la concentración. Esta sencilla ecuación es la relación que define a k_c, que es el *coeficiente de transferencia convectiva de masa*. Es análogo a la ecuación que define el coeficiente de transferencia convectiva de calor:

$$q/A = h \, \Delta T \tag{15-11}$$

Si se hace memoria, se recordará que el estudio para encontrar el coeficiente de transferencia de calor que se hizo en el capítulo 15, no fue una empresa fácil. Ambos coeficientes de transporte están relacionados con las propiedades del fluido, con sus características dinámicas y con la geometría del sistema específico bajo estudio.

A causa de la estrecha semejanza entre las ecuaciones de transferencia convectiva de calor y de masa, es de esperarse que el coeficiente de transferencia de calor del capítulo 19 se pueda aplicar al coeficiente de transferencia de masa y esto es, precisamente, lo que se hará en los análisis siguientes. Se hará un uso considerable de las secuelas y conceptos de los capítulos 9 a 14.

28.1 CONSIDERACIONES FUNDAMENTALES ACERCA DE LA TRANSFERENCIA CONVECTIVA DE MASA

Se recordará el estudio anterior referente a un fluido escurriendo alrededor de una superficie, que existe una capa, a veces delgada, cerca de la super-

ficie en la que el flujo es laminar. Por lo tanto, la transferencia molecular de masa siempre estará presente y siempre tendrá un papel importante en cualquier proceso de convección. Si el flujo de fluido es laminar, entonces toda la transferencia entre la superficie y el fluido en movimiento se llevará a cabo por medios moleculares. Si por otra parte, el flujo de fluido es turbulento, habrá un movimiento físico de paquetes de materia a lo largo de las líneas de flujo transportadas por los remolinos presentes en el flujo turbulento. Así como en el caso de la transferencia de calor, a una gran rapidez de transferencia de calor se asocian condiciones turbulentas. La distinción entre los flujos laminar y turbulento será de vital importancia en cualquier situación convectiva.

La capa límite hidrodinámica que se analizó en el capítulo 12, tiene un papel muy importante en la transferencia convectiva de masa. También se definirá y analizará una capa límite de concentración que resultará vital para el análisis del proceso de transferencia convectiva de masa. Esta capa es similar, pero no necesariamente del mismo espesor que la capa térmica límite que se estudió en el capítulo 19.

Cuando la transferencia de masa incluye a un soluto que se disuelve con rapidez constante desde una superficie sólida y después se difunde a un fluido en movimiento, el coeficiente de transferencia convectiva de masa se define así:

$$N_A = k_c(c_{A,s} - c_A) \tag{28-1}$$

En esta ecuación, el flujo N_A representa los moles de soluto A que abandonan la intercara por unidad de tiempo y por unidad de área interfacial. La composición del soluto en el fluido, en la intercara, $c_{A,s}$, es la composición del fluido en equilibrio con el sólido a la temperatura y presión del sistema. La cantidad c_A, representa la composición en algún punto dentro de la fase fluida. Cuando se define la capa límite de la concentración, se puede escoger a c_A como la concentración de la componente A en el borde de la capa límite y se le puede llamar c_{A_∞}. Si el flujo tuviera lugar en un conducto cerrado, la composición, c_A, podría ser la *concentración global o concentración de mezcla homogénea*. La composición de mezcla homogénea es la concentración que se mediría si se recogiera y se mezclara perfectamente el flujo en un plano, esto es, se tendría una composición promedio del flujo global.

Existen cuatro métodos de evaluación de los coeficientes de transferencia convectiva de masa que se estudiarán en este capítulo, que son:

1. análisis dimensional acoplado con experimentos
2. análisis exacto de capa límite
3. análisis aproximado de capa límite
4. analogía entre la transferencia de momento, energía y masa.

En las secciones siguientes se estudiará cada uno de estos métodos.

28.2 PARAMETROS IMPORTANTES EN LA TRANSFERENCIA CONVECTIVA DE MASA

A menudo se utilizan parámetros adimensionales para relacionar los datos relativos a la transferencia convectiva. En la transferencia de momento, nos hemos topado ya con los números de Reynolds y de Euler. En la relación de datos de transferencia convectiva de calor, son importantes los números de Prandtl y Nusselt. Algunos de los mismos parámetros junto con ciertas razones adimensionales recién definidas, resultarán de utilidad en la correlación de los datos correspondientes a la transferencia de masa. En esta sección se estudiará la interpretación física de tres de estas razones.

Las difusividades moleculares de los tres fenómenos de transferencia se han definido así:

$$\textit{difusividad de momento} = \nu = \mu/\rho$$

$$\textit{difusividad térmica} = \alpha = \frac{k}{\rho c_p}$$

y

$$\textit{difusividad de la masa} = D_{AB}$$

Tal como se hizo notar anteriormente, dada una de las difusividades tiene las dimensiones L^2/t, por lo que la razón de cualesquiera dos de ellas debe ser adimensional. La razón de la difusividad molecular de momento a la difusividad molecular de la masa se denomina *número de Schmidt:*

$$\frac{\textit{difusividad de momento}}{\textit{difusividad de masa}} = \mathrm{Sc} = \frac{\nu}{D_{AB}} = \frac{\mu}{\rho D_{AB}} \tag{28-2}$$

El número de Schmidt tiene una importancia en la transferencia convectiva de masa, análoga a la del número de Prandtl, en la transferencia convectiva de calor. La razón de la difusividad molecular del calor a la de la masa, se denomina *número de Lewis:*

$$\frac{\text{difusividad térmica}}{\text{difusividad de masa}} = \mathrm{Le} = \frac{k}{\rho c_p D_{AB}} \tag{28-3}$$

El número de Lewis aparece cuando un proceso consta de la transferencia convectiva simultánea de masa y energía. Los números de Schmidt y Lewis son combinaciones de las propiedades de los fluidos, por lo tanto, cada uno de ellos se puede considerar como una propiedad del sistema en difusión.

Pensemos ahora en la transferencia de masa del soluto A desde un sólido hasta un fluido que pasa alrededor de la superficie del sólido. En la figura 28.1 aparece el perfil de la concentración.

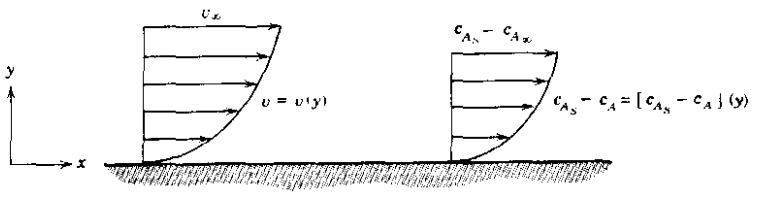


Figura 28.1 Perfiles de la velocidad y la concentración correspondientes a un fluido que circula alrededor de una superficie sólida.

Para este caso, la transferencia de masa entre la superficie y el fluido se puede escribir en la forma:

$$N_A = k_c(c_{A,s} - c_{A,\infty}) \tag{28-4}$$

Como la transferencia de masa en la superficie se realiza por difusión molecular, la transferencia de masa también se puede escribir por medio de:

$$N_A = -D_{AB}\frac{dc_A}{dy}\bigg|_{y=0}$$

cuando la concentración de frontera, $C_{A,s}$, es constante, esta ecuación se simplifica, reduciéndose a:

$$N_A = -D_{AB}\frac{d(c_A - c_{A,s})}{dy}\bigg|_{y=0} \tag{28-5}$$

Las ecuaciónes (28-4) y (28-5) se pueden igualar, ya que definen el mismo flujo de la componente A que abandona la superficie y entra al fluido. Esto produce la relación:

$$k_c(c_{A,s} - c_{A,\infty}) = -D_{AB}\frac{d}{dy}(c_A - c_{A,s})\bigg|_{y=0}$$

que se puede reordenar en la siguiente forma:

$$\frac{k_c}{D_{AB}} = \frac{-d(c_A - c_{A,s})/dy|_{y=0}}{(c_{A,s} - c_{A,\infty})} \tag{28-6}$$

Si se multiplican ambos lados de la ecuación (28-6) por una longitud significativa, L, se obtiene la siguiente expresión adimensional:

$$\frac{k_c L}{D_{AB}} = \frac{-d(c_A - c_{A,s})/dy|_{y=0}}{(c_{A,s} - c_{A,\infty})/L} \tag{28-7}$$

El lado derecho de la ecuación (28-7) es la relación entre el gradiente de la concentración en la superficie y un gradiente global o de referencia de la concentración. Por lo tanto, se puede considerar como la relación entre la resistencia a la transferencia molecular de masa y la resistencia del fluido a la transferencia convectiva de masa. Como la secuela de la ecuación (28-7) es semejante a la de la ecuación (19-5) del número de Nusselt encontrado en la transferencia convectiva de calor, la razón $k_c L/D_{AB}$ se denomina *número de Nusselt de transfrencia de masa*, Nu_{AB}. También se le conoce como *número de Sherwood*, Sh.

Estos tres parámetros Sc, Nu_{AB} o Sh y Le, aparecerán en los análisis de transferencia convectiva de masa en las secciones siguientes.

28.3 ANALISIS DIMENSIONAL DE LA TRANSFERENCIA CONVECTIVA DE MASA

El análisis dimensional predice los diversos parámetros adimensionales que resultan útiles en la correlación de los datos experimentales. Hay dos procesos importantes de transferencia de masa que se estudiarán: la transferencia de masa hacia una corriente que fluye en condiciones de convección forzada y de transferencia de masa hacia una fase que se mueve en condiciones de convección natural.

TRANSFERENCIA HACIA UNA CORRIENTE QUE FLUYE EN CONDICIONES DE CONVECCION FORZADA

Estudiemos, ahora, la transferencia de masa desde las paredes de un conducto circular hacia un fluido que circula a través del conducto. La transferencia es el resultado de la fuerza impulsora de la concentración, $c_{A,s} - c_A$. Las variables importantes, sus símbolos y sus representaciones dimensionales, son los que aparecen a continuación:

Variable	*Símbolo*	*Dimensiones*
diámetro del tubo	D	L
densidad del fluido	ρ	M/L^3
viscosidad del fluido	μ	M/Lt
velocidad del fluido	v	L/t
difusividad del fluido	D_{AB}	L^2/t
coeficiente de transferencia de masa	k_c	L/t

Las variables anteriores incluyen términos descriptivos de la geometría del sistema, las propiedades del flujo y del fluido y la cantidad de principal interés, k_c.

Por medio del método de Buckingham de agrupamiento de variables, que se estudió en el capítulo 11, se puede determinar que habrá tres grupos adimensionales. Los tres grupos pi que se van a formar tomando a D_{AB}, ρ, y D como las variables principales, son:

$$\pi_1 = D_{AB}{}^a \rho^b D^c k_c$$

$$\pi_2 = D_{AB}{}^d \rho^e D^f v$$

y

$$\pi_3 = D_{AB}{}^g \rho^h D^i \mu$$

Si se escribe π_1 en forma dimensional,

$$\pi_1 = D_{AB}{}^a \rho^b D^c k_c$$

$$1 = \left(\frac{L^2}{t}\right)^a \left(\frac{M}{L^3}\right)^b (L)^c \left(\frac{L}{t}\right)$$

y se igualan los exponentes de las dimensiones fundamentales de ambos lados de la ecuación, se tiene para:

$$L: \quad 0 = 2a - 3b + c + 1$$

$$t: \quad 0 = -a - 1$$

y

$$M: \quad 0 = b$$

La solución a estas ecuaciones, correspondiente a los tres exponentes incógnitos, produce el resultado:

$$a = -1$$

$$b = 0$$

y

$$c = 1$$

así pues: $\pi_1 = k_c D / D_{AB}$, que es el número de Nusselt de transferencia de masa o bien, el número de Sherwood. Los otros dos grupos pi se pueden determinar en la misma forma, dando:

$$\pi_2 = \frac{Dv}{D_{AB}}$$

y

$$\pi_3 = \frac{\mu}{\rho D_{AB}} = \mathrm{Sc}$$

que es el número de Schmidt. Si se divide π_2 entre π_3 se obtiene:

$$\frac{\pi_2}{\pi_3} = \left(\frac{Dv}{D_{AB}}\right)\left(\frac{D_{AB}\rho}{\mu}\right) = \frac{Dv\rho}{\mu} = \mathrm{Re}$$

el número de Reynolds. El resultado del análisis dimensional de la transferencia de masa en condiciones de convección forzada en un conducto circular indica que la correlación podría ser de la forma:

$$\mathrm{Nu}_{AB} = f(\mathrm{Re}, \mathrm{Sc}) \tag{28-8}$$

que es análoga a la correlación de transferencia de calor:

$$\mathrm{Nu} = f(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr}) \tag{19-7}$$

TRANSFERENCIA A UNA FASE CUYO MOVIMIENTO SE DEBE A LA CONVECCION NATURAL

Las corrientes de convección natural se crearán si existe cualquier variación en la densidad en una fase líquida o en una gaseosa. La variación en la densidad se puede deber a diferencias de temperatura o a diferencias de concentración, relativamente grandes.

En el caso en el que la convección natural incluye la transferencia de masa desde una pared vertical plana hasta un fluido adyacente, las variables diferirán de las utilizadas en el análisis de la convección forzada. Las variables importantes, sus símbolos y sus representaciones dimensionales, aparecen en la lista siguiente:

Variable	*Símbolo*	*Dimensiones*
longitud característica	L	L
difusividad del fluido	D_{AB}	L^2/t
densidad del fluido	ρ	M/L^3
viscosidad del fluido	μ	M/LT
fuerza boyante	$g\,\Delta\rho_A$	M/L^2t^2
coeficiente de transferencia de masa	k_c	L/t

Debido al teorema de Buckingham, puede predecirse que habrá tres grupos adimensionales, los cuales serán, con D_{AB}, L, y μ como variables principales:

$$\pi_1 = D_{AB}{}^a L^b \mu^c k_c$$

$$\pi_2 = D_{AB}{}^d L^e \mu^f \rho$$

y

$$\pi_3 = D_{AB}{}^g L^h \mu^i g\,\Delta\rho_a$$

Si se resuelven los tres grupos pi, se obtiene:

$$\pi_1 = \frac{k_c L}{D_{AB}} = \mathrm{Nu}_{AB}$$

el número de Nusselt de transferencia de masa, o número de Sherwood:

$$\pi_2 = \frac{\rho D_{AB}}{\mu} \equiv \frac{1}{\text{Sc}}$$

el recíproco del número de Schmidt y

$$\pi_3 = \frac{L^3 g\, \Delta\rho_A}{\mu D_{AB}}$$

Al multiplicar π_2 y π_3 se obtiene un parámetro análogo al número de Grashof de la transferencia de calor por convección natural,

$$\pi_2\pi_3 = \left(\frac{\rho D_{AB}}{\mu}\right)\left(\frac{L^3 g\, \Delta\rho_A}{\mu D_{AB}}\right)$$

$$= \frac{L^3 \rho g \Delta\rho_A}{\mu^2} = \frac{L^3 g \Delta\rho_A}{\rho\nu^2} \equiv \text{Gr}_{AB}$$

El resultado del análisis dimensional de la transferencia de masa por convección natural sugiere una interrelación de la forma:

$$\text{Nu}_{AB} = f(\text{Gr}_{AB}, \text{Sc}) \tag{28-9}$$

Las relaciones que se obtuvieron mediante el análisis dimensional, tanto para la convección natural como para la forzada, sugieren que una correlación de los datos experimentales puede estar en función de tres variables, en vez de las seis originales. Esta reducción en el número de variables ha ayudado a los investigadores que han sugerido interrelaciones de esta forma para producir muchas de las ecuaciones empíricas que aparecen en el capítulo 30.

28.4 ANALISIS EXACTO DE LA CONCENTRACION LAMINAR DE LA CAPA LIMITE

Blasius obtuvo una solución exacta, correspondiente a la capa límite hidrodinámica para un flujo paralelo a una superficie plana. Esta solución se examinó en la sección 12.5. En la sección 19.4 se hizo una extensión a la solución de Blasius para explicar la transferencia convectiva de calor. En una forma absolutamente análoga se ampliará, ahora, la solución de Blasius, para incluir la transferencia convectiva de masa para la misma geometría y el mismo flujo laminar.

Las ecuaciones correspondientes a la capa límite, estudiadas en la transferencia de momento en estado permanente, incluyeron la ecuación bidimensional e incompresible, de continuidad:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \tag{12-11b}$$

y la ecuación de movimiento en la dirección de x, para una presión y una ν constantes,

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \tag{12-11a}$$

La ecuación que describe la transferencia de energía de un flujo isobárico en estado permanente, incompresible y bidimensional, con una difusividad térmica constante, correspondiente a la capa térmica límite, es:

$$v_x\frac{\partial T}{\partial x}+v_y\frac{\partial T}{\partial y}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{19-15}$$

Hay una ecuación que se aplica a la transferencia de masa dentro de una capa límite de concentración cuando no hay producción de la componente en difusión y cuando la segunda derivada de c_A con respecto a x, $\partial^2 c_A/\partial x^2$, es mucho más pequeña en magnitud que la segunda derivada de c_A con respecto a y. Esta ecuación, escrita para un flujo permanente incompresible y bidimensional, cuya difusividad de masa es constante, es:

$$v_x\frac{\partial c_A}{\partial x}+v_y\frac{\partial c_A}{\partial y}=D_{AB}\frac{\partial^2 c_A}{\partial y^2} \tag{28-10}$$

La capa límite de concentración aparece en forma esquemática, en la figura 28.2. Las siguientes son las condiciones de frontera correspondientes a las tres capas límite:

momento: $\dfrac{v_x}{v_\infty}=0$ en $y=0$ y $\dfrac{v_x}{v_\infty}=1$ at $y=\infty$

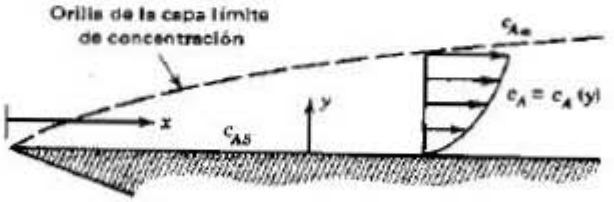


Figura 28.2 Capa límite de concentración de un flujo laminar alrededor de una superficie plana.

o, como la velocidad en la dirección de x en la pared, $v_{x,s}$ es igual a cero

$$\frac{v_x-v_{x,s}}{v_\infty-v_{x,s}}=0 \text{ en } y=0 \quad \text{y} \quad \frac{v_x-v_{x,s}}{v_\infty-v_{x,s}}=1 \text{ en } y=\infty$$

térmico $$\frac{T-T_s}{T_\infty-T_s}=0 \text{ en } y=0 \quad \text{y} \quad \frac{T-T_s}{T_\infty-T_s}=1 \text{ en } y=\infty$$

y *concentración*

$$\frac{c_A-c_{A,s}}{c_{A,\infty}-c_{A,s}}=0 \text{ en } y=0 \quad \text{y} \quad \frac{c_A-c_{A,s}}{c_{A,\infty}-c_{A,s}}=1 \text{ en } y=\infty$$

La semejanza entre las tres ecuaciones diferenciales: (12-11*a*), (19-15) y (28-10) así como las condiciones de frontera, sugieren que deben obtenerse soluciones semejantes para los tres fenómenos de transferencia. En el capítulo 19 se modificó la solución de Blasius correspondiente a la ecuación (12-11*a*) y se le aplicó con éxito en la explicación de la transferencia convectiva de calor cuando la razón del momento a la difusividad térmica, $\nu/\alpha = \mathrm{Pr} = 1$ se utiliza el mismo tipo de solución para describir la transferencia convectiva de masa cuando la razón: momento-difusividad de masa, $\nu/D = \mathrm{Sc} = 1$. Usando la nomenclatura definida en el capítulo 12:

$$f' = 2\frac{v_x}{v_\infty} = 2\frac{v_x - v_{x,s}}{v_\infty - v_{x,s}} = 2\frac{c_A - c_{A,s}}{c_{A,\infty} - c_{A,s}} \tag{28-11}$$

y

$$\eta = \frac{y}{2}\sqrt{\frac{v_\infty}{\nu x}} = \frac{y}{2x}\sqrt{\frac{xv_\infty}{\nu}} = \frac{y}{2x}\sqrt{\mathrm{Re}_x} \tag{28-12}$$

al aplicar el resultado de Blasius a la capa límite de la concentración se obtiene:

$$\frac{df'}{d\eta} = f''(0) = \frac{d[2(v_x/v_\infty)]}{d[(y/2x)\sqrt{\mathrm{Re}_x}]}\bigg|_{y=0}$$

$$= \frac{d[2(c_A - c_{A,s})/(c_{A,\infty} - c_{A,s})]}{d[(y/2x)\sqrt{\mathrm{Re}_x}]}\bigg|_{y=0} = 1.328 \tag{28-13}$$

La ecuación (28-13) se puede reordenar para obtener una expresión correspondiente al gradiente de la concentración en la superficie,

$$\frac{dc_A}{dy}\bigg|_{y=0} = (c_{A,\infty} - c_{A,s})\left[\frac{0.332}{x}\mathrm{Re}_x^{1/2}\right] \tag{28-14}$$

Es importante recordar que la solución de Blasius correspondiente a la ecuación (12-11*a*) no incluía una velocidad en la superficie en la dirección de x, por lo tanto, la ecuación (28-14) hace la suposición, muy importante, de que la rapidez con la cual entra o sale la masa de la capa límite en la superficie, es tan pequeña que no altera el perfil de la velocidad predicho por la solución de Blasius.

Cuando la velocidad en la dirección de y en la superficie, $v_{y,s}$, es igual a cero, el término correspondiente a la contribución global, en la ecuación de Fick, el flujo de masa en la dirección de y también es igual a cero. La transferencia de masa de la superficie plana de la capa laminar límite, está descrita por la ecuación:

$$N_{A,y} = -D_{AB}\frac{\partial c_A}{\partial y}\bigg|_{y=0} \tag{28-15}$$

Al sustituir la ecuación (28-14) en la (28-15), se obtiene:

$$N_{A,y} = -D_{AB}\left[\frac{0.332\ \mathrm{Re}_x^{1/2}}{x}\right](c_{A,\infty} - c_{A,s})$$

ó

$$N_{A,y} = D_{AB}\left[\frac{0.332\ \mathrm{Re}_x^{1/2}}{x}\right](c_{A,s} - c_{A,\infty}) \qquad (28\text{-}16)$$

El flujo de masa de la componente en difusión se definió en función del coeficiente de transferencia de masa por medio de:

$$N_{A,y} = k_c(c_{A,s} - c_{A,\infty}) \qquad (29\text{-}4)$$

Los lados derechos de las ecuaciones (28-16) y (28-4) se pueden igualar, obteniéndose:

$$k_c = \frac{D_{AB}}{x}[0.332\ \mathrm{Re}_x^{1/2}]$$

ó

$$\frac{k_c x}{D_{AB}} = \mathrm{Nu}_{AB} = 0.332\ \mathrm{Re}_x^{1/2} \qquad (28\text{-}17)$$

La ecuación (28-17) está restringida a sistemas cuyo número de Schmidt, Sc, sea igual a uno y con una rapidez de transferencia de masa entre la placa plana y la capa límite, muy baja.

En la figura 28.3 puede observarse una representación gráfica de la solución a la ecuación de capa límite de concentración, ecuación (28-10), obtenida por Heartnett y Eckert.* En esta figura se muestran las curvas que representan los valores positivos y negativos del parámetro límite de la superficie, $(v_{y,s}/v_\infty)(\mathrm{Re}_x)^{1/2}$. Los valores positivos son válidos cuando la transferencia de masa de la placa plana ocurre hacia la capa límite y los valores negativos describen la transferencia de masa del fluido a la placa. Cuando el parámetro de la superficie de frontera tiende a cero, la rapidez de transferencia de masa disminuye hasta que se considera que no tiene ningún efecto en el perfil de velocidad. La pendiente de la recta cero, calculada en $y = 0$ es 0.332, tal como lo predice la ecuación (28-13).

En la mayoría de las operaciones físicas que se relacionan con la transferencia de masa, el parámetro de la superficie límite es despreciable y se utiliza el tipo de solución de Blasius, de baja transferencia de masa, para definir la transferencia hacia la capa laminar límite. La vaporización de un material volátil hacia una corriente gaseosa que fluye a baja presión, es un caso en el que no se puede hacer la suposición de baja transferencia de masa.

*J. P. Hartnett y E. R. G. Eckert, *Trans. A. S. M. E.*, 13, 247 (1957).

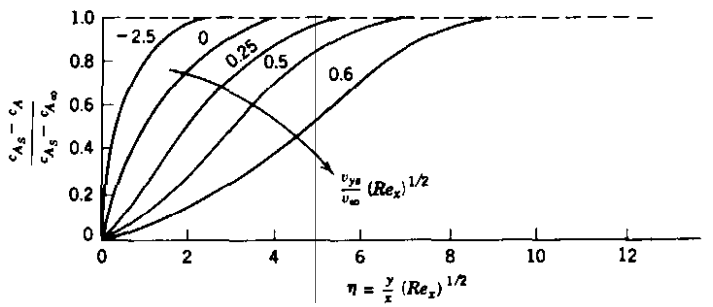


Figura 28.3 Perfiles de la concentración correspondientes a la transferencia de masa en una capa laminar límite sobre una placa plana.

Para un fluio cuyo número de Schmidt sea diferente de la unidad, se pueden definir curvas similares a las de la figura 28.3. La semejanza de las ecuaciones diferenciales y de las condiciones de frontera sugiere el empleo de un método análogo a la solución de Pohlhausen, correspondiente a la transferencia de calor convectivo, para la transferencia convectiva de masa. La capa límite de concentración está relacionada con la capa hidrodinámica límite por medio de la ecuación:

$$\frac{\delta}{\delta_c} = \mathrm{Sc}^{1/3} \tag{28-18}$$

donde δ es el espesor de la capa hidrodinámica límite y δ_c es el grosor de la capa límite de concentración, por lo cual, el término de Blasius, η, se debe multiplicar por $\mathrm{Sc}^{1/3}$. En la figura 28.14 aparece una gráfica de concentración adimensional contra $\eta \mathrm{Sc}^{1/3}$ correspondiente a $v_{y,s} = 0$. La variación en la concentración, expresada en esta forma conduce a una expresión correspondiente

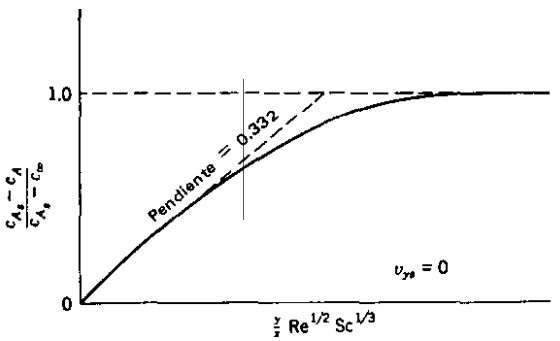


Figura 28.4 Variación de la concentración correspondiente a un flujo laminar sobre una placa plana.

al coeficiente de transferencia convectiva de masa, semejante a la ecuación (28-17). En $y = 0$, el gradiente de la concentración es:

$$\left.\frac{\partial c_A}{\partial y}\right|_{y=0} = (c_{A,\infty} - c_{A,s})\left[\frac{0.332}{x}\,\mathrm{Re}_x^{1/2}\mathrm{Sc}^{1/3}\right] \tag{28-19}$$

el cual, al emplearse con la ecuación (28-15) da origen a la ecuación:

$$\frac{k_c x}{D_{AB}} = \mathrm{Nu}_{x,AB} = 0.332\,\mathrm{Re}_x^{1/2}\,\mathrm{Sc}^{1/3} \tag{28-20}$$

El coeficiente medio de transferencia de masa, que se aplica sobre una placa de ancho W y longitud L, se puede obtener por integración. En una placa de estas dimensiones, se puede evaluar la rapidez total de transferencia de masa, W_A, por medio de:

$$\begin{aligned} W_A &= k_c A(c_{A,s} - c_{A,\infty}) = \int_A k_c(c_{A,s} - c_{A,\infty})\,dA \\ &= k_c WL(c_{A,s} - c_{A,\infty}) \\ &= (c_{A,s} - c_{A,\infty})\int_A \frac{0.332 D_{AB}\,\mathrm{Re}_x^{1/2}\mathrm{Sc}^{1/3}\,dA}{x} \end{aligned}$$

Así pues:

$$k_c WL = 0.332\,WD_{AB}\mathrm{Sc}^{1/3}\int_0^L \frac{\mathrm{Re}_x^{1/2}}{x}\,dx$$

$$k_c L = 0.332 D_{AB}\mathrm{Sc}^{1/3}\left(\frac{v_\infty \rho}{\mu}\right)^{1/2}\int_0^L x^{-1/2}\,dx$$

$$= 0.664 D_{AB}\mathrm{Sc}^{1/3}\left(\frac{v_\infty \rho}{\mu}\right)^{1/2} L^{1/2}$$

y

$$\frac{k_c L}{D_{AB}} = \mathrm{Nu}_{L,AB} = 0.664\mathrm{Re}_L^{1/2}\mathrm{Sc}^{1/3} \tag{28-21}$$

El número local de Nusselt a una distancia x, en el sentido de la corriente, se relaciona con el número medio de Nusselt correspondiente a la placa, por medio de la expresión:

$$\mathrm{Nu}_{L,AB} = 2\mathrm{Nu}_{x,AB}|_{x=L} \tag{28-22}$$

que es análoga al resultado de la transferencia convectiva de calor:

$$\mathrm{Nu}_L = 2\mathrm{Nu}_x|_{x=L} \tag{19-27}$$

Las ecuaciones (28-20) y (28-21) se han verificado experimentalmente. Es importante hacer notar que este análisis, totalmente diferente, ha producido

*W. J. Christian y S. P. Kezios, *A.I.Ch.E. J.*, 5, 61 (1959).

resultados de la misma forma predicha en la sección 28.3 mediante el análisis dimensional, para la transferencia forzada-convectiva de masa,

$$\mathrm{Nu}_{AB} = f(\mathrm{Re}, \mathrm{Sc}) \tag{28-8}$$

Si se recuerdan los perfiles adimensionales de concentración de Harnett y Eckert, tal como aparecen en la figura 28.3, se podrá observar que cuando se calcula la pendiente de cada una de las curvas en $y = 0$, ésta disminuye cuando el parámetro positivo de la superficie límite $(v_{ys}/v_\infty)(\mathrm{Re})^{1/2}$, aumenta. Como la magnitud del coeficiente de transferencia está directamente relacionado con la pendiente por medio de la ecuación:

$$k_c = D_{AB} \frac{d[(c_{A,s} - c_A)/(c_{A,s} - c_{A,\infty})]}{dy}\bigg|_{y=0} \tag{28-23}$$

la disminución de la pendiente indica que los sistemas cuyos valores del parámetro de la superficie límite son altos, tienen coeficientes más bajos de transferencia de masa.

Cuando la energía y la masa se transfieren a través de la capa laminar límite, los perfiles adimensionales de la figura 28.3 también pueden representar los perfiles adimensionales de temperatura cuando los números de Prandtl y Schmidt son iguales a la unidad. En el párrafo anterior, se señaló que el coeficiente de transferencia de masa disminuye en magnitud cuando se transfiere masa de la superficie a la capa límite, por lo tanto, es de esperarse que el coeficiente de transferencia de calor disminuya al transferirse masa a la capa límite. Esto puede realizarse haciendo pasar un fluido a través de una placa porosa hacia afuera, llegando a la capa límite, o sublimando el material mismo de la placa. Estos procesos simultáneos de transferencia de calor y masa, a los cuales se llama a menudo *enfriamiento por transpiración y ablación*, respectivamente, se utilizan para ayudar a reducir los enormes efectos del calor durante el regreso de un proyectil a la atmósfera terrestre.

EJEMPLO 1

El coeficiente de transferencia de masa correspondiente a una capa límite turbulenta formada sobre una placa plana se ha correlacionado, en función del número local de Nusselt, por medio de:

$$\mathrm{Nu}_{x,AB} = 0.0292\mathrm{Re}_x^{4/5}\mathrm{Sc}^{1/3} \tag{28-24}$$

donde x es la distancia en el sentido de la corriente, al borde de ataque de la placa plana. La transición de flujo laminar a turbulento ocurre en $\mathrm{Re}_x = 3 \times 10^5$.

a) Encuéntrese una expresión que corresponda al coeficiente medio de transferencia de masa en una placa plana de longitud L_t.

Por definición:

$$\bar{k}_c = \frac{\int_0^{L_t} k_c\, dx}{\int_0^{L} dx} = \frac{\int_0^{L_t} k_{c,\mathrm{lam}}\, dx + \int_{L_t}^{L} k_{c,\mathrm{turb}}\, dx}{L} \tag{28-25}$$

donde L_t es la distancia medida del borde de ataque al punto de transición. $k_{c,lam}$ está definida por la ecuación (28-20):

$$k_{c,lam} = 0.332 \frac{D_{AB}}{x} (\mathrm{Re}_x)^{1/2} (\mathrm{Sc})^{1/3}$$

$k_{c,turb}$ está definida por la ecuación (28-24):

$$k_{c,turb} = 0.0292 \frac{D_{AB}}{x} (\mathrm{Re}_x)^{4/5} (\mathrm{Sc})^{1/3}$$

Al sustituir estas dos ecuaciones en la expresión correspondiente al coeficiente medio de transferencia de masa, se obtiene:

$$\bar{k}_c = \frac{\displaystyle\int_0^{L_t} \frac{0.332 D_{AB} (\mathrm{Re}_x)^{1/2}}{x} (\mathrm{Sc})^{1/3}\, dx + \int_{L_t}^{L} \frac{0.0292 D_{AB} (\mathrm{Re}_x)^{4/5}}{x} (\mathrm{Sc})^{1/3}\, dx}{L}$$

donde L_t es la distancia del borde de ataque al punto de transición, en el cual $\mathrm{Re}_t = 3 \times 10^5$.

$$\bar{k}_c = \frac{0.332 D_{AB} \left(\frac{v}{\nu}\right)^{1/2} (\mathrm{Sc})^{1/3} \displaystyle\int_0^{L_t} x^{-1/2}\, dx + 0.0292 D_{AB} \left(\frac{v}{\nu}\right)^{4/5} (\mathrm{Sc})^{1/3} \int_{L_t}^{L} x^{-1/5} dx}{L}$$

$$\bar{k}_c = \frac{0.664 D_{AB} \left(\frac{v}{\nu}\right)^{1/2} (\mathrm{Sc})^{1/3} L_t^{1/2} + 0.0361 D_{AB} \left(\frac{v}{\nu}\right)^{4/5} (\mathrm{Sc})^{1/3} [(L)^{4/5} - (L_t)^{4/5}]}{L}$$

$$\bar{k}_c = \frac{0.664 D_{AB} (\mathrm{Re}_t)^{1/2} (\mathrm{Sc})^{1/3} + 0.0361 D_{AB} (\mathrm{Sc})^{1/3} [(\mathrm{Re}_L)^{4/5} - (\mathrm{Re}_t)^{4/5}]}{L} \qquad (28\text{-}26)$$

b) Un vaso de alcohol etílico se volcó accidentalmente sobre un banco de laboratorio, cubriendo la superficie lisa superior del mismo. El extractor de aire que se encuentra en el laboratorio produjo un flujo de aire de 6 m/seg, paralelo a la superficie que fluye a través del banco de 1 m de ancho. El aire se mantuvo a 289 K y 1 atm. (1.013×10^5 Pa). La presión del vapor de alcohol etílico a 289 K es de 4,000 Pa. Determínese la cantidad de alcohol que se evapora de un área de un metro cuadrado cada 60 seg.

A 289 K, la viscosidad cinemática es de $1.48 \times 10^{-5}\ \mathrm{m^2/seg}$. y la difusividad de la masa de etanol en aire es de $1.26 \times 10^{-5}\ \mathrm{m^2/seg}$. En este sistema:

$$\mathrm{Sc} = \frac{\nu}{D_{AB}} = \frac{1.48 \times 10^{-5}\ \mathrm{m^2/s}}{1.26 \times 10^{-5}\ \mathrm{m^2/s}} = 1.17$$

El número de Reynolds correspondiente a toda la longitud de 1 m. es:

$$\mathrm{Re}_L = \frac{vL}{\nu} = \frac{(6\ \mathrm{m/s})(1\ \mathrm{m})}{1.48 \times 10^{-5}\ \mathrm{m^2/s}} = 4.05 \times 10^5$$

Como esta cantidad es mayor que 3×10^5, se observa que habrá un punto de transición donde la capa límite cambia de flujo laminar a turbulento. El punto de transición se puede evaluar a partir del número de transición de Reynolds, $\mathrm{Re}_t = 3 \times 10^5$.

$$L_t = \frac{\mathrm{Re}_t \nu}{v} = \frac{(3 \times 10^5)(1.48 \times 10^{-5}\ \mathrm{m^2/s})}{6\ \mathrm{m/s}} = 0.74\ \mathrm{m}$$

Se puede calcular el coeficiente medio de transferencia de masa usando la ecuación (28-26) obtenida en la parte (a)

$$\bar{k}_c = \frac{0.664(1.26\times10^{-5}\ \text{m}^2/\text{s})(3\times10^5)^{1/2}(1.17)^{1/3}}{1\ \text{m}} + \frac{0.0361(1.26\times10^{-5}\ \text{m}^2/\text{s})(1.17)^{1/3}[(4.05\times10^5)^{4/5}-(3\times10^5)^{4/5}]}{1\ \text{m}}$$

$$= 0.00483 + 0.00313 = 0.00796\ \text{m/s}$$

Se puede calcular la concentración del alcohol etílico en el vapor inmediatamente encima de la superficie del líquido, por medio de la relación:

$$c_{A,s} = \frac{P_A}{RT} = \frac{4000\ \text{Pa}}{\left(8.314\frac{\text{Pa}\cdot\text{m}^3}{\text{mol}\cdot\text{K}}\right)(289\ \text{K})}$$

$$= 1.66\ \text{mol/m}^3$$

La cantidad de alcohol que abandona la superficie es de $\bar{k}_c(c_{A,s}-c_{A,\infty})$ ó:

$$W_A = (0.00796\ \text{m/s})(1\ \text{m}^2)(1.66\ \text{mol/m}^3)$$

$$= 1.32\times10^{-2}\ \text{mol/s} = 0.793\ \text{mol/60 s} \quad (0.104\ \text{lb mole/hr})$$

28.5 ANALISIS APROXIMADO DE LA CAPA LIMITE DE CONCENTRACION

Cuando el flujo es de un tipo diferente al laminar o cuando la configuración es otra que no sea una placa plana, existen actualmente pocas soluciones exactas correspondientes a la transferencia en una capa limitada. El método aproximado, encontrado por von Karmán para describir la capa límite hidrodinámica, se puede utilizar en el análisis de la capa límite de concentración. En los capítulos 12 y 19 se estudió el uso de este método.

Analícese, ahora, el volumen de control localizado en la capa límite de concentración, tal como aparece en la figura 28.5. Este volumen representado por las líneas punteadas, tiene un ancho igual a Δx, una altura igual al espesor

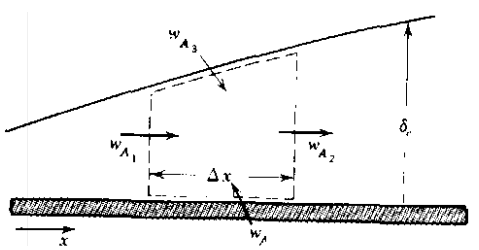


Figura 28.5 Volumen de control de la capa límite de concentración.

de la capa límite de concentración, δ_c y profundidad unitaria. Si se hace un balance de la masa molar en estado permanente sobre el volumen de control, se tendrá la relación:

$$W_{A_1} + W_{A_3} + W_{A_4} = W_{A_2} \tag{28-27}$$

donde W_A es la rapidez molar de transferencia de masa de la componente A. En cada una de las superficies, la rapidez se expresa así:

$$W_{A_1} = \int_0^{\delta_c} c_A v_x \, dy \Big|_x$$

$$W_{A_2} = \int_0^{\delta_c} c_A v_x \, dy \Big|_{x+\Delta x}$$

$$W_{A_3} = c_{A,\infty} \left[\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta_c} v_x \, dy \right] \Delta x$$

y

$$W_{A_4} = k_c (c_{A,s} - c_{A,\infty}) \, \Delta x$$

En términos de rapidez molar, se puede reescribir la ecuación (28-27) en la forma:

$$\int_0^{\delta_c} c_A v_x \, dy \Big|_x + c_{A,\infty} \left[\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta_c} v_x \, dy \right] \Delta x + k_c (c_{A,s} - c_{A,\infty}) \, \Delta x = \int_0^{\delta_c} c_A v_x \, dy \Big|_{x+\Delta x} \tag{28-28}$$

Al redordenar y dividir cada uno de los términos entre Δx y calcular el resultado en el límite, cuando Δx tiende a cero, se obtiene:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_c} c_A v_x \, dy = c_{A,\infty} \left[\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_c} v_x \, dy \right] + k_c (c_{A,s} - c_{A,\infty})$$

ó

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_c} (c_A - c_{A,\infty}) v_x \, dy = k_c (c_{A,s} - c_{A,\infty}) \tag{28-29}$$

La ecuación (28-29) es análoga a las ecuaciones (12-37) y (19-30). Para poder resolver la ecuación (28-29) deben conocerse los perfiles de la velocidad y la concentración que usualmente se desconocen y se deben suponer. Las siguientes son algunas de las condiciones de frontera que deben satisfacer las condiciones supuestas de frontera, son:

1) $v_x = 0 \qquad \text{en } y = 0$

2) $v_x = v_\infty \qquad \text{en } y = \delta$

3) $\dfrac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \qquad \text{en } y = \delta$

y

4) $$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{en } y = 0$$

El perfil de concentración supuesto debe satisfacer las condiciones correspondientes de frontera en función de las concentraciones,

1) $$c_A - c_{A,s} = 0 \qquad \text{en } y = 0 \tag{28-30}$$

2) $$c_A - c_{A,s} = c_{A,\infty} - c_{A,s} \qquad \text{en } y = \delta_c \tag{28-31}$$

3) $$\frac{\partial}{\partial y}(c_A - c_{A,s}) = 0 \qquad \text{en } y = \delta_c \tag{28-32}$$

y

4) $$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(c_A - c_{A,s}) = 0 \qquad \text{en } y = 0 \tag{28-33}$$

Si se recuerda el flujo laminar paralelo a una superficie plana, se puede usar la ecuación integral de von Kármán, que es la (28-29), para obtener una solución aproximada. Los resultados se pueden comparar con la solución exacta, ecuación (28-20) y verificar la exactitud de las suposiciones hechas acerca de la velocidad y de los perfiles de concentración. Como primera aproximación, vamos a tomar una expresión en serie de potencias, para la variación de la concentración con y.

$$c_A - c_{A,s} = a + by + cy^2 + dy^3$$

Al aplicar las condiciones de frontera se obtendrá la expresión:

$$\frac{c_A - c_{A,s}}{c_{A,\infty} - c_{A,s}} = \frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta_c}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta_c}\right)^3 \tag{28-34}$$

Si se supone que el perfil de la velocidad tiene la misma forma en serie de potencias, entonces la expresión resultante, tal como se vio en el capítulo 12 es:

$$\frac{v_x}{v_\infty} = \frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \tag{12-40}$$

Cuando se sustituyen las ecuaciones (28-34) y (12-40) en la expresión integral (28-29) y se resuelve, se obtiene:

$$\mathrm{Nu}_{x,AB} = 0.36\mathrm{Re}_x^{1/2}\mathrm{Sc}^{1/3} \tag{28-35}$$

resultado que se aproxima bastante a la solución exacta expresada en la ecuación (28-17).

Aunque esta no es la expresión correcta, es suficientemente aproximada para indicar que se puede usar el método integral con bastante confianza en

otras situaciones en las que no se conozca una solución exacta. La exactitud del método depende totalmente de la habilidad para suponer buenos perfiles de velocidad y concentración.

La ecuación integral de von Kármán, ecuación (28-29), también se ha utilizado para obtener una solución aproximada de la capa límite turbulenta sobre una placa plana. Si se toma el valor aproximado del perfil de la velocidad igual a:

$$v_x = \alpha + \beta y^{1/7}$$

y el valor aproximado de la concentración, igual a:

$$c_A - c_{A,\infty} = \eta + \xi y^{1/7}$$

el número local de Nusselt de la capa turbulenta es:

$$\mathrm{Nu}_{x,AB} = 0.0292\ \mathrm{Re}_x^{4/5} \qquad (28\text{-}24)$$

Se anima al lector a llevar a cabo la obtención de la ecuación (28-24) que se solicita en uno de los problemas que aparecen al final del capítulo.

28.6 ANALOGIAS DE TRANSFERENCIA DE MASA, ENERGIA Y MOMENTO

En el análisis que se hizo anteriormente de la transferencia convectiva de masa, se reconocieron las semejanzas que existen entre las ecuaciones diferenciales de transferencia de momento, energía y masa y en las condiciones de frontera, cuando se expresaron los gradientes de transferencia en función de variables adimensionales. Estas semejanzas nos han permitido predecir soluciones correspondientes a los procesos semejantes de transferencia. En esta sección se estudiarán diversas analogías de entre los fenómenos de transferencia, que se han propuesto debido a la semejanza de sus mecanismos. Las analogías resultan de utilidad para comprender los fenómenos de transferencia y también como un medio satisfactorio de predecir el comportamiento de los sistemas para los cuales existen datos cuantitativos limitados disponibles.

La semejanza entre los fenómenos de transferencia y, por lo tanto, la existencia de las analogías, requieren de la existencia de las siguientes cinco condiciones dentro del sistema:

1. Que las propiedades físicas sean constantes.
2. Que no haya producción de masa o energía dentro del sistema. Esto, desde luego, implica que no pueden ocurrir reacciones químicas homogéneas.
3. Que no exista emisión o absorción de energía radiante.
4. Que no haya disipación viscosa.
5. Que el perfil de la velocidad no esté afectado por la transferencia de masa, por lo cual habrá una transferencia lenta de masa.

ANALOGIA DE REYNOLDS

Reynolds* fue quien primero se dio cuenta del comportamiento análogo de la transferencia de energía y momento. Aunque esta analogía es de aplicación limitada, ha servido como catalizador para encontrar mejores analogías y ha sido utilizada con éxito en el análisis de los complejos fenómenos de capa límite de la aerodinámica.

Reynolds postuló que los mecanismos de transferencia y energía y momento eran idénticos. En el estudio realizado anteriomente, acerca de las capas laminares límite, se ha visto que esto se cumple cuando el número de Prandtl, Pr es igual a la unidad. A partir del estudio que se hizo en la sección 28.4, se puede ampliar el postulado de Reynolds para incluir el mecanismo correspondiente a la transferencia de masa cuando el número de Schmith, Sc, también es igual a la unidad. Por ejemplo, si se analiza el flujo laminar sobre una placa plana, donde Sc = 1, los perfiles de la velocidad y la concentración dentro de las capas límite están relacionados por medio de:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{c_A - c_{A,s}}{c_{A,\infty} - c_{A,s}}\right)\bigg|_{y=0} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v_x}{v_\infty}\right)\bigg|_{y=0} \tag{28-36}$$

Recuérdese que en la frontera próxima a la placa, donde $y = 0$, se puede expresar el flujo de masa en función de la difusividad de la masa o del coeficiente de transferencia de masa, por medio de la ecuación

$$N_{A,y} = -D_{AB}\frac{\partial}{\partial y}(c_A - c_{A,s})|_{y=0} = k_c(c_{A,s} - c_{A,\infty}) \tag{28-37}$$

Se pueden combinar las ecuaciones (28-36) y (28-37) para lograr una expresión que relacione el coeficiente de transferencia de masa con el gradiente de la velocidad en la superficie:

$$k_c = \frac{\mu}{\rho v_\infty}\frac{\partial v_x}{\partial y}\bigg|_{y=0} \tag{28-38}$$

El coeficiente de fricción superficial se relacionó, en el capítulo 12, con este mismo gradiente de velocidad, mediante la expresión:

$$C_f = \frac{\tau_0}{\rho v_\infty^{\,2}/2} = \frac{2\mu(\partial v_x/\partial y)|_{y=0}}{\rho v_\infty^{\,2}} \tag{12-2}$$

Si se hace uso de esta definición se puede reordenar la ecuación (28-38) para obtener la analogía de Reynolds de transferencia de masa correspondiente a los sistemas cuyo número de Schmidt es igual a uno,

$$\frac{k_c}{v_\infty} = \frac{C_f}{2} \tag{28-39}$$

*O. Reynolds, *Proc. Manchester Lit. Phil. Soc.*, 8, (1874).

La ecuación (28-39) es análoga a la analogía de Reynolds de transferencia de energía para los sistemas cuyo número de Prandtl es igual a uno. En el capítulo 19 se analizó esta analogía, la cual puede expresarse así:

$$\frac{h}{\rho v_\infty c_p} = \frac{C_f}{2} \tag{19-36}$$

Los datos experimentales correspondientes a la transferencia de masa hacia corrientes gaseosas, concuerdan, aproximadamente, con la ecuación (28-39) cuando el sistema tiene un número de Schmidt cercano a 1 y si su resistencia al flujo se debe a la fricción superficial. Por lo tanto, no debe usarse la ecuación (28-39) para describir situaciones en donde exista un arrastre de forma.

CONSIDERACIONES ACERCA DEL FLUJO TURBULENTO

En la mayor parte de las aplicaciones prácticas, el flujo, en la corriente principal, es turbulento en lugar de ser laminar. Aunque muchos investigadores han hecho grandes aportaciones a la comprensión del flujo turbulento, hasta el momento nadie ha tenido éxito en la predicción de los coeficientes de transferencia convectiva o factores de fricción por medio del análisis directo, lo cual no resulta demasiado sorprendente cuando se recuerda, en relación con el estudio previo acerca del flujo turbulento, sección 13.1, que el flujo en cualquier punto está sujeto a fluctuaciones irregulares en dirección y velocidad. De acuerdo con esto, cualquiera de las partículas de fluido sufre una serie de movimientos efectuados al azar, sobrepuestos al flujo principal. Estos movimientos en forma de remolino, propician el mezclado en el centro turbulento. A este proceso se le llama, a menudo, "difusión de remolino". El valor de la difusividad de remolino de la masa será mucho mayor que la difusividad molecular que existe en el interior del núcleo turbulento.

En un esfuerzo para caracterizar este tipo de movimiento, Prandtl propuso la hipótesis de la longitud de mezclado, tal como se estudió en el capítulo 13. En esta hipótesis, cualquier fluctuación de la velocidad, v_x' se debe al movimiento en la dirección de y de un remolino, en una distancia igual a la longitud de mezclado, L. El remolino de fluido, que posee una velocidad media, $\bar{v}_x|_y$, se desplaza hacia una corriente en la que el fluido adyacente tiene una velocidad media, $\bar{v}_x|_{y+L}$. La fluctuación de la velocidad se relaciona con el gradiente de la velocidad media, por medio de la ecuación

$$v_x' = \bar{v}_x|_{y+L} - \bar{v}_x|_y = L\frac{d\bar{v}_x}{dy} \tag{13-10}$$

El esfuerzo cortante total se definió por medio de la expresión:

$$\tau = \mu\frac{d\bar{v}_x}{dy} - \rho\overline{v_x' v_y'} \tag{13-8}$$

Al sustituir la ecuación (13-10) en la (13-8) se obtiene:

$$\tau = \rho[\nu + Lv_y']\frac{d\bar{v}_x}{dy} \tag{28-40}$$

ó

$$\tau = \rho[\nu + \epsilon_M]\frac{d\bar{v}_x}{dy} \tag{28-41}$$

donde $\epsilon_M = Lv_y'$ se denomina difusividad de remolino de momento y es análoga a la difusividad de momento, ν.

Ahora se puede analizar, de manera semejante, la transferencia de masa que ocurre en un flujo turbulento, ya que este mecanismo de transferencia también se debe a la presencia de las fluctuaciones o remolinos. En la figura 28.6, la curva representa una porción del perfil turbulento de la concentración con un flujo medio en la dirección de x. La rapidez instantánea de transferencia de la componente A en la dirección de y es:

$$N_{A,y} = c_A' v_y' \tag{28-42}$$

donde $c_A = \bar{c}_A + c_A'$, o sea la suma de las fluctuaciones instantáneas el promedio temporal, de la concentración de la componente A. De nuevo puede utilizarse el concepto de la longitud

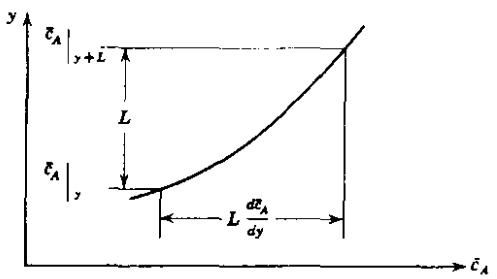


Figura 28.6 Porción de la curva del perfil de la concentración turbulenta, mostrando la longitud del mezclado, de Prandtl.

de mezclado, para definir la fluctuación de la concentración por medio de la relación:

$$c_A' = \bar{c}_A|_{y+L} - \bar{c}_A|_y = L\frac{d\bar{c}_A}{dy} \tag{28-43}$$

Al insertar la ecuación (28-43) en la (28-42), se obtiene una expresión que corresponde a la transferencia turbulenta de masa por medio de remolinos. La transferencia total de masa, normal a la dirección de flujo es:

$$N_{A,y} = -D_{AB}\frac{d\bar{c}_A}{dy} - \overline{v_y'L}\frac{d\bar{c}_A}{dy}$$

ó

$$N_{A,y} = -(D_{AB} + \epsilon_D)\frac{d\bar{c}_A}{dy} \tag{28-44}$$

donde $\epsilon_D = \overline{Lv_y'}$ se denomina difusividad de remolino de la masa.

Por medio de un razonamiento semejante se obtuvo, en el capítulo 19, una expresión correspondiente a la transferencia convectiva de calor:

$$\frac{q}{A} = -\rho c_p(\alpha + \epsilon_H)\frac{d\bar{T}}{dy} \tag{19-49}$$

donde α es la difusividad térmica molecular y ϵ_M, la difusividad térmica de remolino.

La difusividad de remolino tiene un papel muy importante en muchos procesos de transferencia de masa. Por ejemplo: existe una transferencia de masa entre un fluido que circula alrededor de los sólidos de los reactores catalíticos heterogéneos, los calefactores, los secadores, etc. Como resultado de la difusión de remolino, la transferencia es rápida en el núcleo turbulento reduciendo la composición de cualquier gradiente. Al acercarse a la pared, la turbulencia va disminuyendo hasta que, en la vecindad inmediata de la superficie del sólido, desaparece esencialmente y la transferencia se realiza casi completamente por difusión molecular. La mayor parte de la resistencia a la transferencia ocurre en la capa límite próxima a la superficie en la cual el gradiente de la composición es más pronunciado.

LAS ANALOGIAS DE PRANDT Y VON KARMAN

En el capítulo 19 se obtuvo la analogía de Prandtl correspondiente a la transferencia de calor y momento, cuando se estudió el efecto del núcleo turbulento y de la subcapa laminar. Se puede utilizar el mismo razonamiento, con respecto a la transferencia de masa y de momento, para desarrollar una analogía semejante. En la subcapa laminar las difusividades de remolino de momento y de masa son despreciables y en la superficie el esfuerzo cortante, τ_s y el flujo de masa, $N_{A,y,s}$ son constantes. La ecuación (28-41) se puede integrar sobre el espesor de la subcapa, resultando:

$$\int_0^{v_x|_\xi} dv_x = \frac{\tau_s}{\rho\nu}\int_0^{\xi} dy$$

ó

$$v_x|_\xi = \frac{\tau_s \xi}{\rho\nu} \tag{28-45}$$

La ecuación (28-44) también se puede integrar sobre el espesor de la subcapa, dando como resultado:

$$\int_{c_{A,s}}^{c_A|_\xi} d\bar{c}_A = -\frac{N_{A,y,s}}{D_{AB}}\int_0^{\xi} dy$$

ó

$$(c_{A,s} - c_{A|\xi}) = \frac{N_{A,y,s}}{D_{AB}}\xi \tag{28-46}$$

Si se elimina ξ de estas dos ecuaciones, se obtendrá:

$$\frac{\rho\nu v_{x|\xi}}{\tau_s} = \frac{D_{AB}}{N_{A,y,s}}(c_{A,s} - c_{A|\xi}) \tag{28-47}$$

La analogía de Reynolds, $k_c/v_\infty = C_f/2 = \tau_s/\rho v_\infty{}^2$, se puede utilizar en el núcleo turbulento, de $y = \xi$ a y en las condiciones globales. El flujo de masa del núcleo turbulento se transforma en:

$$N_{A,y} = k_c(c_{A|\xi} - c_{A,\infty}) = \frac{\tau_s}{\rho(v_\infty - v_{x|\xi})}(c_{A|\xi} - c_{A,\infty}) \tag{28-48}$$

Al eliminar a $c_{A|\xi}$ se obtiene, de las ecuaciones (28-46) y (28-48):

$$\frac{c_{A,s} - c_{A|\xi}}{N_{A,y}} = \frac{\rho}{\tau_s}\left[v_\infty + v_{x|\xi}\left(\frac{\nu}{D_{AB}} - 1\right)\right] \tag{28-49}$$

Cuando se sustituyen las ecuaciones que definen el proceso:

$$C_f \equiv \frac{\tau_s}{\rho(v_\infty{}^2/2)}$$

$$k_c \equiv \frac{N_A}{(c_{A,s} - c_{A,\infty})}$$

y también:

$$\mathrm{Sc} \equiv \frac{\nu}{D_{AB}}$$

en la ecuación (28-49), se puede simplificar la relación hasta quedar así:

$$\frac{1}{k_c} = \frac{2}{C_f v_\infty{}^2}[v_\infty + v_{x|\xi}(\mathrm{Sc} - 1)]$$

o, escrita de manera ligeramente distinta:

$$\frac{k_c}{v_\infty} = \frac{C_f/2}{1 + (v_{x|\xi}/v_\infty)(\mathrm{Sc} - 1)} \tag{28-50}$$

Nótese que la ecuación (28-50) simplifica la analogía de Reynolds con la siguiente restricción: Sc = 1. En el capítulo 13 se definió la subcapa laminar mediante la expresión: $v^+ = y^+ = 5$, donde $v^+ = v_{x|\xi}/(v_\infty\sqrt{c_f/2})$; por lo cual:

$$v^+ = \frac{v_{x|\xi}}{v_\infty\sqrt{C_f/2}} = 5$$

ó

$$\frac{v_{x|\xi}}{v_\infty} = 5\sqrt{\frac{C_f}{2}} \tag{28-51}$$

Cuando se sustituye el valor de $v_{x|\xi}/v_\infty$ en la ecuación (28-50) se obtiene una analogía correspondiente a la transferencia convectiva de masa, semejante a la *analogía de Prandtl* de la transferencia convectiva de calor:

$$\frac{k_c}{v_\infty} = \frac{C_f/2}{1+5\sqrt{C_f/2}(\mathrm{Sc}-1)} \tag{28-52}$$

Al reordenar y multiplicar ambos lados de la ecuación (28-52) por $v_\infty L/D_{AB}$, donde L es una longitud característica, se obtiene:

$$\frac{k_c}{v_\infty}\frac{v_\infty L}{D_{AB}} = \frac{(C_f/2)(v_\infty L/D_{AB})(\rho\mu/\rho\mu)}{1+5\sqrt{C_f/2}(\mathrm{Sc}-1)}$$

ó

$$\mathrm{Nu}_{L,AB} = \frac{(C_f/2)\mathrm{ReSc}}{1+5\sqrt{C_f/2}(\mathrm{Sc}-1)} \tag{28-53}$$

Las ecuaciones (28-52) y (28-53) son semejantes a la analogía de Prandtl de transferencia de energía-momento, ecuación (19-57).

Von Kármán amplió la analogía de Prandtl, tomando en cuenta la llamada "capa amortiguadora" además de la subcapa laminar y del núcleo turbulento. Esto lo condujo a la formación de la *analogía de von Kármán:*

$$\mathrm{Nu} = \frac{(C_f/2)\mathrm{RePr}}{1+5\sqrt{C_f/2}\{\mathrm{Pr}-1+\ln[(1+5\mathrm{Pr})/6]\}} \tag{19-58}$$

que corresponde a la transferencia de energía y momento. El análisis de von Kármán de la transferencia de masa, da origen a las ecuaciones:

$$\mathrm{Nu}_{AB} = \frac{(C_f/2)\mathrm{ReSc}}{1+5\sqrt{C_f/2}\{\mathrm{Sc}-1+\ln[(1+5\mathrm{Sc})/6]\}} \tag{28-54}$$

ó

$$\frac{k_c}{v_\infty} = \frac{C_f/2}{1+5\sqrt{C_f/2}\{\mathrm{Sc}-1+\ln[(1+5\mathrm{Sc})/6]\}} \tag{28-55}$$

Los resultados de la mayor parte de las analogías se pueden escribir en la forma general, tal como la de las ecuaciones (28-52) y (28-55), en las que el denominador del lado derecho forma un grupo complejo de términos, que sirve de corrección a la analogía simple de Reynolds.

ANALOGIA DE CHILTON-COLBURN

Chilton y Colburn* descubrieron que la mejor correlación entre los datos experimentales obtenidos en la transferencia de masa, está dada por la expresión:

$$\frac{k_c}{v_\infty} = \frac{C_f/2}{\mathrm{Sc}^{2/3}}$$

ó

$$j_D \equiv \frac{k_c}{v_\infty}(\mathrm{Sc})^{2/3} = C_f/2 \qquad (28\text{-}56)$$

Esta analogía es válida para líquidos y gases dentro de los valores $0.6<\mathrm{Sc}<2500$. El término j_D se denomina *factor j de transferencia de masa* y es análoga al factor j de transferencia de calor, definido por la ecuación (19-39). Aunque la ecuación (28-56) es una ecuación empírica basada en los datos recogidos en los regimenes de flujo laminar y turbulento, se puede demostrar que satisface la solución exacta correspondiente a un flujo laminar sobre una placa plana,

$$\mathrm{Nu}_{x,AB} = 0.332\mathrm{Re}_x^{1/2}\mathrm{Sc}^{1/3} \qquad (28\text{-}20)$$

Si se dividen ambos lados de la ecuación entre $\mathrm{Re}_x\mathrm{Sc}^{1/3}$, se obtiene:

$$\frac{\mathrm{Nu}_{x,AB}}{\mathrm{Re}_x\mathrm{Sc}^{1/3}} = \frac{0.332}{\mathrm{Re}_x^{1/2}} \qquad (28\text{-}57)$$

Esta ecuación se reduce a la *analogía de Chilton-Colburn* cuando en la expresión de arriba se sustituye la solución de Blasius correspondiente a la capa laminar límite,

$$\frac{\mathrm{Nu}_{x,AB}}{\mathrm{Re}_x\mathrm{Sc}^{1/3}} = \frac{\mathrm{Nu}_{x,AB}}{\mathrm{Re}_x\mathrm{Sc}}\mathrm{Sc}^{2/3} = \frac{C_f}{2}$$

ó

$$\left(\frac{k_c x}{D_{AB}}\right)\left(\frac{\mu}{x v_\infty \rho}\right)\left(\frac{\rho D_{AB}}{\mu}\right)(\mathrm{Sc})^{2/3} = \frac{k_c \mathrm{Sc}^{2/3}}{v_\infty} = \frac{C_f}{2} \qquad (28\text{-}58)$$

*A. P. Colburn, *Trans. A.I.Ch.E.*, 29, 174-210 (1933); T. H. Chilton y A. P. Colburn, *Ind. Eng. Chem.*, 26, 1183 (1934).

La analogía completa de Chilton-Colburn es:

$$j_H = j_D = \frac{C_f}{2} \tag{28-59}$$

la cual relaciona los tres tipos de transferencia en una sola expresión. La ecuación (28-59) es exacta para placas planas y satisfactoria cuando se emplea en sistemas cuya geometría sea diferente, a condición de que no exista ningún arrastre de forma. En sistemas en los que este último tipo de arrastre se encuentra presente, se ha encontrado que:

$$j_H = j_D \neq \frac{C_f}{2} \tag{28-60}$$

ó

$$\frac{h}{\rho v_\infty c_p} \mathrm{Pr}^{2/3} = \frac{k_c}{v_\infty} \mathrm{Sc}^{2/3} \tag{28-61}$$

La ecuación (28-61) relaciona la transferencia convectiva de calor con la de masa; permite la evaluación de un coeficiente desconocido de transferencia a través de la información obtenida para otros fenómenos de transferencia. Es válida para gases y líquidos, entre los valores: $0.6 < \mathrm{Sc} < 2{,}500$ y $0.6 < \mathrm{Pr} < 100$.

EJEMPLO 2

Fluye aire a presión atmosférica a través de un termómetro cuyo bulbo se ha cubierto con una tela húmeda. Este clásico termómetro de bulbo húmedo indica que una pequeña cantidad de líquido que se evapora en una gran cantidad de mezcla no saturada de vapor y gas, alcanza una temperatura de estado uniforme. La lectura del termómetro es de 65° F. A esta temperatura se calcularon las propiedades siguientes:

presión de vapor del agua	0.3056 psi
densidad del aire	0.076 lb_m/ft^2
calor latente de vaporización del agua	1057 Btu/lb_m
número de Prandtl	0.72
número de Schmidt	0.61
calor específico, c_p, del aire	0.24 Btu/lb_m °F

¿Cuál es la tempertura del aire seco?

La ecuación (28-1) define el flujo molar del agua que se evapora

$$N_{H_2O} = k_c(c_{H_2O,s} - c_{H_2O,\infty})$$

La energía requerida para evaporar esta agua es suministrada por transferencia convectiva de calor, o sea:

$$\frac{q}{A} = h(T_\infty - T_s) = \lambda M_{H_2O} N_{H_2O}$$

donde λ es el calor latente de vaporización a la temperatura de la superficie. Esta ecuación se puede resolver para la temperatura global:

$$T_\infty = \frac{\lambda M_{H_2O} N_{H_2O}}{h} + T_s$$

Si se sustituye la ecuación (28-1) en esta ecuación, se obtiene:

$$T_\infty = \lambda M_{H_2O} \frac{k_c}{h}(c_{H_2O,s} - c_{H_2O,\infty}) + T_s$$

Los factores j de Chilton-Colburn nos dan una relación que corresponde a la razón k_c/h:

$$j_H = j_D$$

$$\frac{h}{\rho v_\infty c_p}(\mathrm{Pr})^{2/3} = \frac{k_c}{v_\infty}(\mathrm{Sc})^{2/3}$$

$$\frac{k_c}{h} = \frac{1}{\rho c_p}\left(\frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Sc}}\right)^{2/3}$$

Cuando se sustituye esta expresión en la ecuación que se tiene, de la temperatura global, se obtiene:

$$T_\infty = \frac{\lambda M_{H_2O}}{\rho c_p}\left(\frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Sc}}\right)^{2/3}(c_{H_2O,s} - c_{H_2O,\infty}) + T_s$$

Las concentraciones son:

$$c_{H_2O,s} = \frac{\left(\frac{0.3056}{14.7}\,\mathrm{atm}\right)}{\left(0.73\frac{\mathrm{atm}\cdot \mathrm{ft}^3}{\mathrm{lb\ mole}\ ^\circ\mathrm{R}}\right)(525^\circ\mathrm{R})} = 5.42\times 10^{-5}\frac{\mathrm{lb\ mole}}{\mathrm{ft}^3}$$

$$c_{H_2O,\infty} = 0$$

Al sustituir los valores conocidos, se obtiene:

$$T = \frac{(1057\ \mathrm{Btu/lb_m})(18\ \mathrm{lb_m/lb\ mole})}{(0.076\ \mathrm{lb_m/ft^3})(0.24\ \mathrm{Btu/lb_m\ ^\circ F})}\left(\frac{0.72}{0.61}\right)^{2/3}\left(5.42\times 10^{-5}\frac{\mathrm{lb_m}}{\mathrm{ft}^3}\right) + 65^\circ\mathrm{F}$$

$$T = 128.2^\circ\mathrm{F} \quad (326\ \mathrm{K})$$

28.7 MODELOS DE COEFICIENTES DE TRANSFERENCIA DE MASA

Durante muchos años se han estado usando los coeficientes de transferencia convectiva de masa en el diseño de equipo de transferencia de masa. Sin embargo, en muchos casos han sido coeficientes empíricos determinados a partir de investigaciones experimentales. Una explicación teórica de los coeficientes requeriría de una mejor comprensión de los mecanismos de la turbulencia, ya que están directamente relacionados con las características dinámicas del flujo. En el capítulo 26, se introdujeron dos posibles modelos para explicar la transferencia convectiva de masa. Tanto la teoría de película como la de penetración se han aplicado ampliamente.

La teoría de película se basa en la presencia de una película ficticia de fluido en flujo laminar, próxima a la frontera, que ofrece una resistencia a la transferencia de masa, igual a la que existe verdaderamenre en todo el fluido en movimiento. En otras palabras, se supone que toda la resistencia a la trans-

ferencia existe en una película ficticia en la que la transferencia se realiza totalmente por medio de difusión molecular. El espesor de la película, δ, debe extenderse más allá de la subcapa laminar para incluir la resistencia equivalente que se encuentra cuando la concentración cambia dentro de la capa de amortiguamiento y el núcleo turbulento. En cuanto a la difusión a través de una capa que no se está difundiendo, o fluido estancado, esta teoría predice que el coeficiente de transferencia de masa es:

$$k_c = \frac{D_{AB}}{\delta} \frac{P}{p_{B,lm}} \tag{26-9}$$

tal como se vio en el capítulo 26. El coeficiente de transferencia de masa, correspondiente a la contradifusión equimolar, se expresó en la forma:

$$k_c^{\ 0} = \frac{D_{AB}}{\delta} \tag{26-24}$$

En ambos casos, el coeficiente de transferencia convectiva de masa se relaciona directamente con al difusividad de la masa molecular. Obviamente, el espesor de la película ficticia δ, nunca puede medirse puesto que no existe. Por esto y porque aparentemente no es adecuada para explicar físicamente la transferencia convectiva de masa, se han postulado otros modelos para describir este fenómeno.

La *teoría de la penetración* fue expuesta originalmente, por Higbie* para explicar la transferencia de masa en la fase líquida durante la absorción del gas. Danckwerts† la ha aplicado al flujo turbulento y también lo han hecho otros investigadores cuando la componente en difusión sólo penetra a corta distancia en la fase de interés a causa de su desaparición rápida por medio de una reacción química o del tiempo, relativamente corto, de contacto.

Higbie supuso que la masa se transfería a la fase líquida por medio de la transferencia molecular en estado no permanente. Con este concepto, se expresó el flujo de masa en la interfase líquido-gas, en la forma:

$$N_A = \sqrt{\frac{D_{AB}}{\pi t_{exp}}}(c_{A,s} - c_{A,\infty}) \tag{26-86}$$

Danckwerts aplicó este concepto de estado no permanente a la absorción de la componente A en una corriente turbulenta de líquido. Su modelo supone que el movimiento del líquido ocasiona constantemente remolinos de líquido nuevo del interior hacia la superficie, donde desplazan a los elementos de líquido que se encontraban anteriormente en la superficie. Mientras se encuentra en la superficie cada uno de los elementos del líquido queda expuesto a la segunda fase y se transfiere masa al líquido como si este estuviera estancado y fuera infinitamente profundo. La rapidez de transferencia depende

*R. Higbie, *Trans. A. I. Ch. E.*, 31, 368-389 (1935).
† P. V. Danckwerts, *Ind. Eng. Chem.*, 43, 1460-67 (1951).

del tiempo de exposición. Se pueden hacer muchas suposiciones respecto a la renovación de la superficie. Por ejemplo, cada uno de los elementos de la superficie puede tener el mismo tiempo de exposición antes de ser reemplazado. Esto permite suponer que la transferencia instantánea de masa ocurrirá de acuerdo con la ecuación (26-86). La cantidad total de soluto que penetra en el remolino en un tiempo de exposición igual a t_{exp}, es:

$$\int_0^{t_{exp}} N_A\,dt = (c_{A,s} - c_{A,\infty})\sqrt{\frac{D_{AB}}{\pi}}\int_0^{t_{exp}} t^{-1/2}\,dt$$

$$= 2(c_{A,s} - c_{A,\infty})\left(\frac{D_{AB}t_{exp}}{\pi}\right)^{1/2}$$

y la rapidez media de transferencia durante la exposición se obtiene dividiendo esta ecuación entre el tiempo de exposición:

$$N_A = 2(c_{A,s} - c_{A,\infty})\left(\frac{D_{AB}}{\pi t_{exp}}\right)^{1/2} \tag{28-62}$$

Danckwerts modificó la suposición de un periodo constante de exposición, proponiendo un conjunto "infinito" de valores de las edades de los elementos de la superficie. Las funciones de distribución de edades en la superficie se introdujeron para predecir la probabilidad de que un elemento de superficie sea reemplazado por un remolino con elementos nuevos. La rapidez de renovación superficial se creía constante en un cierto grado de turbulencia e igual a un factor s de renovación superficial. La rapidez de transferencia de masa con renovación superficial aleatoria es:

$$N_A = \sqrt{D_{AB}s}(c_{A,s} - c_{A,\infty}) \tag{28-63}$$

Actualmente los valores de s se obtienen por medio de investigaciones experimentales. El concepto de renovación superficial ha tenido mucho éxito en la explicación y análisis de la transferencia convectiva de masa, particularmente cuando la transferencia de masa se presenta acompañada de reacciones químicas en la fase líquida*†, pero se necesitan una considerable verificación experimental y un enorme desarrollo para definir claramente este modelo.

En este texto no se hace un estudio detallado de los coeficientes de transferencia de masa correspondientes a los sistemas que reaccionan químicamente. En el estudio que se realizó en la sección 26.2 acerca de la transferencia de masa molecular asociado con una reacción química, se demostró que la transferencia de masa depende de la constante de rapidez de la reacción química. Es de esperarse que exista una dependencia similar correspondiente al coeficiente de transferencia convectiva de masa. Existen estudios excelentes acerca de este tema*‡.

Toor y Marchello‡ señalaron que es válido el concepto de penetración de Danckwerts solamente cuando la renovación de la superficie es relativa-

*P. V. Danckwerts, *Gas-Liquid Reactions*, McGraw Hill Book Co., New York, 1970).
† G. Astarita, *Mas Transfer with Chemical Reaction*, Elsevier Publishing Co., Amsterdam, 1967.
‡ H. L. Toor y J. M. Marchello, *A. I. Ch. E. J.* 1, 97 (1958).

mente rápida, proveyendo, así, a la superficie de elementos jóvenes sobre una base continua. Para los elementos de mayor edad de la superficie, se establece un gradiente de concentración en estado permanente, tal como lo predice la teoría de película. Por esto, la rapidez de transferencia de masa debe ser directamente proporcional a la difusividad molecular de masa. Para valores pequeños del número de Schmidt el gradiente permanente de la concentración se crea muy rápidamente en cualquier elemento nuevo de superficie de tal modo que, a menos que la rapidez de renovación sea lo suficientemente grande para hacer desaparecer la enorme fracción de los elementos de la superficie antes de que se penetre en ellos, la mayor parte de los elementos de la superficie se comportarán como elementos viejos. Al aumentar el número de Schmidt, el tiempo necesario para provocar un gradiente constante, aumenta rápidamente y por esto, es suficiente una rapidez de renovación superficial pequeña para evitar que se penetre a la mayoría de los elementos, tanto jóvenes como viejos, las características de transferencia son intermedias entre los modelos de película y penetración. Los coeficientes de transferencia convectiva de masa son proporcionales a una potencia de la difusividad molecular de la masa que se encuentra entre los valores 0.5 y 1.0. Estas conclusiones están basadas en datos experimentales.

En ambos modelos: de película y de penetración, la transferencia de masa comprende una interfase entre dos fluidos en movimiento. Cuando una de las fases es un sólido, la velocidad del fluido paralela a la superficie en la interfase debe ser igual a cero, por lo cual es de esperarse que exista la necesidad de un tercer modelo, el modelo de la capa límite para correlacionar los datos correspondientes a un sólido que se sublima convirtiéndose en gas o un sólido que se disuelve, transformándose en líquido. El coeficiente promedio de transferencia de masa correspondiente a la difusión a través de una capa laminar límite, es:

$$\bar{k}_c = 0.664 \frac{D_{AB}}{L} \mathrm{Re}_L^{1/2} \mathrm{Sc}^{1/3} \qquad (28\text{-}21)$$

Esto demuestra que el coeficiente de transferencia de masa varía con $D_{AB}^{2/3}$, forma típica de los cálculos de capa límite.

28.8 CONCLUSION

En este capítulo se estudiaron los principios de transferencia de masa por convección forzada, los parámetros importantes que ayudan en la descripción de la transferencia convectiva de masa y los modelos propuestos para explicar el mecanismo de transferencia convectiva. Se ha visto que la transferencia de masa por convección está íntimamente relacionada con las características dinámicas del fluido en movimiento, particularmente con el fluido que se encuentra en la vecindad de la frontera. A causa de las grandes seme-

janzas entre los mecanismos de transferencia de momento, energía y masa, que vimos que se pudieron utilizar los mismos cuatro métodos en la evaluación de los coeficientes de transferencia convectiva de masa que se encontraron originalmente con el fin de analizar los coeficientes de transferencia convectiva de calor. En los cuatro análisis se correlacionó el coeficiente de transferencia convectiva de masa por medio de la ecuación general:

$$\mathrm{Nu}_{AB} = f(\mathrm{Re}, \mathrm{Sc})$$

La transferencia de masa hacia las corrientes turbulentas, también se estudió y se definió la difusividad de remolino de la masa. Se presentaron analogías correspondientes a la transferencia convectiva de masa hacia las corrientes turbulentas.

PROBLEMAS

28.1 En una columna de atomización de transferencia de masa, un líquido se atomiza hacia una corriente de gas y hay un intercambio de masa entre las fases líquida y gaseosa. La masa de las gotas formadas en el atomizador se considera que es función del diámetro de la tobera, de la aceleración de la gravedad, de la tensión superficial del líquido contra el gas, de la densidad del fluido, de la viscosidad y la velocidad y de la viscosidad y la densidad del medio gaseoso. Ordene estas variables en grupos adimensionales. ¿Cree usted que debían haberse incluido algunas otras variables?

28.2 Un cilindro largo de barro poroso, cuya concentración inicial de agua era de c_{A_0}, se inserta repentinamente en una corriente de aire que tiene un contenido de humedad de $c_{A,\infty}$. Si el radio del cilindro es r_o y el coeficiente promedio de transferencia de masa del cilindro a la corriente de aire es k_c, demuestre, usando el análisis dimensional, que el perfil de la concentración dentro del cilindro debe expresarse en función de los parámetros:

$$\frac{c_A(r) - c_{A,\infty}}{c_{A_0} - c_{A,\infty}} \quad \frac{r}{r_0} \quad \frac{D_{AB}}{k_c r_0} \quad \text{y} \quad \frac{D_{AB}t}{r_0^2}$$

28.3 La transferencia de masa en una capa límite turbulenta formada sobre una placa plana, está definida en función del número local de Nusselt, por medio de:

$$\mathrm{Nu}_{AB,x} = 0.0292\,\mathrm{Re}_x^{4/5}\mathrm{Sc}^{1/3}$$

Si la transición a flujo turbulento ocurre en $x = 0.6$ m y la placa es de 1.5 m de longitud y 1 m de ancho, obtenga las ecuaciones correspondientes a:

a) el coeficiente medio de transferencia de masa $\bar{k}_c$, correspondiente a toda la placa,

b) la rapidez de transferencia de masa, W_A.

28.4 Un depósito de agua de 1 ft^2 se encuentra insertado en el fondo de un gran conducto de aire. La temperatura del agua es de 100° F, creando una concentración superficial de gas, de $c_{A,s}$ de 1.577×10^{-4} lb mol/ft^3. Si 0.30 lb_m de agua se evaporan del depósito por hora cuando fluye una corriente de aire de 20 ft/seg paralela a la superficie del agua, determine el contenido de agua del aire a 1 atm y 80° F.

28.5 Grafique el coeficiente local de transferencia de masa en función de la posición cuando fluye aire seco a 350 K y 1.013×10^5 Pa de presión sobre un recipiente de 1.5 m de longitud con agua a una velocidad de 3 m/seg. Suponga que el agua se mantiene a una temperatura constante de 350 K.

28.6 Si el número local de Nusselt correspondiente a la capa laminar límite formado sobre una placa plana es:

$$Nu_{AB,x} = 0.332\, Re_x^{1/2} Sc^{1/3}$$

y el que corresponde a la capa límite turbulenta es:

$$Nu_{AB,x} = 0.0292\, Re_x^{4/5} Sc^{1/3}$$

obtenga una expresión que corresponda al coeficiente medio de transferencia de película, $\bar{k}_c$, cuando el número de Reynolds de la placa es:

a) $Re_L = 200{,}000$

b) $Re_L = 1{,}000{,}000$.

La transición de flujo laminar a turbulento tiene lugar cerca del valor $Re_x = 3 \times 10^5$.

28.7 El exceso de estireno se quita de una sábana plástica durante su fabricación, vaporizando el estireno en una corriente de nitrógeno gaseoso que fluye en forma paralela a la superficie de la sábana. La sábana es de 0.6 m de longitud en la dirección del flujo de gas a 30 m/seg. El gas está sujeto a una presión de 1.013×10^5 Pa y a una temperatura de 290 K. En estas condiciones, la difusividad del vapor de estireno en el nitrógeno es de 7×10^{-6} m^2/seg. y la presión de su vapor es de 670 Pa. Determine la rapidez de vaporización precedente de la placa.

28.8 Una cacerola con agua se coloca en un túnel de viento, donde queda expuesta a un viento que se mueve a 15 mph. La cacerola contiene agua a una profundidad uniforme de 1/2 in. y a una longitud de 12 ft en la dirección en la que sopla el viento y es muy ancha. El agua que se encuentra en la cacerola está a una temperatura constante de 65° F y la presión total sobre el sistema es de una atmósfera. En estas condiciones, la presión del vapor de agua es de 15 mm de Hg, la difusividad de la masa es de 2.8×10^{-4} ft^2/seg y la viscosidad cinemática del aire es de 1.7×10^{-4} ft^2/seg. El número local de Nusselt que corresponde a la capa laminar límite es:

$$Nu_{AB,x} = 0.332\, Re_x^{1/2} Sc^{1/3}$$

y la capa límite turbulenta es:

$$Nu_{AB,x} = 0.0292\, Re_x^{4/5} Sc^{1/3}$$

Cerca de $Re_x = 3 \times 10^5$ ocurre la transición de flujo laminar a turbulento. Encuentre la longitud que se requiere para que toda el agua se evapore.

28.9 Al utilizar la solución aproximada de von Kármán para resolver la capa laminar límite de concentración, debe suponerse un perfil de concentración. La ecuación (28-35) se obtuvo mediante un perfil de concentración en la forma de serie de potencias:

$$c_A - c_{A,s} = a + by + cy^2 + dy^3$$

Aplique las condiciones de frontera correspondientes a una capa laminar límite de concentración y evalúe las constantes a, b, c y d.

28.10 Suponiendo que existen una distribución lineal de la velocidad y un perfil lineal de la concentración en la capa laminar límite, sobre una placa plana:

a) Obtenga las ecuaciones del perfil de la velocidad y de la concentración.

b) Se puede demostrar, aplicando la ecuación integral de von Kármán de momento, que el esfuerzo cortante en la pared es:

$$\frac{\tau_s}{\rho} = \frac{1}{6} v_\infty{}^2 \frac{d\delta}{dx}$$

Use esta relación, así como la ecuación integral de von Kármán de la concentración, para obtener una relación entre el espesor hidrodinámico de la capa límite, δ, el grosor de la capa límite de concentración, δ_c y el número de Schmidt.

28.11 Se ha propuesto un perfil de concentración de la forma $c_A - c_{A,s} = a$ sen by, para ser utilizado en la expresión integral encontrada para la capa límite de concentración.

a) ¿Cuáles son las condiciones de frontera necesarias para la evaluación de las constantes a y b?

b) ¿Cuál es la expresión completa para $c_A - c_{A,s}$ que resulta de la aplicación de estas condiciones de frontera?

c) ¿Es correcta esta selección del perfil de concentración? ¿Por qué razones?

28.12 Se ha propuesto un perfil de concentración de la forma:

$$c_A - c_{A,s} = aye^{by}$$

para ser utilizado en la expresión integral de von Kármán obtenida para la capa límite de concentración. ¿Es correcta la selección del perfil propuesto para la concentración? ¿Por qué?

28.13 Dadas las expresiones correspondientes a los perfiles de velocidad y concentración en el caso de una capa límite turbulenta sobre una placa plana:

$$v_x = \alpha + \beta y^{1/7}$$

y

$$c_A - c_{A,\infty} = \eta + \xi y^{1/7}$$

donde α, β, η, y ξ son las constantes que se van a determinar a partir de las condiciones apropiadas de frontera, verifique las expresiones siguientes:

a) El espesor de la capa límite:

$$\delta_c = 0.376x(\mathrm{Re}_x)^{-1/5}$$

b) El coeficiente local de transferencia de masa:

$$k_c = 0.0292v_\infty(\mathrm{Re}_x)^{-1/5}$$

Sugerencia: Recuerde, tal como aparece en el capítulo 13, que en la capa límite turbulenta:

$$\frac{\tau_s}{\rho} = 0.0225v_\infty{}^2\left(\frac{\nu}{v_\infty\delta}\right)^{1/4}$$

28.14 Por medio del análisis integral aproximado de la capa límite de concentración, obtenga la ecuación integral apropiada de transferencia de masa donde una placa ablativa bajo convección forzada; esto es, un flujo permanente, incompresible, bidimensional sobre una superficie plana y porosa a través de la cual se inyecta un fluido con una velocidad v_{yo} normal a la superficie.

28.15 Seider y Tate correlacionaron sus datos, correspondientes a la transferencia de calor de un flujo laminar en tubos por medio de la ecuación:

$$\mathrm{Nu}_L = 1.86\left(\mathrm{Pe}\frac{D}{L}\right)^{1/3}$$

donde Pe = RePr. Esta ecuación satisfizo los datos cuando se podían despreciar los efectos de la variación en la viscosidad. La intuición sugiere que la ecuación similar correspondiente a la transferencia de masa hacia un flujo laminar en tubos, debe ser:

$$\mathrm{Nu}_{L,AB} = 1.86\left(\mathrm{ReSc}\frac{D}{L}\right)^{1/3}$$

Use la analogía de Chilton-Colburn, $j_H = j_D$, para encontrar una ecuación que corresponda a $\mathrm{Nu}_{L,AB}$ para un flujo laminar en tubos. ¿Es correcta la ecuación anterior?

28.16 Una placa plana, delgada, cuadrada, de 6 in por lado se prueba para determinar su arrastre en un túnel de viento con aire a 100 pps, 1 atm y 100° F, que fluye paralelamente y a lo largo de las superficies superior e inferior. El arrastre total observado es de 0.025 lb_f. Calcule la rapidez de transferencia de masa desde la placa. La difusividad de la naftalina en aire a 32° F y 1 atm es de 0.199 ft^2/h y la presión del vapor de naftalina a 100° F es de 0.25 mm de Hg.

28.17 Si el coeficiente de transferencia de calor que corresponde al flujo de aire sobre un cuerpo de forma aerodinámica, es de 3 Btu/(h)(ft^2)(° F) a cierta velocidad de la masa, determine el flujo de la masa, de un cuerpo de forma idéntica, hecho de naftalina, hacia una corriente de aire que fluye con la misma velocidad de la masa. Sobre el cuerpo fluirá aire a 100° C, esencialmente libre de naftalina. A 100° C, la presión de vapor de naftalina es de 20 mm de Hg, la difusividad del vapor de naftalina en aire es de 0.37 ft^2/h, la viscosidad cinemática del aire es de 0.932 ft^2/h y la difusividad térmica del aire es de 1.3 ft^2/h.

28.18 Entra aire seco a 1 atm de presión en un tubo de 20 ft de longitud y 6 in de diámetro a 100° F y 5 ft/seg. La superficie interior del tubo está cubierta con un material afelpado (razón de diámetro a rugosidad $D/e = 10{,}000$), que está continuamente saturado de agua a 60° F. Suponiendo que el aire y el tubo tienen una temperatura constante, determine la cantidad de agua que se requiere para mantener saturado continuamente el material afelpado. Es importante darse cuenta de que la composición global de la corriente de gas estará aumentando continuamente con la longitud.

28.19 Una placa delgada de naftalina sólida se encuentra orientada en forma paralela a una corriente de aire que fluye a 30 m/seg. El aire está a 310 K y 1.013×10^5 Pa de presión y la placa a 300 K. Determine la rapidez de sublimación de la placa. La difusividad de la naftalina en aire a 273 K y 1.013×10^5 Pa es de 5.14×10^{-6} m^2/seg. y la presión del vapor de naftalina a 300 K es de 26 Pa.

28.20 Fluye agua a 70° F a través de un tubo de 2 in DI a una velocidad promedio de 10 pps. Una sección de 2 ft del tubo se reemplaza con un tubo de cloruro de sodio sólido. Compara el coeficiente de transferencia de masa del cloruro de sodio en agua, usando las formas de transferencia de masa de:

a) la analogía de Prandtl

b) la analogía de von Kármán,

c) la analogía de Chilton.

28.21 Pasa aire a través de un tubo de naftalina cuyo diámetro interior es de 1 in, a una velocidad global de 50 p/seg. El aire está a 50° F y a una presión a 1 atm. Suponiendo que el cambio de presión a lo largo del tubo es despreciable y que la superficie de la naftalina está a 50° F, determine la longitud del tubo necesario para producir concentración

de naftalina en la corriente emergente de gas, de 3.7×10^{-8} lb mol/ft^3. A 50° F la naftalina posee una presión de vapor de 0.0209 mm de Hg y una difusividad en el aire de 0.20 ft^2/h.

28.22 Si la longitud del tubo descrito en el problema 28.21 hubiera sido de 6 ft, encuentre la rapidez de sublimación de la naftalina del tubo en lb_m/h.

28.23 Varias capas delgadas de naftalina, de 0.1 in de grosor y 4 in de lado se encuentran ordenadas en forma mutuamente paralela con sus centros a intervalos de 1/2 in. En este "emparedado", entra aire a 32° F y 1 atm, con una velocidad global de 50 pps. A 32° F, la difusividad molecular correspondiente a la naftalina en aire es de 0.199 ft^2/h, el número de Schmidt es 2.57 y la presión del vapor de naftalina es de 0.0059 mm de Hg. Determine la concentración de la naftalina en el aire cuando abandona el emparedado, usando las formas de transferencia de masa de las analogías de:

a) Reynolds,
b) Prandtl,
c) von Kármán,
d) Chilton-Colburn.

Determine la longitud del intervalo de tiempo que deben permanecer expuestas las capas antes de que la mitad de su masa se sublime en estas condiciones.

28.24 Monrad y Pelton* encontraron la siguiente correlación entre coeficientes de transferencia de calor correspondientes a agua y aire en un espacio anular:

$$\frac{h_i}{c_p G} = 0.023\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^{0.5}\left(\frac{D_e G}{\mu}\right)^{-0.2}\left(\frac{c_p \mu}{k}\right)^{-2/3}$$

donde D_1 es el diámetro interno del anillo; D_2 el diámetro externo del mismo, D_e el diámetro equivalente del anillo y h_i el coeficiente de transferencia de calor de la pared interior del anillo.

Al estudiar la rapidez de difusión de la naftalina en aire, un investigador reemplazó una sección interior de 1 pie del tubo con una barra de naftalina. El anillo estaba formada por un tubo de bronce de 2 in, DE rodeado de otro tubo de bronce de 3 in DI. Mientras operaba a una velocidad de masa, dentro del anillo, de 2.5 lb_m aire/seg ft^2 y a 1 atm de presión y 32° F, el investigador determinó que la presión parcial de la naftalina en la corriente saliente de gas era de 0.003 mm. En las condiciones en las que se realizó la investigación, el número de Schmidt del aire era de 2.57, la viscosidad del mismo, de 0.0175 centipoises y la presión del vapor de naftalina era de 10 mm. Determine el coeficiente de la película individual de gas predicho a partir de estos datos.

*C. C. Monrad y J. F. Pelton, *Trans. A. I. Ch. E.*, 38, 593 (1942).

28.25 Los siguientes datos se obtuvieron para un gas que fluia en el interior de un cilindro cortado en un bloque de naftalina:

Re	c_f
1.0×10^4	0.0080
5.0×10^4	0.0061
1.0×10^5	0.0050
5.0×10^5	0.0044
1.0×10^6	0.0041
5.0×10^6	0.0040
1.0×10^7	0.0040

Si el aire que fluye en un cilindro de naftalina cuyo diámetro interior es de 5 cm a una velocidad de 15 m/seg y a una temperatura de 350 K, ¿cuál será la rapidez de transferencia de masa de la naftalina a la corriente de aire por unidad superficial de área del cilindro? La difusividad de la naftalina en el aire a 273 K y 1.013×10^5 Pa es de 5.14×10^{-6} m^2/seg y la presión del vapor de naftalina a 350 K es de 466 Pa.

28.26 El diámetro de una gotita de agua que cae a través de aire seco en una torre atomizadora de secado se reduce de 1 mm a 0.2 mm. Se calcula que la gota cae con una velocidad promedio de 8.4 ft/seg. Determine la temperatura superficial de la gota de agua, usando las siguientes propiedades del aire a 100° F y del sistema aire-agua:

Número de Prandtl	=	0.72
Número de Schmidt	=	0.61
densidad del aire	=	0.072 lb_m/ft^3
viscosidad del aire	=	0.018 centipoises
conductividad térmica del aire	=	0.014 Btu/(h)(ft^2)(° F/ft)
calor específico del aire	=	0.24 Btu/(lb_m)(° F)

28.27 Una bolsa de agua, del tipo utilizado usualmente para almacenar agua en los lugares desérticos, está hecho de tela porosa. Una pequeña cantidad de agua se difunde en la tela y se evapora de su superficie. La evaporación del agua enfría la superficie de la bolsa y se establece una fuerza impulsora de la temperatura. Determine la temperatura ambiente del aire, suponiendo los valores siguientes:

temperatura superficial de la bolsa	65° F
número de Prandtl	0.72
número de Schmidt	0.61
densidad del aire	0.072 lb_m/ft^3
viscosidad del aire	0.018 centipoises
conductividad térmica del aire	0.014 Btu/h ft^2(° F/ft)
calor específico del aire	0.24 Btu/(lb_m)(° F)
v_∞	0.5 mph

calor latente de vaporización del agua	1056 Btu/lb_m
presión del vapor de agua	0.31 psi
presión parcial del agua en el aire ambiente	8 mm

28.28 Si en un tubo $\epsilon_M = \epsilon_H = \epsilon_D$ determine las condiciones necesarias para que la velolocidad, la temperatura y las concentraciones sean completamente similares.

28.29 Sherwood y Woertz* obtuvieron los siguientes datos acerca de la concentración de vapor de agua en una corriente turbulenta de bióxido de carbono, fluyendo con un número de Reynolds de 102,000 a través de un conducto de 5.06 cm de ancho:

Posición, en cm, a la pared de agua	*Presión parcial del agua en mm de Hg.*
0 (pared de agua)	21.12
0.27	17.14
0.43	17.00
1.08	16.58
1.72	16.08
2.37	15.74
2.69	15.49
3.34	15.12
4.63	14.27
4.79	13.90
5.06 (pared de salmuera)	9.54

Se transfirió agua con rapidez constante de 7.14 g/min, desde una pared vertical cubierta con agua, hacia la pared opuesta, cubierta con una película fuerte de solución de $Ca\,Cl_2$. El área total de la sección transversal era de 12,630 cm^2 y la temperatura a la que se llevó a cabo el experimento era de 23° C.

a) Haga una gráfica de la presión parcial del agua contra su posición en el conducto y calcule el valor de la difusividad del remolino de la porción central principal en la cual el gradiente es, esencialmente, una línea recta.

b) ¿Qué fracción de la resistencia total a la transferencia de vapor de agua ofrece el núcleo turbulento principal?

28.30 Fluye aire a 100° F y 1 atm de presión sobre una bola de naftalina. Como la naftalina ejerce una presión de vapor de 5 mm de Hg a 100° F se sublimará incorporándose al aire circundante, que posee una concentración despreciable de naftalina en su corriente global. En las condiciones especificadas de flujo, se encontró que el coeficiente de transferencia

*T. K. Sherwood y B. B. Woertz, *Ind. Chem. Eng.*, 31, 1054 (1939).

de calor era de 25 Btu/(h)(ft^2)(° F). Las propiedades físicas a la temperatura de la película son:

difusividad de la masa	0.37 ft^2/h
viscosidad cinemática del aire	0.651 ft^2/h
difusividad térmica del aire	0.92 ft^2/h
densidad del aire	0.071 lb_m/ft^3
capacidad calorífica del aire	0.24 Btu/(lb_m)(° F)
conductividad térmica del aire	0.0156 Btu/(h)(ft)(° F)

Determine el flujo de masa de la naftalina.

29
TRANSFERENCIA DE MASA EN UNA INTERFASE

En los capítulos anteriores se estudió la transferencia de masa en una sola fase. Sin embargo, muchas operaciones de transferencia de masa consisten en la transferencia de material entre dos fases. Estas fases pueden ser: una corriente de gas que hace contacto con un líquido, dos corrientes de gases no miscibles o un fluido circulando alrededor de un sólido. En este capítulo se estudiará el mecanismo de transferencia de masa en estado permanente entre fases. En el capítulo 30 se presentan las ecuaciones empíricas con coeficientes de transferencia de masa correspondientes a la transferencia interfase, obtenidas a partir de investigaciones experimentales y el capítulo 31 explica los métodos utilizados para aplicar conceptos de interfase al diseño de equipo de transferencia de masa.

29.1 EQUILIBRIO

Se ha demostrado que la transferencia de masa por medio de mecanismos de transferencia molecular o convectiva depende directamente del gradiente de concentración de la especie en difusión en una sola fase. Cuando se establece el equilibrio, los valores del gradiente de concentración y, a su vez de la rapidez neta de difusión de la especie en difusión, se hacen cero en la fase. La transferencia entre dos fases también requiere de un alejamiento del equilibrio entre las concentraciones promedio o global, en cada una de las fases. Como la desviación del equilibrio nos da el gradiente de concentración en una fase, es necesario tomar en cuenta los equilibrios interfase para poder describir la transferencia de masa interfase.

Es conveniente estudiar las características de equilibrio de un sistema particular y después generalizar los resultados para otros sistemas. Consideremos un sistema de dos fases que incluye un gas en contacto con un líquido.

Para poder estudiar mejor estas características, permitiremos que la composición del sistema inicial incluya aire y amoniaco en la fase gaseosa y solamente agua en fase líquida. Cuando se ponen inicialmente en contacto, el amoniaco se transfiere al agua, en la cual es soluble y el agua se vaporiza pasando a la fase gaseosa. Si la mezcla de gas y líquido se encuentra dentro de un recipiente isotérmico e isobárico, finalmente se alcanzará un estado de equilibrio dinámico entre ambas fases. Una parte de las moléculas que entran en la fase líquida regresa a la fase gaseosa con una rapidez que depende de la concentración de amoniaco en la fase líquida y la presión de vapor ejercida por el amoniaco de la solución acuosa. En forma semejante, una porción del agua que se vaporiza, pasando a la fase gaseosa se condensa de nuevo regresando a la solución. El equilibrio dinámico está indicado por una concentración constante de amoniaco en la fase líquida y una concentración constante, o presión parcial constante de amoniaco en la fase gaseosa.

Esta condición de equilibrio se puede alterar agregando más amoniaco al recipiente isotérmico o isobárico. Después de cierto periodo se alcanzará un nuevo equilibrio dinámico con una concentración de amonicaco diferente en el líquido y una presión parcial de amoniaco distinta en el gas. Lógicamente, se podría continuar agregando amoniaco al sistema, alcanzado cada vez, un nuevo equilibrio. En la figura 29.1 aparece una curva de equilibrio que muestra la relación entre la concentración del soluto en la fase líquida y

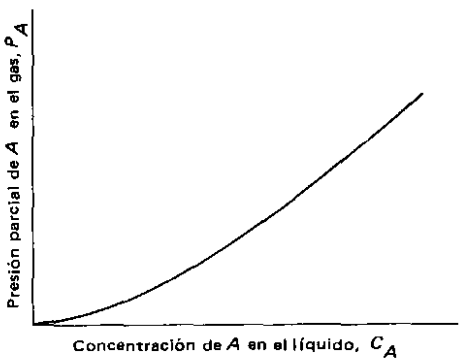


Figura 29.1 Distribución de equilibrio del soluto A entre las fases gaseosa y líquida a la temperatura de control.

la presión parcial del soluto en la fase gaseosa. Existen muchas formas gráficas de datos de equilibrio, debido a la diversidad de maneras de expresar las concentraciones en cada una de las fases. Se utilizarán diversas clases de gráficas de equilibrio en el capítulo 31.

Las ecuaciones que relacionan las concentraciones de equilibrio de las dos fases ya se han encontrado y están contenidas en los textos de termodinámica. En el caso de fluidos no ideales en fase gaseosa o líquida, las relaciones,

generalmente, son complicadas. Sin embargo, en los casos que incluyen fluidos ideales en fase gaseosa y líquida, se conocen algunas relaciones razonablemente simples y sin embargo útiles. Por ejemplo, cuando la fase líquida es ideal, es válida la ley de Raoult:

$$p_{A,i} = x_A P_A \tag{29-1}$$

en la cual $p_{A,i}$ es la presión parcial de equilibrio de la componente A en la fase de vapor que se encuentra sobre la fase líquida; x_A es la fracción molar de A en la fase líquida y P_A es la presión del vapor de A pura a la temperatura de equilibrio. Cuando la fase gaseosa es ideal se cumple la ley de Dalton:

$$p_{A,i} = y_A P \tag{29-2}$$

donde y_A es la fracción molar de A en la fase gaseosa y P es la presión total del sistema. Cuando ambas fases son ideales, las dos ecuaciones se pueden combinar para obtener una relación entre los términos de concentración x_A e y_A. La ley combinada de equilibrio de Raoult-Dalton establece que:

$$y_A P = x_A P_A \tag{29-3}$$

Otra relación de equilibrio que se cumple en las soluciones diluidas es la *ley de Henry*. Esta ley se expresa así:

$$p_{A,i} = H c_{A,i} \tag{29-4}$$

donde H es la constante de la ley de Henry y $c_{A,i}$ es la composición de equilibrio de A en la fase líquida. Hay una ecuación semejante a la ley de Henry que describe la distribución de un soluto entre dos líquidos no miscibles. Esta ecuación, llamada "ley de distribución",

$$c_{A,\text{líquido 1}} = K c_{A,\text{líquido 2}} \tag{29-5}$$

donde c_A es la concentración del soluto A en la fase líquida especificada y K es el coeficiente de distribución.

Debe dejarse a los libros de termodinámica la tarea de exponer, en su totalidad, los equilibrios y sus relaciones. Sin embargo, los conceptos que aparecen a continuación son los conceptos básicos comunes a todos los sistemas que se relacionan con la distribución de una componente entre dos fases y describen la transferencia interfase de masa.

1. Cuando se tiene un conjunto fijo de condiciones tales como temperatura y presión, la regla de Gibbs de la fase establece que existe un conjunto de relaciones de equilibrio que se puede mostrar en forma de curva de distribución de equilibrio.

2. Cuando un sistema se encuentra en equilibrio, no hay transferencia neta de masa entre las fases.

3. Cuando un sistema no se encuentra en equilibrio la componente o componentes del sistema se transferirán de tal manera que hagan que la composición del sistema se acerque al equilibrio. Si se deja transcurrir el tiempo suficiente, el sistema alcanzará, finalmente, el equilibrio.

Los ejemplos que se dan a continuación explican la aplicación de las relaciones de equilibrio para determinar las composiciones de equilibrio.

EJEMPLO 1

La relación combinada de Raoult-Dalton de equilibrio, se puede utilizar para determinar la composición de las fases en el sistema binario: benceno-tolueno a presiones y temperaturas bajas. Determínese la composición del vapor en equilibrio con un líquido que contiene una fracción molar de benceno de 0.6 a 68° F.

Las presiones parciales del benceno y del tolueno se calcularán usando la ecuación (29-1):

$$p_{B,i} = x_B P_B \qquad \text{y} \qquad p_{T,i} = x_T P_T$$

A 68° F, las presiones de vapor son las siguientes:

$$P_B = 0.0986 \text{ atm}$$

y

$$P_T = 0.0297 \text{ atm}$$

por lo tanto

$$p_{B,i} = 0.6(0.0986) = 0.059 \text{ atm}$$

y

$$p_{T,i} = 0.4(0.0297) = 0.012 \text{ atm}$$

Tal como lo indica la ley de Dalton, la presión total es la suma de las presiones parciales,

$$P = 0.059 + 0.012 = 0.071 \text{ atm}$$

Ahora se puede calcular la composición del vapor, usando la ecuación (29-2):

$$y_B = \frac{p_{B,i}}{P} = \frac{0.059}{0.071} = 0.83$$

$$y_T = \frac{p_{T,i}}{P} = \frac{0.012}{0.071} = 0.17$$

EJEMPLO 2

La constante de la ley de Henry, correspondiente al oxígeno disuelto en agua es: 4.01×10^4 atm/fracción molar a 20°C. Determínese la concentración de saturación del oxígeno en agua expuesta a aire seco a 1 atm y 20°C.

La ley de Henry se puede expresar en función de las unidades de fracción molar, por medio de:

$$p_{A,i} = H' x_{A,i}$$

donde H' es igual a 4.01×10^4 atm/fracción molar o 4.06×10^9 Pa/moles de O_2 por número total de moles de solución.

Si se vuelve a leer el ejemplo 24.1, se observará que el aire seco contiene 21 moles por ciento de oxígeno. De acuerdo con la ley de Dalton:

$$p_{A,i} = y_A P = 0.21(1.013 \times 10^5 \text{ Pa}) = 2.13 \times 10^4 \text{ Pa}$$

La fracción molar del líquido en la intercara se determina mediante la ley de Henry:

$$x_{A,i} = \frac{p_{A,i}}{H'} = \frac{2.13 \times 10^4}{4.06 \times 10^9} = 5.25 \times 10^{-6} \frac{\text{mol } O_2}{\text{mol soln}}$$

En un metro de solución muy diluida, los moles de agua contenidos en esta última serán, aproximadamente:

$$n_{H_2O} = (1 \text{ m}^3)(1 \times 10^3 \text{ kg } H_2O/\text{m}^3)\left(\frac{1}{0.018 \text{ kg/mol}}\right)$$

$$= 5.56 \times 10^4 \text{ mol}$$

El número total de moles en la solución es, esencialmente, igual al número de moles de agua, ya que la concentración de oxígeno es muy baja, por lo cual, los moles de oxígeno en un metro cúbico de solución serán:

$$n_{H_2O} = (5.25 \times 10^{-6} \text{ mol } O_2/\text{mol soln})(5.56 \times 10^4 \text{ mol soln})$$

$$= 0.292 \text{ mol of } O_2$$

La concentración de saturación es:

$$(0.292 \text{ mol/m}^3)(0.032 \text{ kg/mol}) = 9.34 \times 10^{-4} \text{ kg } O_2/\text{m}^3 \qquad (9.34 \text{ mg/liter})$$

29.2 TEORIA DE LAS DOS RESISTENCIAS

La transferencia interfase de masa incluye tres pasos de transferencia, la transferencia de masa de las condiciones globales de una fase a la superficie interfacial, la transferencia a través de la intercara, a la segunda fase y, finalmente, la transferencia de las condiciones globales de la segunda fase. A menudo se utiliza una teoría de dos resistencias, sugerida por Whitman,* para explicar este proceso. La teoría utiliza dos suposiciones principales: que la rapidez de transferencia de masa entre las dos fases está controlado por la rapidez de difusión a través de las fases que se encuentran en ambos lados de la intercara y que no hay ninguna resistencia a la transferencia de la composición en difusión a través de la intercara. La transferencia de la componente A de la fase gaseosa a la líquida se puede observar gráficamente en la figura 29.2, con un gradiente de presión parcial de la composición global gaseosa, $p_{A,G}$, a la composición interfacial de gas, $p_{A,i}$ y un gradiente de concentración en el líquido, de $c_{A,L}$. Si no existe resistencia alguna en la superficie inter-

*W. G. Whitman. *Chem Met. Engr*, **29**, (4), 147 (1923).

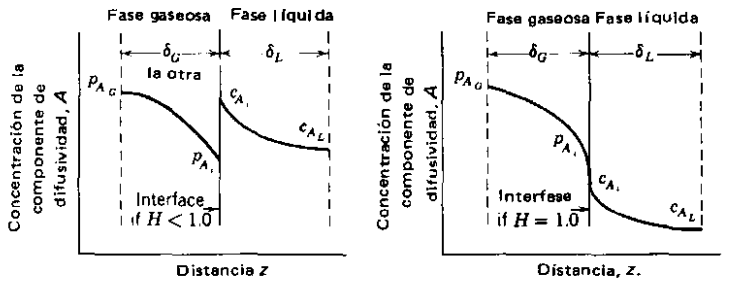


Figura 29.2 Gradientes de concentración entre dos fases en contacto.

facial $p_{A,I}$ y $c_{A,i}$ son concentraciones de equilibrio; estos son los valores de la concentración que se obtendrían si las dos fases hubieran estado en contacto durante un periodo infinito de tiempo. Las concentraciones $p_{A,i}$ y $c_{A,i}$ se encuentran relacionadas por medio de relaciones termodinámicas, tal como se explicó en la sección 29.1. La presión parcial interfacial, $p_{A,I}$, puede ser menor, igual o mayor que $c_{A,i}$, dependiendo de las condiciones de equilibrio a la temperatura y presión del sistema. Cuando la transferencia se realiza de la fase líquida a la gaseosa, $c_{A,L}$ será mayor que $c_{A,i}$ y $p_{A,I}$ será mayor que $p_{A,G}$.

COEFICIENTES INDIVIDUALES DE TRANSFERENCIA DE MASA

Si se restringe este estudio a la transferencia en estado permanente de la componente A, la rapidez de difusión se puede describir en la dirección de z en ambos lados de la intercara, por medio de las ecuaciones

$$N_{A,z} = k_G(p_{A,G} - p_{A,i}) \tag{26-6}$$

y

$$N_{A,z} = k_L(c_{A,i} - c_{A,L}) \tag{27-7}$$

donde k_G es el *coeficiente de transferencia convectiva de masa en la fase gaseosa*, en moles transferidos de A/(tiempo)(área interfacial)(Δp unidades de concentración) y k_L es el *coeficiente de transferencia convectiva de masa en la fase líquida*, en moles transferidos de A/(tiempo)(área interfacial)(Δc unidades de concentración). La diferencia de presión parcial $p_{A,G} - p_{A,i}$ es la fuerza motriz necesaria para transferir la componente A de las condiciones globales gaseosas a la intercara que separa ambas fases. La diferencia de concentración, $c_{A,i} - c_{A,L}$, es la fuerza impulsora necesaria para continuar la transferencia de A a la fase líquida.

En condiciones de estado permanente, el flujo de masa en una fase debe ser igual al flujo de masa en la segunda fase. Si se combinan las ecuaciones (29-6) y (29-7) se obtiene:

$$N_{A,z} = k_G(p_{A,G} - p_{A,i}) = -k_L(c_{A,L} - c_{A,i}) \tag{29-8}$$

La razón de ambos coeficientes de transferencia de masa se puede obtener a partir de la ecuación (29-8), por medio de un reordenamiento quedando:

$$-\frac{k_L}{k_G}=\frac{p_{A,G}-p_{A,i}}{c_{A,L}-c_{A,i}} \tag{29-9}$$

En la figura 29.3 aparece la aplicación de la ecuación (29-9), en la evaluación de las composiciones interfaciales correspondientes a un conjunto específico de composiciones globales, tal como las representa el punto *O*. Dicho punto representa las condiciones existentes en un plano, en un cambiador de masa. Las condiciones existentes en otro plano podrían ser totalmente diferentes.

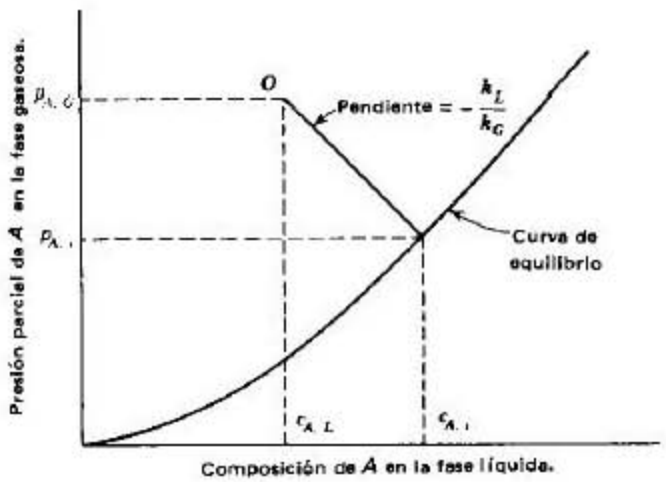


Figura 29.3 Composiciones interfaciales tal como las predice la teoría de las dos resistencias.

En la tabla 29.1 se encuentra una lista de los coeficientes más comunes de transferencia de masa en fases individuales. El superíndice cero en el coeficiente de transferencia de masa, correspondiente a la contradifusión equimolar, se utiliza para significar que no hay transferencia alguna de masa a la fase, tal como lo indica la ecuación (26-24). Es importante notar que existen muchos otros coeficientes que corresponden a otras situaciones específicas de transferencia de masa. Por ejemplo, cuando $N_A = -2N_B$, etc. Esta tabla puede resultar útil para explicar la razón por la cual existen tantas unidades diferentes para los coeficientes individuales.

COEFICIENTES TOTALES DE TRANSFERENCIA DE MASA

Es muy difícil medir físicamente la presión parcial y la concentración en la intercara. Por lo tanto, es conveniente emplear coeficientes totales basados en una fuerza impulsora total entre las composiciones globales $p_{A,G}$ y $c_{A,L}$. Este método es semejante al utilizado en el capítulo 15 cuando se definió

Tabla 29.1 Coeficientes individuales de transferencia de masa

Fase gaseosa

Ecuación de rapidez		*Unidades de los coeficientes*
Difusión de A a través de B, que no está en difusión	Contradifusión equimolar	
$N_A = k_G\,\Delta p_A$	$N_A = k_G^{0}\,\Delta p_A$	$\dfrac{\text{Moles transferidos de } A}{\text{(tiempo)(área)(presión)}}$
$N_A = k_c\,\Delta c_A$	$N_A = k_c^{0}\,\Delta c_A$	$\dfrac{\text{Moles transferidos de } A}{\text{(tiempo)(área)(mol/volumen)}}$
$N_A = k_y\,\Delta y_A$	$N_A = k_y^{0}\,\Delta y_A$	$\dfrac{\text{Moles transferidos de } A}{\text{(tiempo)(área)(fracción molar)}}$
$N_A = k_Y\,\Delta Y_A$		$\dfrac{\text{Moles transferidos de } A}{\text{(tiempo)(área)(moles de } A\text{/moles de } B)}$
$N_A = k_{\mathcal{H}}\,\Delta \mathcal{H}_A$		$\dfrac{\text{Masa transferida de } A}{\text{(tiempo)(área)(masa de } A\text{/masa de } B)}$

$$k_G = \frac{k_y}{P} = \frac{k_c}{RT} \qquad k_G^{0} = \frac{k_G p_{B,lm}}{P}$$

$$k_G^{0} = \frac{k_y^{0}}{P} = \frac{k_c^{0}}{RT} \qquad k_y^{0} = k_y \frac{p_{B,lm}}{P}$$

$\mathcal{H}$ = humedad específica $\qquad k_c^{0} = k_c \frac{p_{B,lm}}{P} = k_c \frac{c_{B,lm}}{c}$.

Fase líquida

Ecuación de rapidez		*Unidades de los coeficientes*
Difusión de A a través de B, que no está en difusión	Contradifusión equimolar	
$N_A = k_L\,\Delta c_A$	$N_A = k_L^{0}\,\Delta c_A$	$\dfrac{\text{Moles transferidos de } A}{\text{(tiempo)(área)(moles/volumen)}}$
$N_A = k_x\,\Delta x_A$	$N_A = k_x^{0}\,\Delta x_A$	$\dfrac{\text{Moles transferidos de } A}{\text{(tiempo)(área)(fracción molar)}}$

Tabla 29-Continuación

$k_L = \frac{k_x}{c}$	$k_L^0 = k_L \frac{c_{B,im}}{c} = k_L x_{B,im}$
$k_L^0 = \frac{k_x^0}{c}$	$k_x^0 = k_x x_{B,im}$

el coeficiente total de transferencia de calor, U. Se puede definir un *coeficiente total de transferencia de masa* en función de una fuerza impulsora de presión parcial. Este coeficiente k_G, debe explicar toda la resistencia a la difusión en ambas fases y está definido así:

$$N_A = K_G(p_{A,G} - p_A^*) \tag{29-10}$$

donde $p_{A,G}$ es la composición global en la fase gaseosa; p_A^* es la presión parcial de A en equilibrio con la composición global en la fase líquida, $c_{A,L}$, y k_G es el coeficiente total de transferencia de masa basado en una fuerza impulsora de presión parcial en moles transferidos de A/(tiempo)(área interfacial)(presión). Como la distribución de equilibrio del soluto A entre las fases gaseosa y líquida es único a la temperatura y presión del sistema, entonces p_A^*, en equilibrio con $c_{A,L}$, es tan buena medición de $c_{A,L}$ como la misma $c_{A,L}$ y se basa en el mismo principio que $p_{A,G}$. Un coeficiente total de transferencia de masa, k_L, incluyendo la resistencia a la difusión en ambas fases en función de la fuerza impusora de la fase líquida, se define así:

$$N_A = K_L(c_A^* - c_{A,L}) \tag{29-11}$$

donde c_A^* es la concentración de A en equilibrio con $p_{A,G}$ y, por lo tanto, es una medida aceptable de $p_{A,G}$; K_L es el coeficiente de transferencia de masa basado en una fuerza impulsora de la concentración del líquido en moles transferidos de A/(tiempo)(área interfacial)(moles/volumen). En la figura 29.4 pueden apreciarse las fuerzas impulsoras o matrices asociadas con cada una de las fases y con las fuerzas impulsoras totales. La razón de la resistencia que existe en una fase individual a la resistencia total, se puede determinar mediante las ecuaciones:

$$\frac{\text{resistencia en la fase gaseosa}}{\text{resistencia total en ambas fases}} = \frac{\Delta p_{\text{película gaseosa}}}{\Delta p_{A,\text{total}}} = \frac{1/k_G}{1/K_G} \tag{29-12}$$

y

$$\frac{\text{resistencia en la fase líquida}}{\text{resistencia total en ambas fases}} = \frac{\Delta c_{A,\text{película líquida}}}{\Delta c_{A,\text{total}}} = \frac{1/k_L}{1/K_L} \tag{29-13}$$

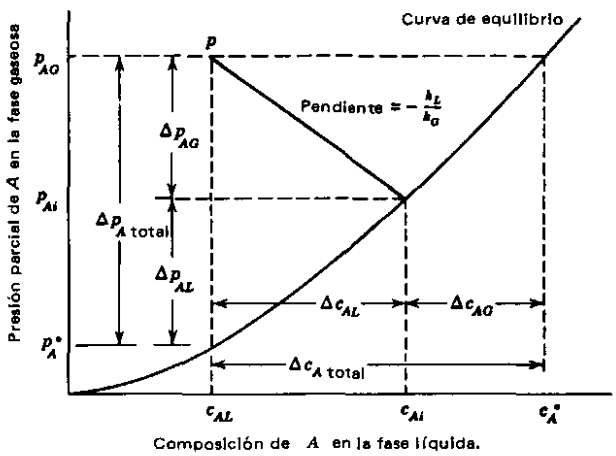


Figura 29.4 Fuerzas motrices de concentración correspondiente a la teoría de las dos resistencias.

Se puede obtener una relación entre estos coeficientes totales y los coeficientes correspondientes a las fases individuales cuando la relación de equilibrio es lineal tal como lo expresa la relación:

$$p_{A,i} = mc_{A,i} \tag{29-14}$$

Esta condición siempre se encuentra a bajas concentraciones, donde se cumple la ley de Henry. En esos casos, la constante de proporcionalidad es la constante de la ley de Henry, H. Si se utiliza la ecuación (29-14) se pueden relacionar las concentraciones de las fases gaseosa y líquida por medio de:

$$p_{A,G} = mc_A^*$$

$$p_A^* = mc_{A,L}$$

y

$$p_{A,i} = mc_{A,i}$$

Si se reordena la ecuación (29-10) se obtiene:

$$\frac{1}{K_G} = \frac{p_{A,G} - p_A^*}{N_{A,z}} = \frac{p_{A,G} - p_{A,i}}{N_{A,z}} + \frac{p_{A,i} - p_A^*}{N_{A,z}}$$

o, en función de m,

$$\frac{1}{K_G} = \frac{(p_{A,G} - p_{A,i})}{N_{A,z}} + \frac{m(c_{A,i} - c_{A,L})}{N_{A,z}} \tag{29-15}$$

La sustitución de las ecuaciones (29-6) y (29-7) en la expresión anterior, relaciona a k_G con los coeficientes de las fases individuales por medio de:

$$\frac{1}{K_G} = \frac{1}{k_G} + \frac{m}{k_L}$$

Se puede obtener una expresión semejante, correspondiente a K_L, en la forma siguiente:

$$\frac{1}{K_L} = \frac{c_A^* - c_{A,L}}{N_{A,z}} = \frac{(p_{A,G} - p_{A,i})}{mN_{A,z}} + \frac{(c_{A,i} - c_{A,L})}{N_{A,z}}$$

ó

$$\frac{1}{K_L} = \frac{1}{mk_G} + \frac{1}{k_L} \tag{29-17}$$

Las ecuaciones (29-16) y (29-17) establecen que las magnitudes relativas de las resistencias de las fases individuales dependen de la solubilidad del gas, tal como lo indica la magnitud de la constante de proporcionalidad. En un sistema consistente en un gas soluble, tal como el amoniaco, en agua, m es muy pequeña. A partir de la ecuación (29-16) se puede concluir que la resistencia en la fase gaseosa es esencialmente igual a la resistencia total en dicho sistema. Cuando esto ocurre, la mayor resistencia a la transfrencia de masa se encuentra en la fase gaseosa y entonces, se dice que dicho sistema está *controlado por la fase gaseosa*. Los sistemas que tienen gases de baja solubilidad, tal como el bióxido de carbono en agua, tienen un valor tan grande de m que la ecuación (29-17) establece que se puede despreciar la resistencia de la fase gaseosa y el coeficiente total, K_L, es, entonces, esencialmente igual al coeficiente individual, k_L, de la fase líquida. Este tipo de sistema se denomina *controlado por la fase líquida*. En muchos sistemas las resistencias de ambas fases son importantes y deben tomar en cuenta cuando se esté evaluando la resistencia total.

En el capítulo 28 se demostró que los coeficientes convectivos de las fases individuales, k_L y k_G, dependerán de la naturaleza de la componente en difusión, de la naturaleza de la fase a través de la cual se está difundiendo la componente y también de las condiciones de flujo de la fase. Aun cuando el coeficiente individual, k_G, sea esencialmente independiente de la concentración, el coeficiente total, K_G, puede variar con la concentración a menos que la línea de equilibrio sea una recta. Esto también es verdad respecto al coeficiente total, K_L. Así pues, los coeficientes totales deberán emplearse solamente en condiciones similares a aquellas en las cuales se midieron y no deberán usarse en otros rangos de concentración a menos que la curva de equilibrio del sistema sea recta en todos los valores de interés.

La teoría de las dos resistencias, incluyendo la suma de resistencias, fue propuesta por Lewis y Whitman* en 1924 como la teoría de las dos películas. Aunque originalmente se la propuso en función del modelo de película correspondiente a la transferencia convectiva de masa, se le puede aplicar a los coeficientes de las fases individuales, calculados, ya sea por la teoría de película o por la de penetración. La suposición de una resistencia interfacial despreciable no se ha verificado de manera adecuada. De hecho, muchos inves-

*W. K. Lewis y W. G. Whitman, *Ind. Eng. Chem*, 16, 1215 (1924).

tigadores han demostrado que realmente existe una resistencia si el líquido transporta polvo u otras partículas extrañas. Sin embargo, la mayor parte de los datos industriales se han interpretado en función de la teoría de las dos resistencias.

La aplicación de la teoría de las dos resistencias a la absorción del vapor de amoniaco en agua se explica en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2

En un estudio experimental de la absorción de NH_3 por el agua de una columna mojada, se encontró que el valor de K_G es de 0.205 lb mol NH_3/h ft^2 atm. En un punto de la columna, el gas contenía 8 moles por ciento de NH_3 y la concentración de la fase líquida era de 0.004 moles de NH_3 por cada ft^3 de solución. La temperatura fue de 68° F y la presión total, de una atmósfera. Se encontró que el 85% de la resistencia total a la transferencia de masa se hallaba en la fase gaseosa. Si la constante de Henry a 68° F es de 0.15 atm/mol de NH_3 por ft^3 de solución, calcúlense los coeficientes de las capas interfaciales y las composiciones interfaciales.

De acuerdo con la ecuación (29-12), la resistencia total en ambas fases es:

$$\frac{1}{K_G} = \frac{1}{0.205} = 4.88 \text{ hr ft}^2 \text{ atm/lb mol}$$

Como la resistencia en la fase gaseosa, o sea $1/k_G$ es del 85% de la resistencia total, el coeficiente de la fase gaseosa individual se puede calcular por medio de:

$$\frac{1}{k_G} = 0.85(4.88) = 4.15 \text{ hr ft}^2 \text{ atm/lb mol NH}_3$$

y

$$k_G = \frac{1}{4.15} = 0.241 \text{ lb mol NH}_3\text{/hr ft}^2 \text{ atm}$$

El coeficiente, k_L, de la fase líquida, se calcula de la manera siguiente:

$$\frac{1}{K_G} = \frac{1}{k_G} + \frac{m}{k_L}$$

ó

$$4.88 = 4.15 + \frac{m}{k_L}$$

Por lo tanto:

$$\frac{m}{k_L} = 0.73 \text{ hr ft}^2 \text{ atm/lb mol}$$

y

$$k_L = \frac{0.15 \text{ atm/(mol NH}_3\text{/ft}^3 \text{ solución)}}{0.73 \text{ (hr ft}^2 \text{ atm/lb mol)}}$$

o sea:

$$k_L = 0.205 \text{ lb mol NH}_3\text{/[(hr ft}^2\text{)(mol NH}_3\text{/ft}^3 \text{ solución)]}$$

En un punto de la columna, las concentraciones globales de ambas fases son:

$$p_{A,G} = y_A P = (0.08)(1 \text{ atm}) = 0.08 \text{ atm}$$

y

$$c_{A,L} = 0.004 \text{ mole } NH_3/ft^3 \text{ solución}$$

Ahora, introduciendo la constante de la ley de Henry, la presión parcial, $p_A{}^*$, en equilibrio con la concentración global del líquido es:

$$p_A{}^* = Hc_{A,L} = 0.15 \text{ atm}/(\text{mol } NH_3/ft^3 \text{ solución}) \times 0.004 \left(\frac{\text{mol } NH_3/ft^3 \text{ solución}}{}\right)$$

o

$$p_A{}^* = 0.0006 \text{ atm}$$

El flujo de masa, tal como lo expresa la ecuación (29-10), se transforma en:

$$N_{A,L} = K_G(p_{AG} - p_A{}^*)$$

$$= 0.205 \frac{\text{lb mol}}{\text{hr ft}^2 \text{ atm}}(0.08 - 0.0006) \text{ atm}$$

$$= 1.63 \times 10^{-2} \text{ lb mol/hr ft}^2$$

Las composiciones interfaciales se pueden determinar utilizando las ecuaciones (29-6) y (29-7), de la manera siguiente:

$$N_{A,L} = k_G(p_{AG} - p_{A,i})$$

así pues:

$$1.63 \times 10^{-2} \frac{\text{lb mol}}{\text{hr ft}^2} = 0.241 \frac{\text{lb mol}}{\text{hr ft}^2 \text{ atm}}(0.08 - p_{A,i}) \text{ atm}$$

y

$$p_{A,i} = 0.0124 \text{ atm}$$

$$N_{A,L} = k_L(c_{A,i} - c_{AL})$$

por lo cual

$$1.63 \times 10^{-2} \frac{\text{lb mol}}{\text{hr ft}^2} = 0.205 \left(\frac{\text{lb mol}}{\text{hr ft}^2 (\text{lb mole } NH_3/ft^3)}\right)(c_{A,i} - 0.004) \frac{\text{lb mol } NH_3}{ft^3}$$

y

$$c_{A,i} = 0.083 \frac{\text{lb mol } NH_3}{ft^3 \text{ solución}} \quad (1.33 \times 10^3 \text{OK/m}^3)$$

29.3 CONCLUSION

En este capítulo se ha estudiado el mecanismo de transferencia de masa en estado permanente entre fases. Se introdujo la teoría de las dos resistencias. Esta teoría define la transferencia de masa en cada una de las fases en fun-

ción de la fuerza impulsora de la concentración y del coeficiente individual de transferencia de masa, de acuerdo con las ecuaciones:

$$N_{A,z} = k_G(p_{A,G} - p_{A,i})$$

y

$$N_{A,z} = k_L(c_{A,i} - c_{A,L})$$

Los coeficientes totales de transferencia de masa se definieron mediante las expresiones:

$$N_{A,z} = K_G(p_{A,G} - p_A^*)$$
$$N_{A,z} = K_L(c_A^* - c_{A,L})$$

y se relacionaron con los coeficientes individuales mediante las expresiones:

$$\frac{1}{K_G} = \frac{1}{k_G} + \frac{m}{k_L}$$

y

$$\frac{1}{K_L} = \frac{1}{mk_G} + \frac{1}{k_L}$$

PROBLEMAS

29.1 Un líquido que contiene 60 moles por ciento de benceno y 40 moles por ciento de agua se calienta a 373 K. Calcule la presión total y la composición del vapor en equilibrio con su líquido.

Datos correspondientes a la presión de vapor en milímetros de mercurio

Temperatura, °C	60	70	80	90	100	110	120
Benceno	348	540	756	1008	1338	1740	2215
Tolueno	150	206	287	404	557	741	990
Agua	149	234	355	526	760	1075	1490

29.2 Determine la composición del vapor en equilibrio con una mezcla de 60 moles por ciento de benceno y 40 moles por ciento de tolueno líquido, contenida en un recipiente sujeto a una presión de 1 atm. Prediga la temperatura a la cual existe este equilibrio.

29.3 Determine la composición del líquido en equilibrio con una mezcla de 60 moles por ciento de benceno y 40 moles por ciento de vapor de tolueno, contenida en un recipiente sujeto a una presión de 1 atm. Prediga la temperatura a la cual existe este equilibrio.

29.4 Encuente el valor de la constante de la ley de Henry (cuando $c_{A,l} \to 0$), correspondiente al SO_2 en agua. Los datos que corresponden al equilibrio a 293 K son los siguientes:

presión parcial del SO_2, mm de Hg.	0.5	3.2	8.5
concentración, lb mol de SO_2/pies^3	0.0191	0.0911	0.1738

29.5 Una solución de oxígeno en agua, que contiene 1×10^{-3} g de O_2/100 g de H_2O, se encuentra en contacto con un gran volumen de aire ordinario a una presión total de 1 atm a 40° C. La constante de la ley de Henry correspondiente a un sistema formado por oxígeno y agua es $H' = 5.35 \times 10^4$ atm/fracción molar en el líquido.

a) ¿Ganará o perderá oxígeno la solución?

b) ¿Cuál será la concentración de oxígeno en la solución final en equilibrio?

29.6 Se mezclan veinticinco libras de amoniaco seco en forma gaseosa, NH_3 y 400 ft^3 de aire seco medido a 20° C y 760 mm de presión y la mezcla se hace entrar en contacto con 100 lb de agua, en un recipiente cerrado. Hay 1000 ft^3 de espacio lleno de gas sobre el agua. Después de un largo período de tiempo, el sistema alcanza el equilibrio. Suponga que el volumen lleno de gas permanece constante y que la temperatura del sistema es de 20° C y determine:

a) la concentración de amoniaco en el líquido

b) la presión parcial del agua en el espacio donde se encuentra el gas

c) la presión total en el espacio ocupado por el gas.

A 20° C la presión parcial de amoniaco, en mm de Hg, ejercida sobre las soluciones acuosas es la siguiente:

lb_m NH_3/100 lb_m H_2O	7.5	10	15	20	25
presión parcial de amoniaco, en mm de Hg	50.0	69.6	114	166	227

29.7 Una forma modificada de la ley de Henry produce la relación de equilibrio entre el cloro disuelto en agua y la presión parcial del cloro en el espacio lleno de vapor que se encuentra sobre el agua. Los valores de H en la ecuación

$$p_{(atm)} = H\left(\frac{\text{mol } Cl_2}{\text{mol } Cl_2 + \text{mol } H_2O} \text{ en la fase líquida}\right)$$

son los que aparecen en la siguiente tabla

Temperatura, °C	10	15	20
$H(10^{-2})$	3.91	4.65	5.29

300 ft^3 de una mezcla gaseosa de Cl_2 y N_2, con cantidades iguales de cada una de las componentes, por volumen saturadas con vapor de agua

a 15° C y 760 mm se ponen en contacto con 60 lb_m de agua. Todo el sistema se mantiene a 15° C y 1 atm de presión. Si se desprecia la solubilidad del nitrógeno y se supone que el cloro no reacciona en forma apreciable con el agua, calcule la composición del cloro en las fases líquida y gaseosa en equilibrio.

29.8 En la absorción de amoniaco, NH_3 por el agua, a partir de una mezcla de aire y amoniaco, en una torre de absorción que se encuentra a 60° F y 3.0 atmósferas, se calculó que los coeficientes individuales de película eran $k_L = 1.10$ lb mol de $NH_3/(h)ft^2$ mol de NH_3/ft^3) y $k_G = 0.25$ lb mol de $NH_3/h\ ft^2$ atm. La presión parcial del amoniaco en equilibrio sobre soluciones diluidas de amoniaco en agua, está dada por la relación:

$$p_{A,i} = 0.25c_{A,i}$$

donde $p_{A,i}$ está en atm y $c_{A,i}$ en moles de NH_3/ft^3 de solución. Determine los siguientes coeficientes de transferencia de masa:

a) k_y

b) k_c, correspondiente a una película gaseosa

c) K_G

d) K_Y

e) K_L

20.9 En una torre de pared mojada de la que se extrajo el NH_3 de una solución de agua y amoniaco, integrándolo a una corriente de aire, el coeficiente total del líquido, K_L, fue de 0.0475 lb mol/(h)(ft^2)(lb mol/ft^3). En un punto de la torre, la concentración de amoniaco en el líquido es de 0.3 lb mol por pie cúbico y la presión parcial de amoniaco en la corriente gaseosa es de 0.06 atm. En las soluciones diluidas de amoniaco en agua a la temperatura operante, la presión parcial en equilibrio se puede calcular por medio de:

$$p_{A,i} = 0.25c_{A,i}$$

donde $p_{A,i}$ es la presión parcial de equilibrio, del amoniaco (en atmósferas) y $c_{A,i}$ es la concentración de equilibrio del amoniaco en agua (lb mol de NH_3/ft^3 de solución).

Si la fase faseosa ofrece 70% de la resistencia total a la transferencia de masa, calcule:

a) el coeficiente individual de película de gas

b) el coeficiente total de transferencia de gas

c) las concentraciones interfaciales, $p_{A,i}$ y $c_{A,i}$.

29.10 Se utilizó una torre de absorción para absorber del aire el compuesto A hacia el solvente B. En un punto de la torre, la presión paracial de A en la corriente de gas era de 0.21 atm y la concentración de A en la corriente de líquido en contacto con el gas, era de 6.24×10^{-5} lb mol/ft^3. La transferencia de masa entre la corriente de gas y la de líquido en ese pun-

to de la torre fue de 0.0295 lb mol/(h)(ft^2). El coeficiente individual de transferencia de película del gas, k_G, fue de 0.295 lb mol/(h)(ft^2)(atm). Un experimento que se realizó en el laboratorio verificó que la composición del líquido, 6.24×10^{-5} lb mol/ft^3, estaba en equilibrio en $p_A = 0.08$ atm; por lo tanto, el sistema satisfizo la ley de Henry.

a) Anote los valores correspondientes en la siguiente tabla:

Coeficiente	Fuerza motriz
$k_G =$ _____	$p_{A,G} - p_{A,i} =$ _____
$k_L =$ _____	$c_{A,i} - c_{A,L} =$ _____
$K_G =$ _____	$p_{A,G} - p_A^* =$ _____
$K_L =$ _____	$c_A^* - c_{A,L} =$ _____

b) ¿Qué porcentaje de la resistencia a la transferencia total de masa se encontraba en la película de gas?

29.11 En la deabsorción de la componente *A* que salió de una solución acuosa incorporándose al aire, se analizó que en un punto particular de la torre de transferencia de masa, las concentraciones globales de las dos corrientes son:

$$p_{A,G} = 10 \text{ mm Hg}$$

$$c_{A,L} = 0.250 \text{ lb mol/ft}^3$$

El coeficiente total del gas, K_G, es igual a 0.055 lb mol *A*/(h)(pie^2)(atm). Se encontró el cincuenta y siete por ciento de la resistencia total a la transferencia de masa en la película de gas, 43% en la de líquido. La constante de la ley de Henry, es igual a 0.265 atm/(moles de *A*/ft^3 de solución). Determine:

a) el coeficiente de película de gas, k_G

b) el coeficiente de película del líquido, k_L

c) el flujo de masa de *A*.

29.12 El agua clorinada que se utiliza para blanquear la pulpa se está preparando por absorción del cloro en agua en una torre que opera a 293 K y 1.013×10^5 Pa de presión. En un punto de la torre la presión de cloro sobre el agas es de 5×10^4 Pa y la concentración en el líquido es 1 kg/m^3. Los datos acerca de la solubilidad del cloro en agua a 293 K son los siguientes:

presión del cloro en Pa $\times 10^{-4}$	0.674	1.21	2.63	2.63	4.93	4.96	9.77
solubilidad en moles de $Cl_2/m^3 \times 10^{-1}$	1.58	2.25	3.69	3.73	5.84	5.94	10.21

Si el 75% de la resistencia a la transferencia de masa está en la fase líquida, ¿cuáles son las composiciones interfaciales? Trace una gráfica de presión parcial contra concentración en el líquido, indicando las cantidades importantes.

29.13 En una torre de pared mojada utilizada para la absorción de amoniaco, NH_3, a partir de una mezcla de aire y amoniaco, en agua, el coeficiente total de transferencia de masa del gas, K_G, es de 0.191 lb mol/h ft^2 atm. La torre se operó a 60° F y 2 atm de presión. En la parte superior de la torre, el gas emergente contiene 1% de NH_3 por volumen y el líquido que entra y estuvo en contacto con este gas, es agua pura. Si la fase gaseosa ofrece 85% de resistencia a la transferencia de masa, calcule:
a) el coeficiente de película gaseosa, k_G
b) el coeficiente de película líquida, k_L
c) el coeficiente total de transferencia de masa líquida, K_L
d) las concentraciones interfaciales, $p_{A,i}$ y $c_{A,i}$
La presión parcial de equilibrio correspondiente a las soluciones diluidas de amoniaco en agua a 60° F, está dada por:

$$p_{A,i} = 0.25\, c_{A,i}$$

donde $p_{A,i}$ es la presión parcial de equilibrio del amoniaco en atm y $c_{A,i}$ es la concentración de amoniaco en agua, lb mol de NH_3/ft^3 de solución.

29.14 En un sistema en el cual se está transfiriendo la componente A de la fase líquida a la gaseosa, la relación de equilibrio está dada por:

$$y_{A,i} = 0.75\, x_{A,i}$$

En un punto del aparato, el líquido contiene 90 moles por ciento de A y el gas contiene 45 moles por ciento. El coeficiente individual de transferencia de masa de película de gas, k_y, en este punto del aparato, tiene un valor de 2 lb mol/h pie^2 Δy_A y 70% de la resistencia total a la transferencia de masa se encuentra en la fase gaseosa. Evalúe:
a) el flujo molar de A
b) la concentración interfacial de A en ambas fases
c) el coeficiente total de transferencia de masa, K_y

29.15 Una torre de absorción que opera a 20° C y 1 atm de presión se usó para absorber SO_2 de una mezcla de aire hacia el agua. En un punto del equipo la presión parcial del SO_2 de la corriente gaseosa, fue de 30 mm y la concentración de la corriente del líquido en contacto fue de 0.0344 moles de SO_2/ft^3 de solución. Los coeficientes de transferencia de masa de película individual a 20° C y 1 atm fueron:

$$k_L = 1.3 \text{ lb mol/(h)(ft}^2\text{)(lb mol/ft}^3 \text{ solución)}$$

y

$$k_G = 0.0295 \text{ lb mol/h ft}^2 \text{ atm.}$$

Los datos de equilibrio a 20° C son los siguientes:

presión parcial de SO_2 en mm de Hg.	0.5	3.2	8.5	26	59
concentración en moles de	0.0191	0.0911	0.1738	0.388	0.681

a) Evalúe las concentraciones interfaciales, $c_{A,i}$ y $p_{A,i}$

b) Llene la tabla con los valores correspondientes, anotando los diferentes coeficientes y fuerzas motrices asociadas;

Coeficiente	Fuerza Motriz
$k_G =$ _____	$p_{A,G} - p_{A,i} =$ _____
$k_L =$ _____	$c_{A,i} - c_{A,L} =$ _____
$K_G =$ _____	$p_{A,G} - p_A^* =$ _____
$K_L =$ _____	$c_A^* - c_{A,L} =$ _____

c) ¿Qué porcentaje de la resistencia total a la transferencia de masa está en la película de gas?

29.16 Se están separando benceno y tolueno en una torre de destilación. En un punto de la torre de destilación, la fase gaseosa es de 50 moles por ciento de benceno, en tanto el líquido adyacente en contacto, contiene 40 moles por ciento de benceno. La temperatura en este punto es de 86.8° C. Los calores molares latentes de vaporización del benceno y el tolueno se pueden suponer iguales. La rapidez de transferencia de masa del benceno es de 0.05 lb mol/h ft^2. Si el 60% de la resistencia a la transferencia de masa se encuentra en la fase gaseosa, determine la composición interfacial del gas.

30
CORRELACIONES DE TRANSFERENCIA CONVECTIVA DE MASA

Hasta aquí se ha estudiado la transferencia convectiva de masa desde un punto de vista analítico y a partir de las relaciones desarrolladas tomando como base la transferencia análoga de transferencia de calor de momento o convectiva. Aunque este estudio ha ayudado al lector a comprender el proceso de la transferencia convectiva, la validez del análisis debe comprobarse con los datos experimentales. En este capítulo se presentarán algunas ecuaciones basadas en resultados experimentales. No se intentará revisar todas las investigaciones de transferencia de masa, las revisiones ya se han presentado en algunas referencias excelentes.* Sin embargo, se darán correlaciones para demostrar que la forma de las ecuaciones es la predicha por las expresiones analíticas obtenidas en el capítulo 28. Además, se introducirán algunas correlaciones adicionales correspondientes a aquellas situaciones que no hayan sido tratadas analíticamente con éxito. La aplicación de estas correlaciones a los cálculos de diseño, se estudiará en el capítulo 31.

30.1 TRANSFERENCIA DE MASA A PLACAS, CILINDROS Y ESFERAS

Se han obtenido muchos datos correspondientes a la transferencia de masa entre un fluido en movimiento y ciertas formas estándar, tales como placas planas, esferas y cilindros. Casi todos los datos experimentales que corresponden a estas formas se han obtenido por medio del estudio de la va-

*W. S. Normal, *Absorption, Destillation and Cooling Towers*, Nueva York, 1961; T. K. Sherwood y R. L. Pigford, *Absorption and Extraction*, McGraw Hill Book Company, Nueva York, 1952, R. E. Treybal, *Mass Transfer Operations*, McGraw Hill Book Company, Nueva York, 1968, C. J. Geankoplis, *Mass Transfer Phenomena*, Holt, Rinchartand Winston, Nueva York, 1972, A. H. P. Skelland, *Diffusional Mass Transfer*, Wiley, Nueva York, 1974.

porización de una componente pura que se integra al aire o de la disolución de un sólido en agua. Si se correlacionan los datos en función de parámetros adimensionales, las ecuaciones empíricas se pueden ampliar a otros fluidos en movimiento y a superficies geométricamente semejantes.

PLACA PLANA

Varios investigadores han medido la evaporación de la superficie de un líquido o la sublimación de la superficie plana de un sólido volátil que ocurre hacia una corriente controlada de aire. Se ha encontrado que estos datos satisfacen favorablemente las ecuaciones teóricas correspondientes a las capas límite laminar y turbulenta,

$$\mathrm{Nu}_{AB,L} = 0.664\,\mathrm{Re}_L^{1/2}\,\mathrm{Sc}^{1/3} \quad \text{(laminar)} \tag{28-21}$$

$$\mathrm{Nu}_{AB,L} = 0.036\,\mathrm{Re}_L^{0.8}\,\mathrm{Sc}^{1/3} \quad \text{(turbulento)} \tag{28-26}$$

Estas ecuaciones se pueden expresar en función del factor j, recordando que:

$$j_D = \frac{k_c}{v_\infty}\mathrm{Sc}^{2/3} = \frac{k_c L}{D_{AB}} \cdot \frac{\mu}{L v_\infty \rho} \cdot \frac{D_{AB}\rho}{\mu} \cdot \left(\frac{\mu}{\rho D_{AB}}\right)^{2/3}$$

$$= \frac{\mathrm{Nu}_{AB,L}}{\mathrm{Re}_L \mathrm{Sc}^{1/3}} \tag{30-1}$$

Al reordenar las ecuaciones (28-21) y (28-26) en la forma de la ecuación (30-1), se obtiene:

$$j_D = 0.664\,\mathrm{Re}_L^{-1/2} \quad \text{(laminar)} \tag{30-2}$$

y

$$j_D = 0.036\,\mathrm{Re}_L^{-0.2} \quad \text{(turbulento)} \tag{30-3}$$

Estas ecuaciones se pueden usar cuando el número de Schmidt se encuentra dentro de los valores $0.6 < \mathrm{Sc} < 2500$. El factor j, para la transferencia de masa es también igual al factor j, para la transferencia de calor en el intervalo del número de Prandtl de $0.6 < \mathrm{Pr} < 100$ y también es igual a $C_f/2$. A una distancia x del borde de ataque de la placa plana, la solución exacta a la capa laminar límite,

$$\mathrm{Nu}_{AB,x} = \frac{k_c x}{D_{AB}} = 0.332\,\mathrm{Re}_x^{1/2}\,\mathrm{Sc}^{1/3} \tag{28-20}$$

concuerda con los datos experimentales.

ESFERA SIMPLE

Los investigadores han estudiado la transferencia de masa de esferas simples y han relacionado el número de Nusselt de transferencia de masa, por adición directa de los términos que representan la transferencia por difusión puramente molecular y por convección forzada en la forma:

$$Nu_{AB} = Nu_{AB_0} + C\,Re^m\,Sc^{1/3}$$

donde C y m son las constantes correlacionadas. El número de Nusselt correspondiente a un número muy bajo de Reynolds, debe acercarse el valor de 2.0. Dicho valor se puede obtener teóricamente estudiando la difusión molecular de una esfera a un gran volumen de fluido estancado. Así pues, la ecuación generalizada, se transforma en:

$$Nu_{AB} = 2.0 + C\,Re^m\,Sc^{1/3}$$

La ecuación de Garner y Suckling* que corresponde a la transferencia a corrientes líquidas:

$$Nu_{AB} = 2.0 + 0.95\,Re^{1/2}Sc^{1/3} \qquad (30\text{-}4)$$

correlacionó los datos obtenidos en un conjunto de valores de número de Reynolds de 100 a 700 y con un número de Schmidt entre 1,200 y 1,525. La ecuación de Froessling†

$$Nu_{AB} = 2.0 + 0.552\,Re^{1/2}\,Sc^{1/3} \qquad (30\text{-}5)$$

interrelaciona los datos de transferencia a gases para valores de los números de Reynolds entre 2 y 800 y números de Schmidt de 0.6 a 2.7. Los datos aportados por Evnochides y Thodos‡ han ampliado la ecuación de Froessling a un conjunto de valores del número de Reynolds de 1500 a 12,000 con valores del número de Schmidt que van del 0.6 al 1.85. La ecuaciones (30-4) y (30-5) se pueden utilizar para describir los coeficientes de transferencia de convección forzada solamente cuando los efectos de la convección libre o forzada son despreciables, esto es, cuando:

$$Re \geq 0.4Gr_{AB}^{1/2}\,Sc^{-1/6} \qquad (30\text{-}6)$$

Las siguientes ecuaciones de Steinberger y Treyball‖ se recomiendan cuando la transferencia ocurre en presencia de la convección natural:

$$Nu_{AB} = Nu_{AB,nc} + 0.347\,(Re\,Sc^{1/2})^{0.62} \qquad (30\text{-}7)$$

$$\text{for } 1 \leq Re \leq 3 \times 10^4$$

$$0.6 \leq Sc \leq 3200$$

*F. H. Garner y R. D. Suckling, *A. I. Ch. E. J.*, 4, 114 (1958).
†N. Froessling *Gerlands Beitz Geophys*, 52, 170 (1958).
‡S. Evnochides y G. Thodos, *A. I. Ch. E. J.*, 5, 178 (1959).
‖R. L. Steinberger y R. E. Treybal, *A. I. Ch. E. J.*, 6, 227 (1960).

donde

$$Nu_{AB,nc} = 2.0 + 0.569\,(Gr_{AB}Sc)^{0.25} \qquad Gr_{AB}Sc < 10^8 \tag{30-8}$$

ó

$$Nu_{AB,nc} = 2.0 + 0.0254\,(Gr_{AB}Sc)^{1/3}Sc^{0.244} \qquad Gr_{AB}Sc > 10^8 \tag{30-9}$$

Las ecuaciones de correlación de una esfera simple se utilizan en el ejemplo siguiente:

EJEMPLO 1

Calcúlese la distancia que debe recorrer en su caída una gota esférica de agua, de 1.0 mm de diámetro, originalmente, a través de aire seco a 50° C, para reducir su volumen en un 50%. Supóngase que la velocidad de la gota es su velocidad terminal evaluada en su diámetro medio y que el agua permanece a 20° C. Evalúense todas las propiedades de la película de gas a 35° C.

Si se piensa en el equilibrio de fuerzas que actúan sobre una partícula que cae a través de un medio fluido, se puede demostrar que la velocidad terminal de la partícula es:

$$v_0 = \sqrt{\frac{4d_p(\rho_p - \rho)g}{3C_D\rho}}$$

donde d_p es el diámetro de la partícula, p_p es su densidad, p es la densidadi del fluio, y g es la aceleración de la gravedad y C_D el coeficiente de arrastre. C_D es función del número de Reynolds de la partícula, tal como puede verse en la figura 12.4.

El diámetro medio aritmético se calcula por medio de:

$$\bar{d}_p = \frac{d_{p,|r_1} + d_{p,|r_2}}{2} = \frac{d_{p,|r_1} + (1/2)^{1/3} d_{p,|r_1}}{2}$$

$$= 0.897\, d_{p,|r_1} = (0.897)(1 \times 10^{-3}\,\text{m}) = 8.97 \times 10^{-4}\,\text{m}$$

y el radio medio aritmético, $\bar{r}$, es de 4.48×10^{-4} m.

A 20° C o sea, 293 K, la densidad de la gotita de agua, ρ, es de 9.95×10^2 kg/m^3. A 35° C, o 308 K, la densidad del aire, ρ, es de 1.14 kg/m^3 y la viscosidad del aire, de 1.91×10^{-5} Pa · seg. Al sustituir estos valores en la ecuación correspondiente a la velocidad terminal, se obtiene:

$$v_0 = \sqrt{\frac{(4)(8.97 \times 10^{-4}\,\text{m})(9.95 \times 10^2\,\text{kg/m}^3 - 1.14\,\text{kg/m}^3)(9.8\,\text{m/s}^2)}{(3)(1.14\,\text{kg/m}^3)C_D}}$$

$$= \sqrt{\frac{10.22}{C_D}}$$

Por el procedimiento de prueba y error se puede obtener un valor aproximado de v_0, calcúlese el número de Reynolds, encuéntrese C_D en la figura 12.4 y verifíquese el vapor aproximado de v_0 por medio de la ecuación anterior. Pruébse con $v_0 = 3.62$ m/seg.

$$\mathrm{Re} = \frac{d_p v_0 \rho}{\mu} = \frac{(8.97\times10^{-4}\,\mathrm{m})(3.62\,\mathrm{m/s})(1.14\,\mathrm{kg/m^3})}{(1.91\times10^{-5}\,\mathrm{Pa\cdot s})\left(\frac{\mathrm{kg/m\cdot s}}{\mathrm{Pa\cdot s}}\right)}$$

$$= 194$$

de la figura 12.4, se observa que $C_D = 0.78$, entonces $v_0 = \sqrt{\frac{10.22}{0.78}} = 3.62$ m/s.

La ecuación (30-6) se calculará para verificar si los efectos de la convección natural son importantes. El número de Grashof de transferencia de masa es:

$$\mathrm{Gr}_{AB} = \frac{d_p^3 \rho g\, \Delta\rho_A}{\mu^2}$$

donde $\Delta\rho_A$ es la diferencia entre la densidad del gas saturado a la temperatura de la gota de agua, 293 K y el gas seco a 308 K. En este sistema, $\Delta\rho_A = 0.0272$ kg/m^3, la densidad del gas saturado se calculó usando los moles de agua por mol de aire seco, valor que se obtuvo de una tabla de valores de la humedad.

$$\mathrm{Gr}_{AB} = \frac{(8.96\times10^{-4}\,\mathrm{m})^3(1.14\,\mathrm{kg/m^3})(9.8\,\mathrm{m/s^2})(0.027\,2\,\mathrm{kg/m^3})}{(1.91\times10^{-5}\,\mathrm{Pa\cdot s})^2\left(\frac{\mathrm{kg/m\cdot s}}{\mathrm{Pa\cdot s}}\right)^2}$$

$$= 0.60$$

La difusividad del gas, D_{AB}, es de 0.260×10^{-4} m^2/seg, correspondiente al valor de agua a 298 K, valor obtenido del apéndice J.1 que se puede corregir a la temperatura deseada por medio de la ecuación:

$$D_{AB} = 0.260\times10^{-4}\,\mathrm{m/s^2}\left(\frac{308\,\mathrm{K}}{298\,\mathrm{K}}\right)^{3/2} = 0.273\times10^{-4}\,\mathrm{m^2/s}$$

El número de Schmidt es:

$$\mathrm{Sc} = \frac{\mu}{\rho D_{AB}} = \frac{(1.91\times10^{-5}\,\mathrm{Pa\cdot s})\left(\frac{\mathrm{kg/m\cdot s}}{\mathrm{Pa\cdot s}}\right)}{(1.14\,\mathrm{kg/m^3})(0.273\times10^{-4}\,\mathrm{m^2/s})} = 0.61$$

En la ecuación (30-6):

$$0.4\,\mathrm{Gr}_{AB}^{1/2}\mathrm{Sc}^{-1/6} = 0.4(0.6)^{1/2}(0.61)^{-1/6} = 0.336$$

Este número es más pequeño que el de Reynolds e indica que los efectos de la convección natural son despreciables. La ecuación (30-5), o sea la ecuación de Froessling, se puede utilizar para evaluar el coeficiente de transferencia de masa:

$$\frac{k_c d_p}{D_{AB}} = 2.0 + 0.552\,\mathrm{Re}^{1/2}\,\mathrm{Sc}^{1/3} \qquad k_c = \frac{D_{AB}}{d_p}[2.0 + 0.552\,\mathrm{Re}^{1/2}\,\mathrm{Sc}^{1/3}]$$

$$= \frac{(0.273\times10^{-4}\,\mathrm{m^2/s})}{(8.96\times10^{-4}\,\mathrm{m})}[2.0 + 0.552(194)^{1/2}(0.61)^{1/3}] \qquad = 0.26\,\mathrm{m/s}$$

La rapidez media de evaporación es:

$$W_A = 4\pi r^2 N_A = 4\pi r^2 k_c (c_{A,s} - c_{A,\infty})$$

La concentración de aire seco, $c_{A,\infty}$, es cero. La concentración superficial se evalúa a partir de la presión del vapor de agua a 293 K.

$$c_{A,s} = \frac{P_A}{RT} = \frac{2.33 \times 10^3 \text{ Pa}}{(8.314 \text{ Pa} \cdot \text{m}^3/\text{mol} \cdot \text{K})(293 \text{ K})}$$
$$= 0.959 \text{ mol/m}^3$$

Cuando se sustituyen los valores conocidos en la ecuación de rapidez de evaporación, se obtiene:

$$W_A = 4\pi(4.48 \times 10^{-4} \text{ m})^2(0.26 \text{ m/s})(0.959 \text{ mol/m}^3)$$
$$= 6.28 \times 10^{-7} \text{ mol/s}$$
$$= 1.13 \times 10^{-8} \text{ kg/s}$$

La cantidad de agua evaporada, m, es:

$$m = \rho \Delta V = \rho(V_i - V_n) = \rho(V_i - 0.5 V_i) = \frac{\rho V_i}{2}$$
$$= \frac{\rho}{2}\frac{4\pi}{3} r_i^3 = \frac{4}{6}\pi(9.95 \times 10^2 \text{ kg/m}^3)(4.48 \times 10^{-4} \text{ m})^3$$
$$= 1.87 \times 10^{-7} \text{ kg} = 1.87 \times 10^{-4} \text{ g}$$

El tiempo necesario para reducir el volumen en un 50% es:

$$t = \frac{m}{w_A} = \frac{1.87 \times 10^{-4} \text{ g}}{1.13 \times 10^{-5} \text{ g/s}} = 16.5 \text{ s}$$

La distancia de caída es igual a $v_0 t$, o sea, (3.62 m/seg)(16.5 seg) = 60 m.

CILINDRO SIMPLE

Toda la analogía entre las transferencias de: momento, calor y masa se rompe cuando el flujo se realiza alrededor de cuerpos romos tales como los cilindros. La fuerza total de arrastre incluye al arrastre de forma, además de la fricción superficial. Por lo tanto, el factor j no será igual a $C_f/2$. La analogía entre las transferencia de calor y de masa, $j_H = j_D$, sigue siendo válida.

Varios investigadores han estudiado la sublimación procedente de un solo cilindro sólido hacia el aire que fluye en forma normal al eje. Se ha informado de resultados adicionales acerca de la disolución de los cilindros sólidos en una corriente turbulenta de agua. Treybal* resumió los resultados de

*R. E. Treybal, *Mass Transfer Operations*, McGraw Hill Book Company, Nueva York, 1955.

estas investigaciones en una representación gráfica de las correlaciones de transferencia de masa, correspondientes a diversas formas. Este excelente resumen se ilustra en la figura 30.1 y los parámetros pertinentes aparecen listados en la tabla 30.1. En el siguiente ejemplo se explica una aplicación de una de las curvas de esta figura.

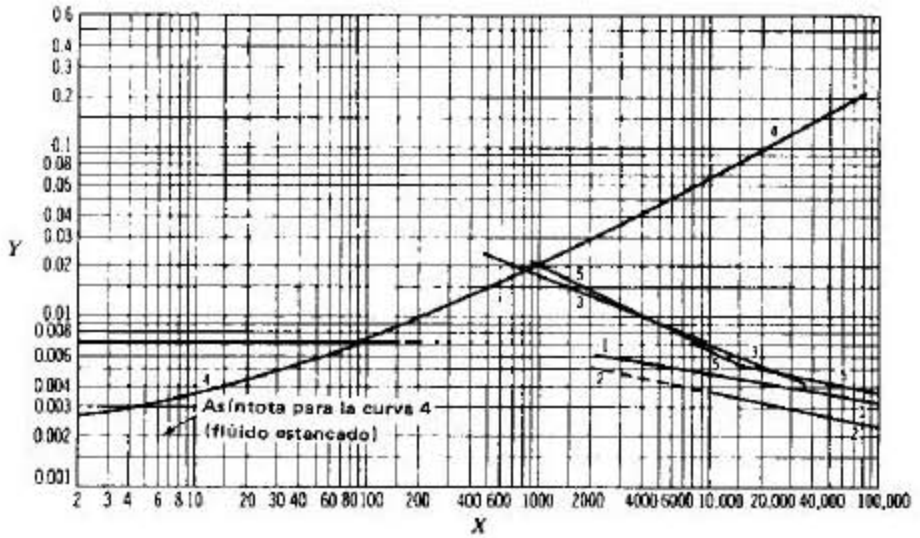


Figura 30.1.

EJEMPLO 2

En un aparato humidificador, el agua desciende en forma de película delgada, por la superficie externa de un cilindro circular vertical. Fluye aire seco a 100° F y 1 atm a ángulos rectos con respecto a un cilindro de diámetro de 3 plg. y de 4 ft de longitud a una velocidad de 20 ft/seg. La temperatura del líquido es de 60° F. Calcúlese la rapidez con la que debe llegar el líquido a la parte superior del cilindro cuando toda la superficie del mismo se va a utilizar en el proceso de evaporación, pero impidiendo que el agua pase más allá de la parte inferior del cilindro.

Las propiedades de la corriente de aire se calcularán a la temperatura de la película, $t_f = (100 + 60)/2 = 80°$ F. La densidad del aire se puede determinar por medio de:

$$\rho = \frac{nM_{aire}}{V} = \frac{PM_{aire}}{RT} = \frac{(1\text{ atm})(29\text{ lb}_m/\text{lb mol})}{\left(0.73\dfrac{\text{atm ft}^3}{\text{lb mol °R}}\right)(540\text{ °R})}$$

$$= 0.0735\text{ lb}_m/\text{ft}^3$$

Otras variables que se requieren para evaluar el número de Reynolds son:

$$v_\infty = 20\text{ ft/s}$$

$$\mu = 1.24 \times 10^{-5}\text{ lb}_m/(\text{ft})(\text{s})$$

$$d_c = \frac{3\text{ in.}}{12\text{ in./ft}} = 0.25\text{ ft}$$

Tabla 30.1 Datos correspondientes a la figura 30.1

Curva	*Situación*	*Operación*	*X*	*Y*	Sc
1	flujo interior de los tubos	transferencia de masa	Re	$j_D = \frac{k_G p_{B,lm}}{G_M}(\mathrm{Sc})^{2/3} = \frac{k_x}{L_M}(\mathrm{Sc})^{2/3}$	0.6–3000
2	flujo interior de los tubos	transferencia de calor	Re	$j_H = \frac{h}{c_p G}(\mathrm{Pr})^{2/3} = \frac{C_f}{2}$	
3	flujo de gases normal a los cilindros	transferencia de masa	Re′	$j_D = \frac{k_G p_{B,lm}}{G_M}(\mathrm{Sc})^{0.66}$	0.6–2.6
		transferencia de calor	Re′	$j_H = \frac{h}{c_p G}(\mathrm{Pr})^{0.66}$	
4	flujo de gases alrededor de esferas simples	transferencia de masa	$\mathrm{Re}''(\mathrm{Sc})^{2/3}$	$\frac{k_c d_p}{D_{AB}}(10^{-3})$	0.6–2.7
		transferencia de calor	$\mathrm{Re}''(\mathrm{Pr})^{2/3}$	$\frac{h d_p}{k}(10^{-3})$	

5	flujo de gases, paralelo a las placas	transferencia de masa	Re'''	$j_D = \frac{k_G p_{B,lm}}{G_M}(Sc)^{2/3}$	0.6–2.1
		transferencia de calor	Re'''	$j_H = \frac{h}{c_p G}(Pr)^{2/3}$	

$Re' = \frac{d_c v_\infty \rho}{\mu}$

$Re'' = \frac{d_p v_\infty \rho}{\mu}$

$Re''' = \frac{lv\rho}{\mu}$

d_c = diámetro del cilindro

d_p = diámetro de la esfera

l = distancia desde el borde de ataque

G_M = velocidad de la masa molar de gas

L_M = velocidad de la masa molar de líquido

$G = \rho v_\infty$ = velocidad de la masa

$p_{B,lm}$ = presión parcial logarítmica media del gas que efectúa la transferencia

$$= \frac{p_{B,G} - p_{B,i}}{\ln \frac{p_{B,G}}{p_{B,i}}}$$

dando

$$\mathrm{Re}' = \frac{d_c v_\infty \rho}{\mu} = \frac{(0.25\ \mathrm{ft})(20\ \mathrm{ft/s})(0.0735\ \mathrm{lb_m/ft^3})}{1.24\times10^{-5}\ \mathrm{lb_m/(ft)(s)}} = 29\,640$$

De la línea 3, figura 30.1, se observa que el valor de j_D es:

$$j_D = \frac{k_G p_{B,lm}(\mathrm{Sc})^{0.66}}{G_m} = 0.0047$$

Del apéndice de la tabla J.1, la difusividad del agua en aire a 298 K es de 0.260 $\mathrm{cm^2/seg}$, lo cual corregido, de acuerdo con la temperatura y convertido a unidades usadas en ingeniería, se transforma en:

$$D_{AB} = (0.260\ \mathrm{cm^2/s})\left(\frac{300}{298}\right)^{3/2}\left(3.87\frac{\mathrm{ft^2/hr}}{\mathrm{cm^2/s}}\right)$$

$$= 1.016\ \mathrm{ft^2/hr}$$

Ahora puede calcularse el número de Schmidt, así:

$$\mathrm{Sc} = \frac{\mu}{\rho D_{AB}} = \frac{(1.24\times10^{-5}\ \mathrm{lb_m/(ft)(s)})(3600\ \mathrm{s/hr})}{(0.0735\ \mathrm{lb_m/ft^3})(1.016\ \mathrm{ft^2/hr})} = 0.60$$

y al elevar este valor a la potencia 0.66, se convierte en:

$$(\mathrm{Sc})^{0.66} = (0.60)^{0.66} = 0.712$$

La presión del vapor de agua a 60 °F, es de 13 mm. Las concentraciones interfacial y global son:

en la intercara: $p_{H_2O} = 13$ mm; $p_{\mathrm{aire}} = 747$ mm

global, en el gas: $p_{H_2O} = 0$ mm; $p_{\mathrm{aire}} = 760$ mm

$p_{B,lm}$ es la presión parcial logarítmica media del aire que no está en difusión,

$$p_{B,lm} = \frac{760\ \mathrm{mm} - 747\ \mathrm{mm}}{\ln\dfrac{760\ \mathrm{mm}}{747\ \mathrm{mm}}} = 753.5\ \mathrm{mm}$$

La velocidad de la masa molar del aire que fluye normalmente al cilindro es:

$$G_M = (20\ \mathrm{ft/s})(3600\ \mathrm{s/hr})(0.0735\ \mathrm{lb_m/ft^3})(\mathrm{lb\ mol}/29\mathrm{lb})$$

$$= 182.5\ \mathrm{lb\ mol/(hr)(ft^2)}$$

El coeficiente de película de transferencia de masa, k_G, se evalúa a partir de j_D, por medio de:

$$k_G = \frac{0.0047\ G_M}{p_{\mathrm{air},lm}(\mathrm{Sc})^{0.66}} = \frac{(0.0047)(182.5)}{(753.5)(0.712)} = 0.0016\frac{\mathrm{lb\ mol}}{(\mathrm{hr})(\mathrm{ft^2})(\mathrm{mm})}$$

El flujo de masa se define por medio de la ecuación (29-6), como:

$$N_A = k_G(p_{H_2O,i} - p_{H_2O,\alpha}) = [0.0016\ \mathrm{lb\ mol/(hr)(ft^2)(mm)}](13\ \mathrm{mm})$$

$$= 0.0208\ \mathrm{lb\ mol/(hr)(ft^2)}$$

La rapidez de alimentación de agua se puede determinar, ahora, para el cilindro cuya área superficial es de $\pi d_c L = \pi(0.25\ \mathrm{pies})(4\ \mathrm{pies}) = 3.14\ \mathrm{pies^2}$.

rapidez de alimentación $= (0.0208\ \mathrm{lb/mol/hr\ ft^2})(18\ \mathrm{lb_m/lb\,mol})(3.14\ \mathrm{ft^2})$

$$= 1.17\ \mathrm{lb/hr} \qquad (1.47\times10^{-4}\ \mathrm{kg/s})$$

30.2 TRANSFERENCIA DE MASA PARA FLUJO TURBULENTO A TRAVES DE TUBOS

La transferencia de masa de la pared interior de un tubo a un fluido en movimiento se ha estudiado de manera extensa. También se han obtenido datos correspondientes a la transferencia de masa hacia un líquido en movimiento. Gilliland y Sherwood* estudiaron la vaporización de nueve líquidos diferentes en el aire. La correlación es:

$$\frac{k_c D}{D_{AB}} \frac{p_{B,lm}}{P} = 0.023\ \mathrm{Re}^{0.83}\mathrm{Sc}^{0.44} \tag{30-10}$$

donde D es el diámetro interior del tubo, $p_{B,lm}$ es la composición logarítmica media del gas transportador, calculada entre las composiciones superficiales y de la corriente global; P es la presión total, D_{AB} es la difusividad de la masa de la componente en difusión, A en el gas transportador, B, que fluye y Re y Sc son los parámetros adimensionales evaluados en las condiciones globales de la corriente que fluye; se ha encontrado que esta expresión es confiable en el siguiente conjunto de valores:

$$2000 < \mathrm{Re} < 35\,000$$

$$0.6 < \mathrm{Sc} < 2.5$$

En un estudio posterior, Linton y Sherwood* extendieron los valores del número de Schmidt cuando investigaron la disolución de los ácidos benzoico y cinámico y del β naftol. La siguiente expresión correlaciona los resultados combinados de Gilliland y Sherwood y Linton:

$$\frac{k_L D}{D_{AB}} = 0.023\ \mathrm{Re}^{0.83}\mathrm{Sc}^{1/3} \tag{30-11}$$

para valores: $2{,}000 < \mathrm{Re} < 70{,}000$ y $1{,}000 < \mathrm{Sc} < 2260$. Como $K_L D/D_{AB}$ es el número de Nusselt de transferencia de masa o número de Sherwood, la semejanza entre las ecuaciones (30-11) y la de Dittus-Boelter de transferencia de energía, ecuación (20-30), se hace obvia. Esto verifica, de nuevo, el comportamiento análogo de ambos fenómenos de transferencia.

30.3 TRANSFERENCIA DE MASA EN COLUMNAS DE PARED MOJADA

La mayor parte de los datos acerca de la transferencia de masa entre la superficie de un tubo y un fluido en movimiento se han obtenido mediante el uso de columnas de pared mojada, tal como lo describe el capítulo 26. La

*E. R. Gilliland y T. K. Sherwood, *Ind. Eng. Chem.* 26, 516 (1934).
*W. H. Linton y T. K. Sherwood, *Chem. Eng. Prog.* 46, 258 (1950).

razón principal para usar estas columnas en la investigación de la transferencia de masa es que el área de contacto entre ambas fases se puede medir con toda precisión.

El coeficiente de transferencia convectiva de masa que corresponde a la corriente de gas, se define mediante la ecuación (30-10). El coeficiente de transferencia convectiva de masa correspondiente a la película descendente de líquido, fue correlacionada por Vivian y Peaceman por medio de la relación

$$\frac{k_L z}{D_{AB}} = 0.433(\mathrm{Sc})^{1/2}\left(\frac{\rho^2 g z^3}{\mu^2}\right)^{1/6}(\mathrm{Re}_L)^{0.4} \qquad (30\text{-}12)$$

donde z es la longitud de contacto, D_{AB} la difusividad de masa de la componente A, en difusión en el líquido B, ρ es la densidad del líquido B, μ es su viscosidad, g es la aceleración de la gravedad, Sc es el número de Schmidt calculado a la temperatura de la película de líquido y Re_L es el número de Reynolds del líquido que desciende por el tubo, esto es, $4\Gamma/\mu$, donde Γ es la rapidez de flujo del líquido por unidad de perímetro mojado. Los coeficientes de película líquida son de 10 a 20% más bajos que los de la ecuación teórica de absorción en películas laminares. Esto puede deberse a arrugas a lo largo de la superficie del líquido o a disturbios en el flujo del mismo en ambos extremos de la columna de pared mojada. Estas discrepancias entre la rapidez de transferencia teórica y la medida han conducido a la conclusión de que existe una resistencia a la transferencia de masa en la intercara gas-líquido. Las investigaciones realizadas por Scriven y Pigford,* Raimondi y Toor† y Chiang y Toor‡ sostienen que la resistencia interfacial es despreciable en las operaciones normales de transferencia de masa. La correlación de Gilliland y Sherwood, ecuación (30-10), se utilizará para determinar el coeficiente de transferencia de masa en el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 3

Una columna de pared mojada de 2 pulg. DI se está usando para estraer el CO_2 de una solución acuosa por medio de una corriente de aire que fluye a 2.5 pps. En un punto de la columna, la concentración de CO_2 en la corriente de aire es de 1 mol por ciento. En el mismo punto de la columna la concentración de CO_2 en agua es 0.5 mol por ciento. Determínese el coeficiente de transferencia de masa del gas y así como el flujo de masa en ese punto de la columna. La columna funciona a 10 atm y 25°C.

El coeficiente de transferencia convectiva de masa del gas se calcula utilizando la ecuación (30-3), así:

$$\frac{k_c D}{D_{AB}}\frac{p_{B,lm}}{P} = 0.023\mathrm{Re}^{0.83}\mathrm{Sc}^{0.44}$$

†J. E. Vivian y D. W. y D. W. Peaceman, *A. I. Ch. E. J.* 2, 437 (1956).
*L. E. Scriven y R. L. Pigford, *A. I. Ch. E. J.*, 4, 439 (1958).
† P. Raimondi y H. L. Toor, *A. I. Ch. E. J.*, 5 86 (1959).
‡ S. H. Chiang y H. L. Toor, *A. I. Ch. E. J.* 5, 165 (1959).

donde A es la especie en difusión, CO_2, y el parámetro adimensional así como la difusividad de la masa se calculan usando las condiciones globales de la corriente de aire. La difusividad de la masa de CO_2 en aire, a 273 K y 1 atm es igual a 0.136 cm^2/seg., de acuerdo con la tabla J.1. Este valor se puede corregir a las condiciones globales de la manera siguiente:

$$D_{AB} \text{ at } 298 \text{ K and } 10 \text{ atm} = (0.136 \text{ cm}^2/\text{s})\left(\frac{1 \text{ atm}}{10 \text{ atm}}\right)\left(\frac{298 \text{ K}}{273 \text{ K}}\right)^{3/2} = 0.016\frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$$

ó

$$D_{AB} = (0.016 \text{ cm}^2/\text{s})\left(3.87\frac{\text{ft}^2/\text{hr}}{\text{cm}^2/\text{s}}\right) = 0.06 \text{ ft}^2/\text{hr}$$

Como la composición global del gas es de 99% de aire, supondremos que la viscosidad y la densidad del aire representan las condiciones globales. Sus valores son:

$$\mu_{air} = 0.018cp = (0.018)(2.42)\text{lb}_m/\text{ft hr}$$

ó

$$\mu_{air} = (0.018)(6.72\times 10^{-4})\text{ lb}_m/\text{ft s}$$

y

$$\rho_{air} = \frac{P}{RT}M_{air} = \frac{(10 \text{ atm})(29 \text{ lb}_m/\text{lb mol})}{(1.315 \text{ atm ft}^3/\text{lb mol K})(298 \text{ K})} = 0.74 \text{ lb}_m/\text{ft}^3$$

Los números de Schmidt y Reynolds son:

$$\text{Sc} = \frac{\mu}{\rho D_{AB}} = \frac{(0.018\times 2.42 \text{ lb}_m/\text{ft hr})}{(0.74 \text{ lb}_m/\text{ft}^3)(0.06 \text{ ft}^2/\text{hr})} = 0.098$$

y

$$\text{Re} = \frac{Dv_{\infty}\rho}{\mu} = \frac{(2/12 \text{ ft})(2.5 \text{ fps})(0.74 \text{ lb}_m/\text{ft}^3)}{(0.018\times 6.72\times 10^{-4} \text{ lb}_m/\text{ft s})} = 25\,500$$

A 25°C, la constante de Henry que corresponde al CO_2 en agua es 1.64×10^4 atm fracción molar de CO_2 en solución. Con una concentración de 0.005 de fracción molar de CO_2 la presión parcial de CO_2 en la intercara es de 8.2 atm. Las concentraciones interfacial y global, en función de la presión, son las siguientes:

en la intercara,

$$p_A = 8.2 \text{ atm}$$

y

$$p_B = 1.8 \text{ atm}$$

y en la fase gaseosa global,

$$p_A = 0.1 \text{ atm}$$

y

$$p_B = 9.9 \text{ atm}$$

La presión parcial logarítmica media del constituyente B se calcula que es:

$$p_{B,lm} = \frac{9.9 \text{ atm} - 1.8 \text{ atm}}{\ln (9.9 \text{ atm}/1.8 \text{ atm})} = 4.75 \text{ atm}$$

Al sustituir estos valores en la ecuación (30-3) se puede evaluar el coeficiente de transferencia de masa así:

$$k_c = 0.023 \, \text{Re}^{0.83} \text{Sc}^{0.44} \left(\frac{P}{p_{B,lm}}\right)\left(\frac{D_{AB}}{D}\right)$$

$$k_c = (0.023)(25\,500)^{0.83}(0.098)^{0.44} \frac{(10 \text{ atm})}{4.75 \text{ atm}} \frac{(0.060 \text{ ft}^2/\text{hr})}{(2/12 \text{ ft})}$$

$$= 78.5 \text{ ft/hr} = 78.5 \frac{\text{lb mol}}{\text{hr ft}^2 \text{ lb mol/ft}^3}$$

El flujo de masa es:

$$N_A = k_c(c_{A,i} - c_{A,\infty}) = \frac{k_c}{RT}(p_{A,i} - p_{A,\infty})$$

or

$$N_a = \frac{(78.5 \text{ lb mol/hr ft}^2 \text{ lb mol/ft}^3)}{(1.315 \text{ atm ft}^3/\text{lb mol K})(298 \text{ K})}(8.2 \text{ atm} - 0.1 \text{ atm})$$

$$= 1.62 \text{ lb mol/hr ft}^2 \qquad (2.20 \text{ mol/s} \cdot \text{m}^2)$$

30.4 TRANSFERENCIA DE MASA EN CAMAS EMPACADAS Y FLUIDIFICADAS

Comúnmente se utilizan camas empacadas y fluidificadas en operaciones industriales de transferencia de masa, incluyendo la absorción y de absorción de gases y líquidos por partículas sólidas, intercambio de iones y reacciones gaseosas catalizadas por superficies sólidas. Wilson y Geankoplis* investigaron la transferencia de masa entre líquidos y camas de esferas empacadas. Sus datos se correlacionan por medio de la expresión:

$$\epsilon j_D = \frac{1.09}{\text{Re}'''} \tag{30-13}$$

para $0.0016 < \text{Re}''' < 55{,}165 < \text{Sc} < 70\,600$ y $0.35 < \epsilon < 0.75$ y por medio de:

$$\epsilon j_D = \frac{0.25}{(\text{Re}''')^{0.31}} \tag{30-14}$$

para $55 < \text{Re}''' < 1500$ y $165 < \text{Sc} < 10\,690$. El número de Reynolds, Re se define en función del diámetro de las esferas, d_p y de la velocidad superficial de la masa del fluido, G, en masa por unidad de tiempo por unidad de sección

*E. J. Wilson y C. J. Geankiplis, *Ind. Eng. Chem.* Fund., 5, 9 (1966).

transversal de la torre sin empacar. La fracción de vacío en la cama empacada se denomina ϵ, es el volumen vacío que se encuentra entre las partículas de sólido, dividido entre el volumen total de espacio vacío más las partículas de sólido. Estos valores varían de, aproximadamente 0.30 a 0.50 en la mayor parte de las camas empacadas. Se recomienda el uso de la relación de Gupta y Thodos*:

$$\epsilon j_D = \frac{2.06}{(\mathrm{Re}''')^{0.575}} \tag{30-15}$$

se recomienda para la transferencia de masa entre gases y camas de esferas en el conjunto de valores de Reynolds: $90 < \mathrm{Re}''' < 4000$. Los datos cuyo valor es superior a este conjunto de valores indican un comportamiento de transición y Gupta y Thodos han hecho un informe gráfico de ellos.‡

La transferencia de masa en camas gaseosas y líquidas de esferas ha sido relacionada por Gupta y Thodos† por medio de la ecuación:

$$\epsilon j_D = 0.010 + \frac{0.863}{(\mathrm{Re}''')^{0.58} - 0.483} \tag{30-16}$$

En el libro de Kunii y Levenspiel‖ puede encontrarse una descripción detallada de la transferencia de calor y masa en camas fluidificadas.

30.5 TRANSFERENCIA DE MASA CON REACCION QUIMICA

Se encuentran muchas aplicaciones de la transferencia de masa en relación con las reacciones químicas. Tome en consideración la absorción de bióxido de carbono de una fase gaseosa a una líquida. La máxima cantidad de bióxido de carbono absorbida se encuentra limitada por la concentración de equilibrio. Si se utiliza una solución cáustica diluida, tal como en la fase líquida, el bióxido de carbono será absorbido y entonces reaccionará formando un carbonato no volátil. La concentración de equilibrio baja a cero. Como consecuencia directa de la reacción química, se reduce la cantidad de fluido requerido en el proceso de absorción.

Tanto la rapidez de transferencia de masa como la rapidez de reacción química pueden ser el factor de control de este proceso simultáneo; con frecuencia no domina ninguna de las dos de manera absoluta. La rapidez de transferencia total de masa se expresa en función de la resistencia a ambas

* A. S. Gupta y G. Thodos, *A. I. Ch. E. J.* 9, 751 (1963).

‡A. S. Gupta y G. Thodos, Ind. Eng Chem. Fund., 3,218 (1964)

†A. S. Gupta y G. Thodos, *A. I. Ch. E. J.* 8, 608 (1952).

‖D. Kunii y O. Levenspiel, *Fluidization Engeneering* Wiley, Nueva York (1969)

rapideces. En general, el estudio de la transferencia de masa simultánea con reacción química es muy complicada. Se sugieren al lector dos referencias acerca de la materia*†.

30.6 COEFICIENTES DE CAPACIDAD PARA TORRES INDUSTRIALES

Aunque la columna de pared mojada, tal como se la describió en el capítulo 26, tiene un área interfacial definida, el área correspondiente, en otros tipos de equipo, que se describirán en el capítulo 31, es virtualmente imposible de medir. Por esta razón debe introducirse un factor ingenieril a, para representar el área interfacial por unidad de volumen del equipo de transferencia de masa. Tanto a como el coeficiente de transferencia de masa dependen de la geometría física del equipo así como de la rapidez de flujo de las dos corrientes, no miscibles, en contacto; debido a esto, se les correlaciona llamándolas coeficiente de capacidad, $k_c a$. Las unidades de $k_c a$ son moles transferidos de A/(h)(volumen)(moles de A/volumen). El coeficiente de capacidad se puede encontrar en las ecuaciones de diseño básico del capítulo 31.

Las ecuaciones empíricas de los coeficientes de capacidad se deben obtener experimentalmente para cada tipo de operación de transferencia de masa. Esta relación la obtuvieron Sherwood y Halloway‡, al hacer la primera investigación comprensiva de los coeficientes de transferencia de masa de película líquida en torres empacadas de absorción. Los resultados experimentales obtenidos en una variedad de empaques, se representaron por medio de:

$$\frac{k_L a}{D_{AB}} = \alpha \left(\frac{L}{\mu}\right)^{1-n} \left(\frac{\mu}{\rho D_{AB}}\right)^{0.5} \tag{30-17}$$

donde $k_L a$ es el coeficiente de capacidad de transferencia de masa, en

$$\text{lb mol/h pie}^3 \ (\text{lb mol/pie}^3)\ L$$

es la rapidez del líquido en lb/h pie^2 ; μ es la viscosidad del líquido, en lb/h pie; ρ es la densidad del líquido, en lb pie^3 y D_{AB} es la difusividad de la masa líquida de la componente A en el líquido B, en pie^2/h. En la tabla 30.2 aparecen los valores de la constante α y el exponente n, correspondientes a diferentes formas de empaque.

*G. Astarita, *Mass Transfer wieth Chemical Reaction*, Elsevier, Amsterdam (1967).
† P. V. Danckwerts, *Gas-Liquid Reactions*. McGraw Hill Book Company, Nueva York (1970).
‡ T. K. Sherwood and F. A. Holloway, *Tans. A. I. Ch. E.*, 36, 21, 39 (1940).

Tabla 30.2 Coeficientes de empaque correspondientes a (30-17)

Empaque	a	n
Anillos de 2 pulg.	80	0.22
Anillos de 1 ½ pulg.	90	0.22
Anillos de 1 pulg.	100	0.22
Anillos de ½ pulg.	280	0.35
Anillos de 3/8 pulg.	550	0.46
Caballetes de 1 ½ pulg.	160	0.28
Caballetes de 1 pulg.	170	0.28
Caballetes de ½ pulg.	150	0.28
Mosaicos espirales de 3 pulg.	110	0.28

En los tratados acerca de las operaciones de transferencia de masa el estudio de cada operación específica y de cada tipo específico de torre, se puede encontrar más correlaciones correspondientes a los coeficientes de capacidad.*

30.7 CONCLUSION

En este capítulo se han estudiado las ecuaciones que correlacionan los coeficientes de transferencia convectiva de masa obtenidos de las investigaciones experimentales. Estas correlaciones han servido para verificar la validez del análisis de transferencia convectiva, tal como se estudió en el capítulo 28. En el capítulo 31 se darán a conocer los métodos de aplicación de las correlaciones correspondientes a los coeficientes de la capacidad al diseño de equipo de transferencia de masa.

PROBLEMAS

30.1 Una placa cuadrada, delgada, de naftalina de 1 metro por lado, se encuentra orientada en forma paralela a la corriente de aire que fluye a 30 m/seg. El aire está a 310 K y a una presión 1.013×10^5 y la placa se encuentra a 300 K. Determine la rapidez de sublimación de la placa. La difusividad de la naftalina en aire a 273 K y 1.013×10^5 Pa es de 5.14×10^{-6} m^2/seg. y la presión del vapor de naftalina a 300 K es de 26 Pa.

30.2 Fluye tolueno, C_7H_8, en forma de película delgada, descendiendo sobre la superficie exterior de una placa plana vertical de 1.25 m de

*T. K. Sherwood, R. L. Pigford y C. R. Wilke, *Mass Transfer*, McGraw Hill Book Company, Nueva York, 1975; R. E. Treybal, *Mass Transfer Operations*, McGraw Hill Book Company, Nueva York, 1968; C. J. King, *Separation Processes*, McGraw Hill Book Company, Nueva York, (1971); W. S. Normal, *Absorption, Distillation and Cooling Towers*, Wiley, 1961; A. H. P. Skelland, *Diffusional Mass Transfer*, Wiley, Nueva York, 1974.

ancho y 1 m de longitud. La temperatura del líquido es de 295 K. Fluye aire, libre de tolueno a 311 K y una presión de 1.013×10^5, a través de una placa paralela a la superficie, a una velocidad de 3 m/seg. Calcule la rapidez con la que debe alimentarse con líquido la parte superior de la placa, de modo que la evaporación le impida llegar al fondo de la placa. A la temperatura promedio de la película de gas, la difusividad del tolueno en aire es de 9.3×10^{-6} m^2/seg y el número de Schmidt es 1.78. A 295 K la presión del vapor de tolueno es de 2670 Pa.

30.3 El coeficiente de transferencia de masa, promediado en toda la superficie de una esfera, se puede calcular a partir de la ecuación de Froessling, que es la ecuación (30-5). En la figura 30.1, Nu_{AB}, correspondiente a una esfera, es igual a 2 cuando X es igual a cero. ¿Satisface la ecuación de Froessling también esta condición?

30.4 Una almacenamiento de agua de 1 ft^2 se inserta en el fondo de un conducto grande. La superficie del agua se mantiene a nivel con el fondo del conducto y su temperatura es de 90° F. Fluye aire a 100° F y 1 atm, con una presión parcial de vapor de agua igual a 24 mm de Hg., en forma paralela a la superficie del agua. Calcule la rapidez de evaporación del almacenamiento si el aire fluye con una velocidad global de 20 ft/seg.

30.5 Calcule el coeficiente individual de transferencia de masa, k_L, correspondiente a la disolución del cloruro de sodio de una esfera de 1.5 cm de diámetro, colocada en una corriente de agua. La velocidad de la corriente, que se encuentra a 300 K es de 8 m/seg.

30.6 Una bolita de naftalina se encuentra suspendida en un conducto de aire. Calcule el coeficiente instantáneo de transferencia de masa:

a) si el aire se encuentra inmóvil alrededor de la bolita y a 295 K y 1.013×10^5 Pa de presión,

b) si el aire está fluyendo con una velocidad de 1.5 m/seg. y a 295 K y 1.013×10^5 Pa de presión.

30.7 Calcule la distancia que debe viajar en su caída una gota esférica de agua, cuyo diámetro original es de 1 mm, en medio de aire inmóvil que se encuentra a 315 K y 1.013×10^5 Pa de presión, para poder reducir su volumen en un 50% . La velocidad terminal de caída libre de las gotas de agua en el aire, aparece en la siguiente tabla y fue obtenida por Sherwood y Pigford*

diámetro en mm	0.05	0.2	0.5	1.0	2.0	3.0
velocidad en pies/seg.	0.18	2.3	7.0	12.7	19.2	23.8

*T. K. Sherwood y R. L. Pigford, *Absorption and Extraction*, McGraw Hill Book Company, Nueva York, 1952.

Suponga que la forma de la gota sigue siendo esférica y que la temperatura del líquido permanece constante a 295 K. Calcule todas las propiedades de la película gaseosa a 305 K.

30.8 Calcule la distancia que recorre en su caída la gota esférica descrita en el problema 30.7 si su velocidad terminal es siempre la inicial.

30.9 Fluyen ocho libras de benceno por hora en una película delgada en forma descendente sobre la superficie externa de un cilindro circular vertical. También fluye aire seco a 110° F y 1 atm de presión formando ángulos rectos con el cilindro de 3 in de diámetro, a una velocidad de 25 ft/seg. La temperatura del líquido es de 60° F. Determine la longitud del cilindro si se va a usar toda la superficie del mismo en el proceso de evaporación, pero evitando que el benceno pase al fondo del cilindro.

30.10 Algunos investigadores, al estudiar la transferencia de masa desde esferas simples, correlacionaron el número de Nusselt de transferencia de masa por medio de la relación:

$$Nu_{AB} = 2.0 + CRe^{m}Sc^{1/3}$$

El valor 2.0 representa la contribución, por difusión molecular, a un gran volumen de aire estancado. Obtenga, por medio del estudio de la difusión de una esfera de diámetro fijo, Nu_{AB_0} correspondiente a la difusión molecular y escriba las suposiciones que deben hacerse para que Nu_{AB_0} sea igual a 2.0.

30.11 Calcule el coeficiente de transferencia de masa k_L, correspondiente a la disolución del cloruro de sodio de un cilindro de 1.5 cm de diámetro, que está colocado normalmente a una corriente de agua. La velocidad de la corriente de agua, que se encuentra a 300 K, es de 10 m/seg.

30.12 Está fluyendo una corriente de aire y vapor de agua en dirección opuesta al flujo de una película de líquido que desciende por una columna de agua de pared mojada de 1 in DI. Las corrientes gaseosa y líquida se encuentran a 77° F y la presión total en la columna es de 753 mm de Hg. En un punto de la columna, la rapidez de flujo del aire es de 2 ft^3/min y la presión parcial promedio del vapor de agua de la corriente es de 5 mm de Hg. De 0.000180 ft^2 seg es la viscosidad cinemática de la corriente de gas. Determine el grosor de la "película efectiva".

30.13 Los datos acerca de la absorción de amoniaco, NH_3 de una corriente de aire y NH_3, en agua, se obtuvieron por medio de una columna de pared mojada de 1 in DI que funciona a 75° F y 1 atm de presión. La mezcla gaseosa tenía las siguientes propiedades:

peso molecular	29
viscosidad	0.0178 centipoises
difusividad de NH_3 en aire	0.0198 cm^2/seg
densidad	0.081 lb_m/ft^3

número de Schmidt	0.69
composición promedio de NH_3,	1.0%

Cuando la masa tiene una velocidad de 5250 lb_m de gas/(h)(ft^2) se informó que su coeficiente de transferencia total de masa de gas, K_G, era de 1.10 lb mol de NH_3/(h)(ft^2)(atm). Evalúe el porcentaje de resistencia total a la transferencia de masa encontrado en la película gaseosa.

30.14 Wilke y Hougin* elaboraron un informe acerca de la transferencia de masa en camas de sólido granulado. Se hizo circular aire a través de una cama de perdigones porosos de celite mojados con agua y evaporando esta agua en condiciones adiabáticas, hicieron un informe de coeficiente de película correspondientes a camas empacadas. En una corrida se obtuvieron los siguientes datos:

diámetro efectivo de la partícula	0.01872 ft
velocidad de la masa de la corriente de gas	601 lb_m/h ft^2
temperatura en la superficie	100° F
presión	733 mm

Suponiendo que las propiedades de la mezcla son iguales a las del aire, calcule el coeficiente de transferencia de masa de la película gaseosa y compare el valor obtenido con el valor de 3.250 lm mol/h ft^2 atm.

30.15 Se van a suministrar siete libras de tolueno cada hora, a la parte superior de un cilindro circular vertical de 2 in de diámetro. El tolueno deberá fluir en una película delgada descendente por la superficie mojada del cilindro. Fluye aire seco a 100° F y 1 atm de presión, formando un ángulo recto con el cilindro mojado a una velocidad de 25 pps. La temperatura del tolueno es de 65° F; a esta temperatura, la presión de su vapor es de 20 mm de Hg. A la temperatura promedio de la película de gas, la difusividad del tolueno en aire es de 0.361 ft^2/h y el número de Schmidt es de 1.78. Determine la longitud del cilindro si el líquido suministrado a la parte superior del cilindro se evapora completamente justamente antes de llegar al fondo.

30.16 Una columna de pared mojada de 2 in DI tiene una mezcla de aire y CO_2 que fluye a 3 ft/seg. La columna funciona a 10 atm y 25° C. En un punto de la columna, la concentración de CO_2 de la mezcla gaseosa es de 0.1 de fracción molar. En el mismo punto, la concentración de CO_2 en el agua en la intercara gas-agua, es de 0.005 de fracción molar, que equivale a una presión parcial que se encuentra inmediatamente encima del líquido de 8.2 atm. Calcule el coeficiente de transferencia de masa así como el flujo de masa en el punto que se está estudiando, usando la correlación de Gilliland y Sherwood.

*C. R. Wilke y O. A. Hougen, *Trans. A. I. Ch. E.* 41, 445 (1945).

30.17 Pasa aire, con una velocidad de 40 ft/seg, a través de un tubo de naftalina que tiene un diámetro interior de 1 in y una longitud de 10 ft. El aire se encuentra a 100° F y 1 atm de presión. Si suponemos que el cambio de presión a lo largo del tubo es despreciable y que la superficie de la naftalina se encuentra a 100° F, encuentre la rapidez de sublimación de la naftalina dentro del tubo en libras por hora. La difusividad de la naftalina en aire a 32° F y 1 atm es de 0.199 ft^2/h. y la presión de su vapor a 100° F es de 0.25 mm de Hg. Note que, debido a la difusión de la naftalina en la corriente de aire, la concentración de la naftalina en la corriente de gas aumentará con la longitud del tubo.

30.18 Fluye aire a 100° F y 1 atm de presión sobre una bolita de naftalina. Como la naftalina ejerce una presión de vapor a 100° F igual a 5 mm de Hg, se sublima, integrándose a la corriente de aire que pasa, la cual tiene una concentración despreciablemente pequeña de naftalina en la corriente global de aire. En las condiciones especificadas de flujo se encontró que el coeficiente de transferencia de cator es de

$$25 \text{ Btu/(h)(ft}^2\text{)(° F)}.$$

Las propiedades físicas a la temperatura de la película son:

difusividad de la masa	0.37 ft^2/h
viscosidad cinemática del aire	0.651 ft^2/h
difusividad térmica del aire	0.92 ft^2/h
densidad del aire	0.71 lb_m/ft^2
capacidad calorífica del aire	0.24 $Btu/(lb_m)(° F)$
conductividad térmica del aire	0.156 $Btu/(h)(ft^2)(° F)$

Determine el flujo de masa de la naftalina.

31
EQUIPO DE TRANSFERENCIA DE MASA

En el Capítulo 29 se introdujo la teoría que por lo general se utiliza para explicar el mecanismo de transferencia de masa entre fases. En el Capítulo 30 se enumeraron las correlaciones correspondientes a los coeficientes de transferencia convectiva de masa utilizados con las ecuaciones de masa utilizados con las ecuaciones de transferencia interfase. Este capítulo incluye el desarrollo de métodos de aplicación de las ecuaciones de transferencia al diseño de equipo de transferencia continua-de contacto, de masa. Es importante percatarse de que los procedimientos no están restringidos al diseño de equipo nuevo sino que pueden aplicarse al análisis del equipo existente para posibles mejoras en su rendimiento.

La presentación o desarrollo de la transferencia de masa desde las ecuaciones que la definen hasta las ecuaciones finales de diseño, se ha hecho en forma completamente análoga a la que se empleó anteriormente, en lo referente a transferencia de energía. En el Capítulo 28 se definieron los coeficientes de transferencia convectiva de masa y se presentaron las teorías relacionadas con este fenómeno. Las definiciones y métodos de análisis fueron semejantes a los que se usaron en el Capítulo 19 en los coeficientes de transferencia convectiva de calor. Se han desarrollado: una fuerza motriz total y un coeficiente total de transferencia, expresados en función de coeficientes convectivos individuales, para explicar el mecanismo de transferencia de ambos procesos. En el Capítulo 22 se pudo evaluar el área de un cambiador de calor, integrando la relación apropiada de transferencia de energía. Por lo tanto, es de esperarse que se puedan encontrar relaciones semejantes de transferencia de masa, que al ser integradas nos proporcionen resultados acerca del área total de contacto en un cambiador de masa.

31.1 TIPOS DE EQUIPOS DE TRANSFERENCIA DE MASA

Muchas clases de operaciones de transferencia de masa se relacionan con el problema del cambio de composición de las soluciones y mezclas, usando principios de transferencia de masa interfase. Ejemplos típicos de tales operaciones son: (1) la transferencia de un soluto de la fase gaseosa a la líquida, tal como se encuentra en la absorción, deshumidificación y destilación; (2) la transferencia de un soluto de la fase líquida a la gaseosa, tal como ocurre en los procesos de deabsorción y dehumidificación; (3) la transferencia de un soluto, de una fase líquida a una segunda fase líquida, no miscible, tal como existe en la extracción líquido-líquido; (4) la transferencia de un soluto de una fase sólida a una fluida, tal como en los procesos de secado y lixiviación y (5) la transferencia de un soluto de un fluido a la superficie de un sólido, tal como se encuentra en los procesos de absorción e intercambio de iones.

Las operaciones de transferencia de masa se realizan, usualmente, en torres diseñadas para proporcionar un contacto íntimo a las dos fases.

Ese equipo se puede clasificar en cuatro tipos generales, de acuerdo con el método utilizado para producir el contacto interfase.

Existen, o son posibles, muchas variedades y combinaciones de estos tipos, este estudio se restringirá a las principales clasificaciones.

Las torres de atomizador consisten en cámaras grandes abiertas a través de las cuales fluye la fase gaseosa y dentro de las cuales se introduce el líquido por medio de boquillas u tros medios de atomización.

En la figura 31.1 puede observarse la dirección del flujo de la fase en una torre de atomización.

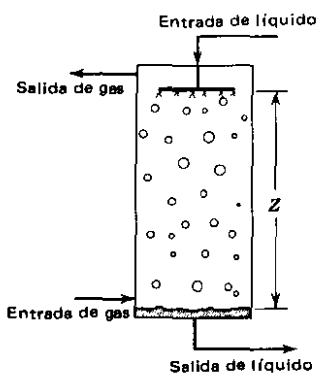


Figura 31.1 Torre de atomización

Se introduce el líquido en forma de atomización, cayendo a causa de la gravedad, cuyo sentido es opuesto al de la corriente de gas ascendente. La bo-

quilla de atomización está diseñada para subdividir al líquido en un gran número de gotitas diminutas. Para una rapidez dada de flujo de líquido, las gotas más pequeñas proveen una mayor área de contacto interfase a través de la cual se transfiere la masa. Sin embargo, se tiene un gran cuidado para evitar la producción de una atomización tan fina que se vea arrastrada por la corriente emergente de gas. La distancia que recorre la gota en su caída, determina el tiempo de contacto y, a su vez, influye en la cantidad de masa transferida entre las dos fases en contacto continuo.

La resistencia a la transferencia en la fase gaseosa, se reduce por el movimiento resolvente de las gotitas de fluido descendentes. Las torres de atomización se utilizan en la transferencia de masa de los gases altamente solubles en los cuales la resistencia de la fase gaseosa usualmente controla la rapidez de transferencia de masa.

El principio inverso al de la torre de atomización es el de la torre de burbujas, en la cual el gas se dispersa en la fase líquida en forma de pequeñísimas burbujas. La burbujitas proporcionan el área grande interfase de contacto, que se necesita.

La transferencia tiene lugar, tanto durante la formación de burbujas como durante el ascenso de las mismas a través del líquido. Las burbujas en movimiento reducen la resistencia de la fase líquida. Las torres de burbujas se utilizan con sistemas en los que la fase líquida controla la rapidez de transferencia de masa, esto es, la absorción de gases relativamente insolubles. En la figura 31.2 aparecen la longitud de contacto y la dirección del flujo de la fase en una torre de burbujas. El mecanismo básico de transferencia de masa de las torres de burbujas también se encuentra en los tanques o estanques de lote de burbujas, donde el gas se dispersa en el fondo de los tanques. Este equipo se utiliza usualmente en la aereación de las aguas negras.

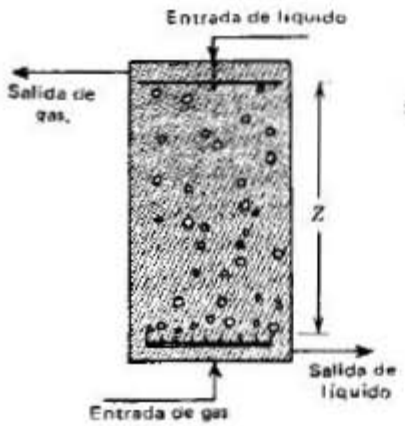


Figura 31.2 Torre de burbujas

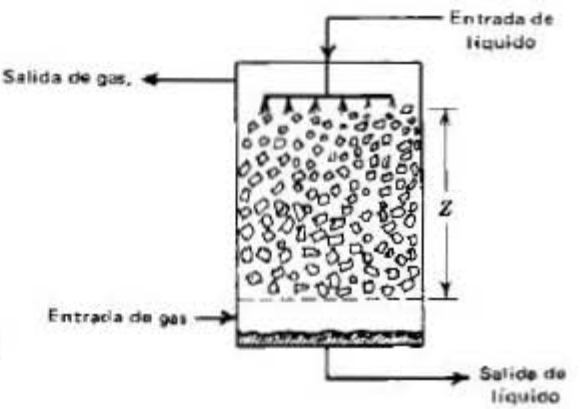


Figura 31.3 Torre empacada contracorriente

Las torres empacadas forman el tercer tipo general de equipo de transferencia de masa que consta de un contacto continuo entre la corrientes de dos fases no miscibles. Dichas torres son columnas verticales que se han llenado con material de relleno, tal como se ilustra en la figura. 31.3. Se utiliza una gran variedad de materiales de relleno, desde cerámica, especialmente diseñada para este propósito, hasta pedazos de roca. El líquido se distribuye sobre el material de relleno y desciende por la superficie de éste en forma de películas delgadas o corrientes subdivididas. El gas generalmente fluye hacia arriba, en sentido opuesto al líquido descendente. Ambas fases se encuentran bien agitadas. Esta clase de equipo se puede utilizar en sistemas gas-líquido, en los cuales cualquiera de las resistencias de las fases ejerce el control o en las que ambas resistencias son importantes.

Se utilizan tipos especiales de torres empacadas para enfriar agua y poder volver a hacerla circular utilizándola como medio para la tranferencia de calor. Estas estructuras están hechas con superficies planas de tablas de madera y contrucción de rejilla de tal manera que el aire pueda fluir libremente a través de cada una de las superficies. Se atomiza el agua sobre la superficie superior y después desciende a través de las diversas superficies, hasta llegar a un recipiente colector.

Las torres de enfriamiento se pueden clasificar como de tiro natural, cuando hay suficiente viento natural para arrastrar consigo el aire húmedo y como de tiro forzado o inducido, cuando se utiliza un ventilador. En las torres de tiro forzado, el aire se hace llegar a las superficies que se encuentran en la parte inferior de la estructura y después fluye, de manera ascendente, a través de las mismas, en sentido opuesto al del flujo de agua.

Tanto la placa de burbujas como las torres de placa de cedazo se utilizan regularmente en la industria y representan los mecanismos combinados de transferencia que se observan en las torres de atomización y de burbujas. En cada una de las placas se forman burbujas de gas en la parte inferior de un estanque líquido, obligando al gas a pasar por pequeños orificios perforados en la placa o bajo tapas perforadas sumergidas en el líquido. La transferencia de masa interfase ocurre durante la formación de burbujas así como cuando las burbujas ascienden a través del estanque de líquido agitado. La transferencia adicional de masa tiene lugar por encima del estanque del líquido a causa del exceso de atomización producido por el mezclado activo de líquido y el gas que se encuentran sobre la placa. Dichas placas se encuentran colocadas una sobre otra formando una cubierta cilíndrica tal como se puede apreciar en la figura 31.4. El líquido fluye de manera descendente, atravesando en primer lugar, la placa superior y después la inferior.

El vapor asciende a través de cada una de las placas. Como puede verse en la figura 31.4, el contacto de ambas fases se realiza por pasos.

Estas torres no pueden diseñarse utilizando ecuaciones obtenidas integrando sobre un área continua de contacto interfase. En vez de esto, se las diseña mediante cálculos por pasos, que se desarrollan y utilizan en los cursos

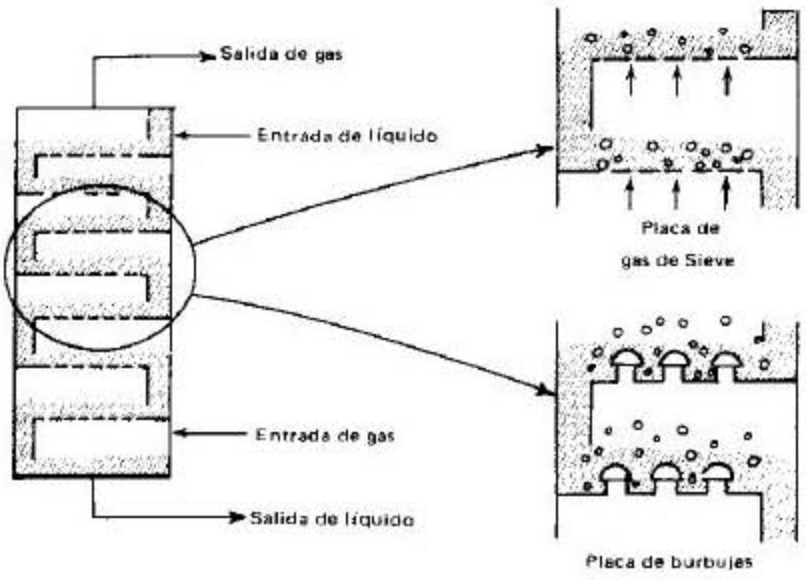


Figura 31.4 Torres de placas

de diseño de operaciones paso a paso. No se estudiará el diseño de torres de placas en este libro, el estudio se limitará a equipos de contacto continuo.

31.2 TANQUES O ESTANQUES DE TRANSFERENCIA DE MASA INTERMITENTES

En el tratamiento de aguas negras a menudo el agua expele o deja escapar gases indeseables y absorbe oxígeno cuando las burbujas de aire se dispersan cerca del fondo de los tanques o estanques de oxigenación. La introducción de gas comprimido en dispersantes de orificio pequeño, tales como tubos perforados, tubos rociadores y placas porosas, produce pequeñas burbujas de gas, que ascienden por el líquido.

Cuando la burbuja asciende, puede transferirse soluto del gas al líquido o del líquido al gas, dependiendo de la fuerza motriz de concentración.

Como los gases mezclados son usualmente sólo ligeramente solubles en el líquido, la transferencia de masa se calcula usando el coeficiente total de transferencia de masa del líquido:

$$N_A = K_L(c_A^* - c_{A,L}) \tag{29-11}$$

La rapidez con la que se agrega el soluto al líquido contenido en el tanque es:

$$W_A = K_L A(c_A^* - c_{A,L})$$

donde A es el área interfacial total de contacto entre las burbujas de gas y la solución líquida. La ecuación se puede expresar en forma diferencial por medio de la ecuación:

$$\frac{d\,(\text{moles of } A)}{dt} = K_L A(c_A{}^* - c_{A,L})$$

En un tanque de volumen constante, esta ecuación se puede expresar en función de la acumulación del soluto:

$$\frac{dc_{A,L}}{dt} = K_L \frac{A}{V}(c_A{}^* - c_{A,L}) \tag{31-1}$$

Cuando las burbujas ascienden, la concentración de equilibrio, $c_A{}^*$ permanece escencialmente constante, por lo cual se pueden separar las variables,

$$\frac{dc_{A,L}}{c_A{}^* - c_{A,L}} = K_L \frac{A}{V}\,dt$$

e integrarse entre los límites de tiempo, cero y t y los límites correspondientes de la concentración, c_{A_0} y $c_{A,\,L\,t}$, para obtener:

$$\ln\left[\frac{c_A{}^* - c_{A,L_0}}{c_A{}^* - c_{A,L_t}}\right] = K_L \frac{A}{V} t \tag{31-2}$$

La razón A/V, representa el área total interfacial de las burbujas por unidad de volumen de solución del tanque. Como las burbujas pequeñas producen una mayor área interfacial por volumen del gas con el que se alimenta el dispersor, aumentando así la magnitud de esta razón y las burbujas de mayor tamaño aumentan el mezclado en el tanque, aumentando así la magnitud del coeficiente total de transferencia de masa, K_L.

El dispersor de gas debe diseñarse de manera que el factor combinado de transferencia, $K_L\,(A/V)$ sea óptimo.

Eckenfelder* encontró una relación general que corresponde a la transferencia de oxígeno de las burbujas de aire que ascienden por una columna de agua en reposo,

$$K_L \frac{A}{V} = \frac{\theta_g Q_g{}^{1+n} h^{0.78}}{V} \tag{31-3}$$

donde θ_g es la constante de correlación que depende del tipo de dispersor, Q_g es la rapidez de flujo de gas en pies cúbicos estándar por minuto, n es una constante de correlación que depende del tamaño de los pequeños orificios del dispersor y h es la profundidad bajo la superficie del líquido en el cual se introduce el aire al tanque de aeración. En la Figura 31.5 se presentan los da-

*W. W. Eckenfelder, Jr. J. *Sanit. Engr. Div.*, Amer. Soc. Civ. Engr., 85, S. A. 4,89 (1959) .

tos típicos que corresponden a una unidad rociadora de aeración, correlacionadas por medio de la ecuación 31.3.

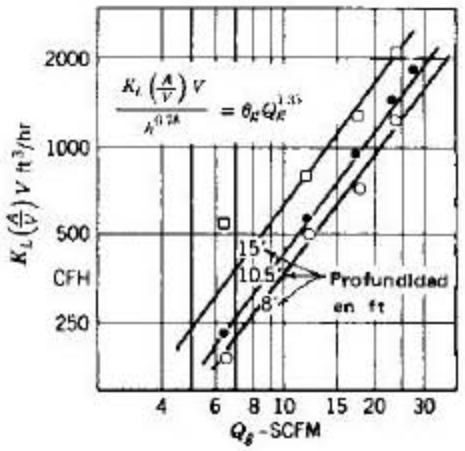


Figura 31.5 Factor de transferencia del oxígeno de una unidad simple de tubo rociador en un tanque de aeración

En el ejemplo siguiente se usarán los datos de Eckenfelder para determinar el tiempo requerido para aumentar el nivel de oxígeno en un tanque de aeración.

Ejemplo 1

Un tanque de aeración de 20,000 ft^3 se oxigena por medio de 15 rociadores, cada uno de ellos utiliza aire comprimido que sale con una rapidez de 15 ft^3 estándar por minuto.

Los rociadores se colocarán a 15 ft bajo la superficie del estanque. Encuéntrese el tiempo requerido para elevar el oxígeno disuelto, de 2 mg/litro a 5 mg/litro, cuando la temperatura del agua es de 20°C.

En la figura 31.5 puede verse que es factor de transferencia, $K_L(A/V)\,V$, correspondiente a un solo rociador es de 1200 ft^3/h, y para el sistema,

$$K_L\frac{A}{V} = \frac{(1200\ \text{ft}^3/\text{hr/rociador})(15\ \text{rociadores})}{(20\,000\ \text{ft}^3)}\,0.90\ \text{hr}$$

La presión hidrostática media de la burbuja ascendente de aire es igual a la media aritmética de la presión en la parte superior y de la parte inferior del fondo del estanque.

$$P_{\text{fondo}} = 1\ \text{atm} + (15\ \text{ft H}_2\text{O})(0.0295\ \text{atm/ft H}_2\text{O}) = 1.44\ \text{atm}$$

$$P_{\text{media}} = \frac{1\ \text{atm} + 1.44\ \text{atm}}{2} = 1.22\ \text{atm}$$

Como la fracción molar de oxígeno en aire es de 0.21, la presión parcial del oxígeno dentro de las burbujas será 0.21(1.22)=0.256 atm. La concentración de equilibrio de un gas

ligeramente soluble se relaciona con su presión parcial por medio de la ley de Henry. A 20°C esta ley establece, para el oxígeno, que:

$$p_{O_2}(\text{atm}) = (4.01 \times 10^4 \text{ atm/fracción molar})\, x_{O_2}$$

$$x_{O_2} = \frac{0.256}{4.01 \times 10^4} = 6.38 \times 10^{-6}$$

Para un litro de solución, que consiste escencialmente en agua pura, la concentración de equilibrio en miligramos por litro se puede calcular así:

$$\text{moles de agua} = \frac{(1000 \text{ cc of agua})(1 \text{ g/cc agua})}{(18 \text{ g}_{\text{agua}}/\text{mol})}$$

$$= 55.6 \text{ mol}$$

$$\text{moles de oxígeno en el litro de agua} = (x_{O_2})(\text{moles de solución})$$

$$= (6.38 \times 10^{-6})(55.6) = 3.55 \times 10^{-4} \text{ mol}$$

$$\text{gramos de oxígeno/litro} = (3.55 \times 10^{-4} \text{ mol})(32 \text{ g/mol})$$

$$= 1.135 \times 10^{-2} \text{ g/litro}$$

$$c_A^* = 11.35 \text{ mg/litro}$$

Si se utiliza la ecuación 31.2, se puede resolver la ecuación obteniéndose el tiempo requerido.

$$t = \ln\left(\frac{c_A^* - c_{A0}}{c_A^* - c_{A,L_t}}\right)\left(\frac{1}{K_L(A/V)}\right) = \ln\left[\frac{(11.35-2)}{(11.35-5)}\right]\left(\frac{1}{0.90/\text{hr}}\right)$$

$$= 0.43 \text{ hr} = 25.8 \text{ min}$$

31.3 BALANCE DE MASAS CORRESPONDIENTE A TORRES DE CONTACTO CONTINUO: ECUACIONES DE LA LINEA DE OPERACION

Existen cuatro fundamentos importantes que constituyen la base del diseño de equipo de contacto continuo:

1. Balance de material y entalpia incluyendo las ecuaciones de conservación de masa y energía,
2. Equilibrio interfase,
3. Ecuaciones de transferencia de masa,
4. Ecuaciones de transferencia de momento.

Las relaciones de equilibrio interfase están definidas por las leyes de la termodinámica, tal como se estudió en la sección 29.1. Las ecuaciones de

transferencia de momento, tal como se presentaron en la sección 9.3 se utilizan para difinir la caída de presión dentro del equipo. No se tratará este tema en el presente capítulo ya que se estudió con anterioridad.

Los balances de material y de entalpia son importantes ya que establecen ecuaciones que sirven para evaluar las composiciones globales de las dos fases en contacto en cualquier plano de la torre. Las ecuaciones de transferencia de masa se deducirán en forma diferencial en combinación con un balance diferencial de la masa y después se las integrará sobre el área de contacto interfacial para que exista la longitud de contacto suficiente, requerida por el cambiador de masa.

FLUJO CONTRACORRIENTE

Pensemos en cualquier operación de transferencia de masa en estado permanente en la cual exista un contacto contracorriente de dos fases no solubles, tal como lo muestra la figura 31.6. Las dos fases no solubles se denominarán fase G y fase L.

En el fondo de la torre de transferencia de masa, la rapidez de flujo y la concentración se definen así:

G_1 es el número total de moles de la fase G que entran a la torre cada hora, por sección transversal de la torre.

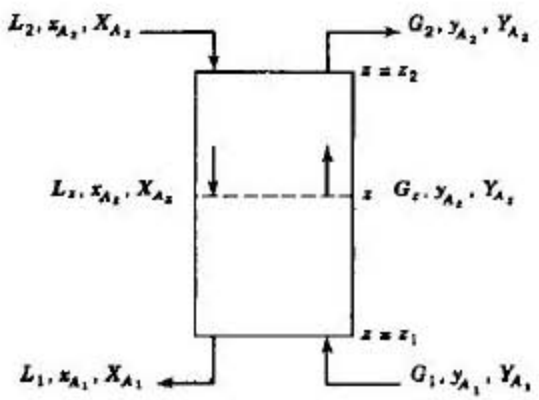


Figura 31.6 Proceso contracorriente en estado permanente

L_1 es el total de moles de la fase L que abandonan la torre por área de sección transversal de la torre.

y_{A_1} es la fracción molar de la componente A en G_1, expresada en moles de A por número total de moles de la fase G.

x_{A_1} es la fracción molar de la componente A en L expresada en moles de A por número total de moles de la fase L.

De manera similar, en la parte superior de la torre o plano z_2, el número total de moles de cada fase será G_2 y L_2 y las composiciones de cada una de las corrientes serán y_{A_2} y x_{A_2}. Un balance total macroscópico de la masa, correspondiente a la componente A alrededor del cambiador de masa en estado permanente, en la cual no hay ni producción química ni desaparición de A, requiere que:

$$\left[\begin{array}{c}\text{moles de } A \text{ que entran}\\ \text{en la torre}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}\text{moles de } A \text{ que abandonan}\\ \text{la torre}\end{array}\right]$$

ó

$$G_1 y_{A_1} + L_2 x_{A_2} = G_2 y_{A_2} + L_1 x_{A_1} \tag{31-4}$$

Un balance de masa, correspondiente a la componente A alrededor del plano $z=z_1$ y el plano arbitrario z, establece que:

$$G_1 y_{A_1} + L_z x_{A_z} = G_z y_{A_z} + L_1 x_{A_1} \tag{31-5}$$

Existen relaciones más sencillas y ecuaciones mucho más fáciles de usar, que se pueden expresar en función de *unidades de concentración libres de soluto*. La concetración de cada una de las fases estará definida de la manera siguiente:
Y_A es el número total de moles de A en G por mol de G libre de A. Esto es:

$$Y_A = \frac{y_A}{1 - y_A} \tag{31-6}$$

y X_A es el número de moles de A en L-libre de A. Esto es:

$$X_A = \frac{x_A}{1 - x_A} \tag{31-7}$$

La rapidez de flujo se convierte, ahora, en L_s y G_s donde L_s es el *número de moles de la fase L en una base libre de soluto, esto* es, moles del solvente transportador en la fase L por hora, por sección transversal de área de la torre y G_s es el *número de moles de la fase G en una base libre de soluto*, esto es, el número de moles del solvente transportador, en la fase G, por hora, por sección transversal de área de la torre. El balance total sobre la componente A se puede escribir, utilizando los términos libres de soluto, de la siguiente manera:

$$G_S Y_{A_1} + L_S X_{A_2} = G_S Y_{A_2} + L_S X_{A_1} \tag{31-8}$$

ó

$$G_S(Y_{A_1} + Y_{A_2}) = L_S(X_{A_1} - X_{A_2})$$

Si se reordena, se obtiene:

$$\frac{L_S}{G_S} = \frac{Y_{A_1} - Y_{A_2}}{X_{A_1} - X_{A_2}}$$

La ecuación (31-8) es la ecuación de una recta que pasa por los puntos (X_{A_1}, Y_{A_1}) y (X_{A2}, Y_{A2}) y cuya pendiente es L_s/G_s. El balance de masa de la componente A alrededor del plano z y de plano arbitrario z=z, en función de términos libres de soluto, es:

$$G_S Y_{A_1} + L_S X_{A,z} = G_S Y_{A,z} + L_S X_{A_1}$$

ó

$$G_S(Y_{A_1} - Y_{A,z}) = L_S(X_{A_1} - X_{A,z}) \qquad (31\text{-}9)$$

Si se reordenan los términos se obtiene:

$$\frac{L_S}{G_S} = \frac{Y_{A_1} - Y_{A,z}}{X_{A_1} - X_{A,z}}$$

Tal como se vio anteriormente, la ecuación (31-9) es la ecuación de una recta que pasa por los puntos (X_{A_1}, Y_{A_1}) y (X_{A2}, Y_{A2}) y cuya pendiente es de L_s/G_s. Dos rectas que tienen la misma pendiente y un punto en común, se localizan sobre la misma recta. Por lo tanto, la ecuación (31-9) es una expresión general que relaciona las composiciones globales de las dos fases de cualquier plano del cambiador de masa. Como define las condiciones operativas dentro del equipo, se denomina *ecuación de la línea de operación de operaciones contracorriente*. En el estudio que se llevó a cabo en la sección 29.2, en el punto 0 de la figura 29.4 es uno de los muchos puntos que se encuentran sobre la línea operativa. Las figuras 31.7 y 31.8 muestran la localización de la línea de operación con relación a la línea de equilibrio cuando las transferencia ocurre de la fase G a la fase L y de la fase L a la G.

Se puede obtener un balance de masa correspondiente a la componente A sobre la longitud diferencial, dz, diferenciando la ecuación (31.9). Esta ecuación diferencial,

$$L_S\, dX_A = G_S\, dY_A \qquad (31\text{-}10)$$

relaciona el número de moles transferidos de una fase a la segunda fase, por hora, por sección transversal del área disponible en la longitud de z.

Es importante que el estudiante reconozca la diferencia entre las ecuaciones (31-5) y (31-9). Aunque ambas ecuaciones describen el balance de masa correspondiente a la componente A, solamente la ecuación (31-9) es la ecuación de una recta. Cuando se escribe en las unidades libres de soluto, X e

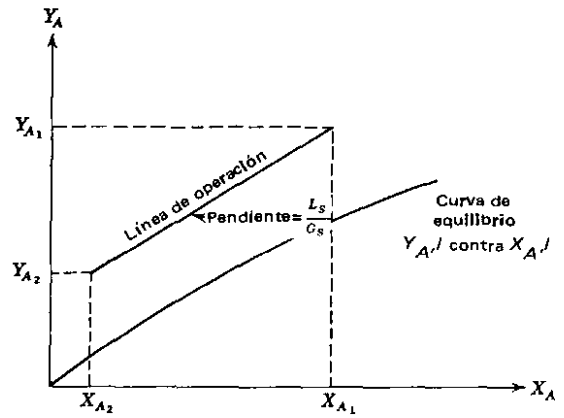


Figura 31.7 Proceso contracorriente en estado permanente, transferencia de la fase G a la L

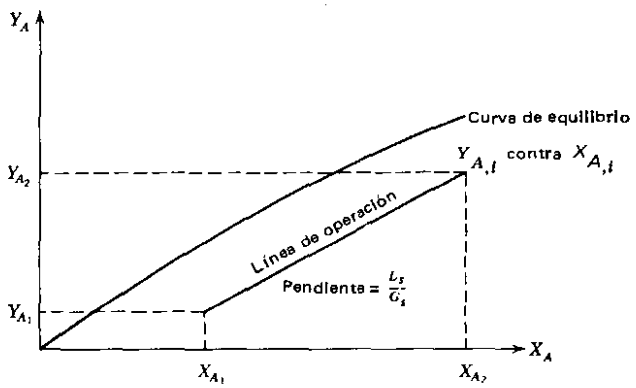


Figura 31.8 Proceso contracorriente en estado permanente, transferencia de fase L a fase G

Y, la línea operativa es recta porque las concentraciones de razón molar se basan en las cantidades constantes L_s y G_s. Cuando la ecuación se escribe en las unidades de fracción molar, x e y, el número total de moles de una fase, L o G cambian, al transferirse el soluto hacia adentro o hacia afuera de la fase, lo cual produce una línea operativa curva en coordenadas x–y.

En el diseño de equipo de transferencia de masa, la rapidez de flujo de, por lo menos, una fase y tres de las cuatro composiciones de entrada y salida deben quedar determinados por los requerimientos del proceso. La rapidez necesaria de flujo de la segunda fase, a menudo es una variable de diseño. Por

ejemplo, tómese en consideración el caso en el que la fase G, con una G_s conocida, cambia su composición de Y_{A_1} a Y_{A_2} transfiriendo soluto a una segunda fase que entra a la torre con una composición X_{A_2}. De acuerdo con la ecuación (31-8) la línea de operación debe pasar por el punto (X_{A_2}, Y_{A_2}) y debe terminar en la ordenada Y_A. En la figura 31.9 se muestran tres líneas posibles de operación. Cada una de ellas tiene una pendiente distinta, L_s/G_s, y como G_s está fijada por los requerimientos del proceso, cada una de las líneas representa una cantidad diferente, L_s, de la segunda fase. De hecho, cuando disminuye la pendiente, L_s también disminuye. La *mínima* L_s que se puede utlizar corresponde a la línea operativa que remata en el punto P_3. Esta cantidad de la segunda fase corresponde a una línea operativa que toca la línea de equilibrio. Si se recuerda lo estudiado en el Capítulo 29, respecto a la definición de fuerzas motrices, se reconocerá de inmediato que mientras más cerca esté la línea operativa de la curva de equilibrio, menor será la fuerza motriz para vencer cualquiera resistencia a la transferencia de masa. En el punto de tangencia, la fuerza motriz de difusión es igual a cero, por lo tanto, la transferencia de masa entre las dos fases no puede ocurrir. Esto representa, entonces, una condición limitativa y se denomina: *la razón* L_s/G_s *mínima de transferencia de masa.* En el caso de las curvas de equilibrio cóncavas hacia arriba, la razón L_s/G_s mínima corresponde la segunda fase L_1, que sale en equilibrio con la fase que entra, G_1, esto es, el punto (X_1, Y_1) está sobre la curva de equilibrio.

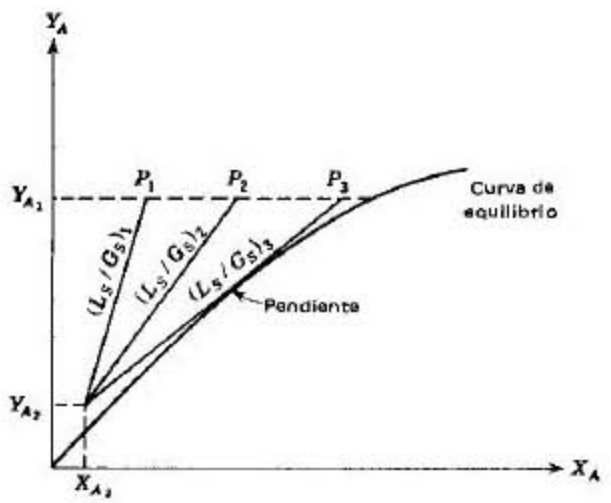


Figura 31.9 Colocación de las líneas de operación

EJEMPLO 2

Se va a absorber amoniaco de aire a 68°F y presión atmosférica en una torre empacada de contracorriente, usando agua a 68°F como absorbente. Se utilizarán una rapidez de entrada de gas de 1540 ft^3/h y una rapidez de agua libre de amoniaco de 75 lb/h. Si se reduce la concentración de amoniaco de 3.52 a 1.29% por volumen, determínese la razón $(L_s/G_s)_{actual}/(L_s/G_s)_{mínima}$. Los datos de equilibrio del sistema a 68°F y 1 atm son los siguientes:

X, lb mol NH_3/lb mol H_2O	0.0164	0.0252	0.0349	0.0455	0.0722
Y, lb mol NH_3/lb mol de aire	0.021	0.032	0.042	0.053	0.08

El número total de moles de gas que entran en la torre por hora puede calcularse utilizando la ley de los gases ideales

$$GA = \text{moles que entran al gas /h} \frac{\dot{V}P}{RT} = \frac{(1540\ ft^3/hr)(1\ atm)}{(0.73 \text{pie atm/lb mol °R})(528\ °R)}$$

$$= \frac{4\ \text{lb mol}}{h}$$

El gas entra a la torre con una fracción molar de amoniaco igual a 0.0352. Si se escoge una sección transversal del área de la torre de A $pies^2$, se pueden calcular los moles de la fase G en una base libre de soluto, así:

$$G_s = G(1 - y_{NH_3}) = \left(\frac{4\ \text{lb moles}}{h}\right)\left(\frac{0.9648}{A\ ft^2}\right) = \frac{3.85}{A}\ \frac{\text{lb moles}}{h\ ft^2}$$

El número de moles de la fase L en una fase libre de soluto es:

$$L_S = 75\frac{lb_m}{hr}\ \frac{\text{lb mol}}{18\ lb_m}\ \frac{1}{A\ ft^2} = \frac{4.16}{A}\ \frac{\text{lb mol}}{hr\ ft^2}$$

La razón de los valores reales de L_s y G_s se calcula así:

$$\left(\frac{L_S}{G_S}\right)_{real} = \frac{4.16}{A} \times \frac{A}{3.85} = 1.08 \frac{\text{moles de fase } L \text{ libre de } NH_3}{\text{moles de fase } G \text{ libre de } NH_3}$$

La composición de las corrientes conocidas, G_1, G_2 y L_2 en una base libre de soluto se evalúa a partir de las fracciones molares conocidas, en la forma:

$$Y_{NH_3}|_1 = \frac{y_{NH_3}|_1}{1 - y_{NH_3}|_1} = \frac{0.0352}{0.9648} = 0.0365$$

$$Y_{NH_3}|_2 = \frac{y_{NH_3}|_2}{1 - y_{NH_3}|_2} = \frac{0.0129}{0.9871} = 0.0131$$

y

$$X_{NH_3}|_2 = \frac{x_{NH_3}|_2}{1 - x_{NH_3}|_2} = 0.0$$

La composción de salida, $X_{NH_3}\big|_1$ se puede calcular de la manera siguiente:

$$G_S(Y_{A_1} - Y_{A_2}) = L_S(X_{A_1} - X_{A_2})$$

$$\frac{3.85}{A}(0.0365 - 0.0131) = \frac{4.16}{A}(X_{A_1} - 0)$$

ó

$$X_{NH_3}\big|_1 = 0.0216 \tag{31-8}$$

La composición de la solución en equilibrio con $Y_{NH3}|_1 = 0.0365$ se obtiene de las curvas de equilibrio así: $X_{NH3}|_{equilibrio} = 0.0296$.

Las líneas operativas mínimas reales aparecen en la Figura 31.10. La pendiente de la mínima línea operativa es:

$$\left(\frac{L_S}{G_S}\right)_{\text{mínima}} = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{0.0365 - 0.0131}{0.0296 - 0} = 0.79 \quad \frac{\text{moles de fase } L \text{ libre de } NH_3}{\text{moles de fase } G \text{ libre de } NH_3}$$

La razón deseada, $(L_s/G_s)_{\text{real}}/(L_s/G_s)_{\text{mínima}}$ es, pues, una razón de los valores 1.08/0.79 = 1.37.

Flujo concurrente. En las operaciones de transferencia de masa en estado permanente, que incluyen el contacto concurrente de dos fases no solubles, tal como puede apreciarse en la figura 31.11, el balance total correspondiente a la componente A es:

$$L_S X_{A_2} + G_S Y_{A_2} = L_S X_{A_1} + G_S Y_{A_1}$$

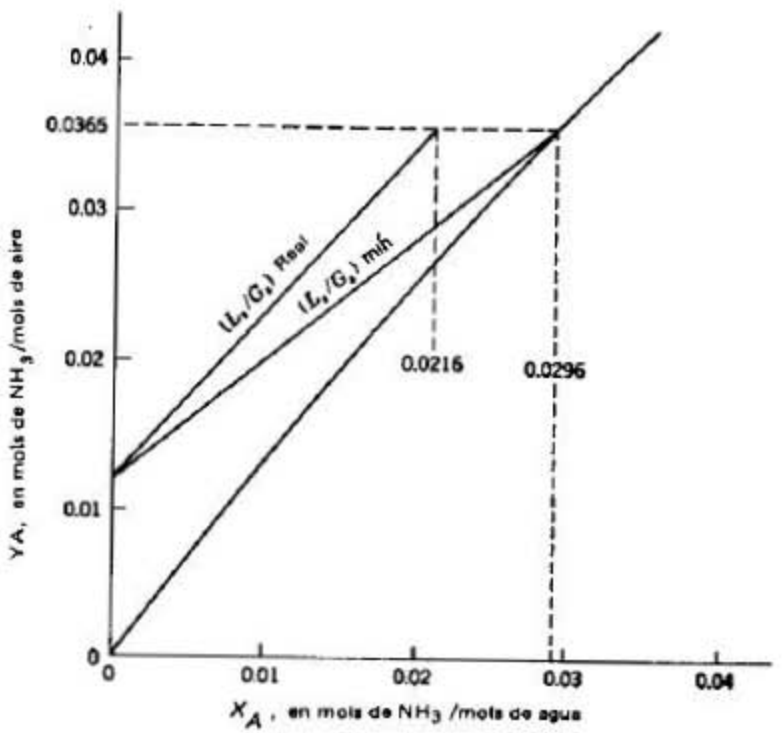


Figura 31.10 Solución al ejemplo 2

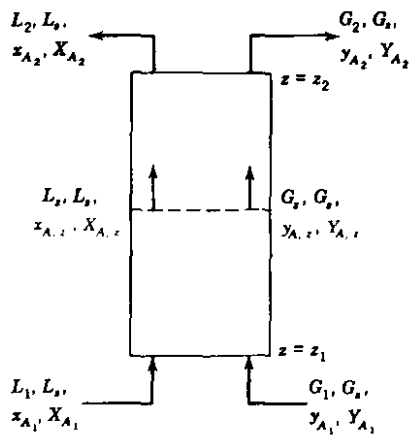


Figura 31.11 Proceso comcurrente en estado permanente

ó

$$L_S(X_{A_2} - X_{A_1}) = G_S(Y_{A_1} - Y_{A_2}) \tag{31-11}$$

El balance de masa sobre la componente A alrededor de los planos z y uno arbitrario, z, establece que:

$$L_S X_{A,z} + G_S Y_{A,z} = L_S X_{A_1} + G_S Y_{A_1}$$

ó

$$L_S(X_{A,z} - X_{A_1}) = G_S(Y_{A_1} - Y_{A,z}) \tag{31-12}$$

Tanto la ecuación (31-11) como la (31-12) son las ecuaciones de las rectas que pasan a través del punto común (X_{A_1} , Y_{A_1}) y tienen la misma pendiente, $-L_s/G_s$. La ecuación (31-12) es la expresión general que relaciona las componentes de las dos fases en contacto en cualquier plano del equipo. Se le llama ecuación de línea operativa correspondiente a operaciones concurrentes. Las figuras 31.12 y 31.13 muestran la localización de la línea de operaciones con relación a la línea de equilibrio. Un balance de masa correspondiente a la componente A sobre la longitud diferencial, dz, del flujo concurrente, es:

$$L_S\, dX_A = -G_S\, dY_A \tag{31-13}$$

Como en el caso del flujo contracorriente, existe una *razón mínima* L_s/G_s que corresponde a las operaciones de transferencia de masa establecidas a

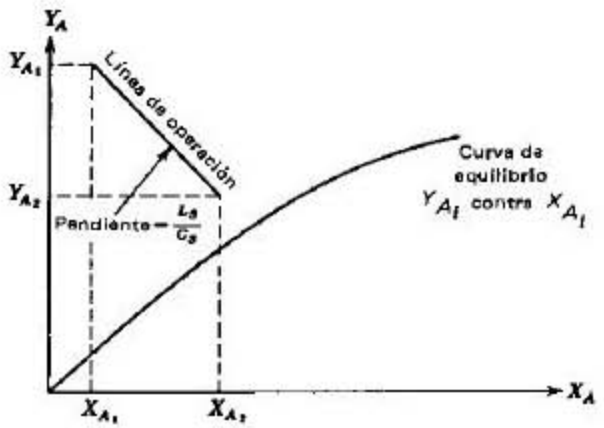


Figura 31.12 Proceso concurrente en estado permanente, transferencia de la fase G a la L

partir de las variables de proceso fijo, G_s, Y_{A_1}, Y_{A_2} y X_{A_1}. Su evaluación incluye el mismo proceso estudiado con relación al flujo contracorriente.

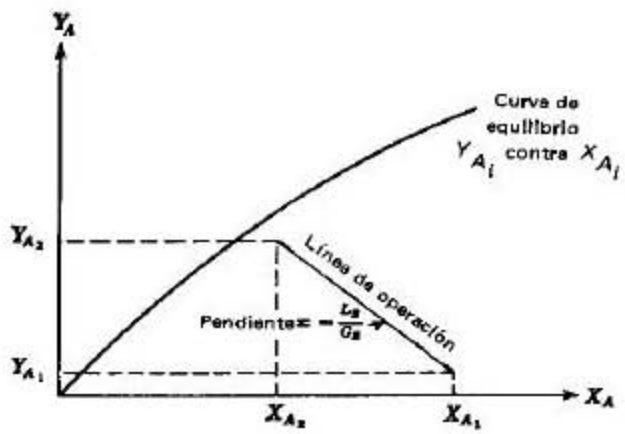


Figura 31.13 Proceso concurrente en estado permanente, transferencia de la fase L a la G

EJEMPLO 3

La corriente descrita en el ejemplo 2, que consiste en aire y amoniaco, se alimenta de manera concurrente con una corriente de agua, libre de amoniaco. La concentración de amoniaco se va a reducir de 3.52 a 1.29% por volumen, usando una corriente de agua

de 1.37 veces la mínima. Determínese: (a) la mínima razón L_S/G_S, (b) la rapidez real del agua y (c) la concentración de la corriente de agua que sale.

En el ejemplo 2 se calcularon las composiciones siguientes:

$$\text{sustituyendo } Y_{NH_3}|_1 = 0.0365$$

$$\text{sustituyendo } Y_{NH_3}|_2 = 0.0131$$

y

$$\text{sustituyendo } X_{NH_3}|_1 = 0.0$$

Se calculó en número de moles de G libre de soluto, obteniéndose $3.85/A$ lb mol/ pie^2. En la Figura 31.14 aparecen las líneas operativas mínima y real. Para estas líneas operativas:

$$\left(\frac{L_S}{G_S}\right)_{\text{mínimo}} = \frac{Y_{NH_3}|_1 - Y_{NH_3}|_2}{X_{NH_3}|_2 - X_{NH_3}|_1} = \frac{0.0365 - 0.0131}{0.01}$$

$$= 2.34 \frac{\text{lb mol } L \text{ libre de } NH_3}{\text{lb mol } G \text{ libre de } NH_3}$$

y

$$\left(\frac{L_S}{G_S}\right)_{\text{Real}} = 1.37\left(\frac{L_S}{G_S}\right)_{\text{mínimo}} = (1.37)(2.34)$$

$$= 3.21 \frac{\text{lb mol } L \text{ libre de } NH_3}{\text{lb mol } G \text{ libre de } NH_3}$$

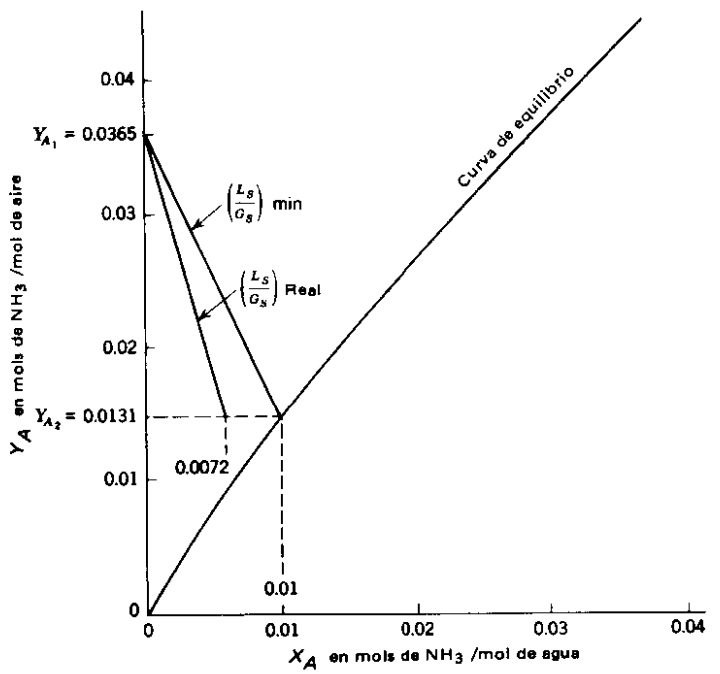


Figura 31.14 Solución al ejemplo 3

La composición de la corriente emergente de líquido se puede evaluar mediante la pendiente de la línea operativa real, por medio de:

$$\left(\frac{L_S}{G_S}\right)_{\text{real}} = 3.21 = \frac{Y_{NH_3}|_1 - Y_{NH_3}|_2}{X_{NH_3}|_2 - X_{NH_3}|_1} = \frac{0.0365 - 0.0131}{X_{NH_3}|_2}$$

ó

$$X_{NH_3}|_2 = \frac{0.0232}{3.21} = 0.0072 \frac{\text{mol } NH_3}{\text{moles de agua libre de } NH_3}$$

El número de moles de agua libre de NH_3 alimentada a la torre, L_s, también se calcula usando el valor de (L_s/G_s) real

$$\left(\frac{L_S}{G_S}\right)_{\text{real}} = 3.21 \frac{\text{moles de fase } L \text{ libre de } NH_3}{\text{moles de fase } G \text{ libre de } NH_3}$$

después:

$$L_S = 3.21 G_S = 3.21\left(\frac{3.85}{A}\right) = \frac{12.4}{A} \frac{\text{lb mol}}{\text{hr ft}^2} \qquad (0.303/A \text{ kg/s} \cdot \text{m}^2)$$

31.4 BALANCES DE ENTALPIA CORRESPONDIENTES A LAS TORRES DE CONTACTO CONTINUO

Muchas operaciones de transferencia de masa son isotérmicas. Esto ocurre especialmente cuando se manejan mezclas diluidas. Sin embargo, cuando se transfieren grandes cantidades de soluto, el calor de mezclado puede producir una elevación de temperatura en la fase receptora. Si la temperatura de la fase varía la solubilidad del soluto en equilibrio se alterará y a su vez, se alterarán las fuerzas impulsoras o motrices de la difusión.

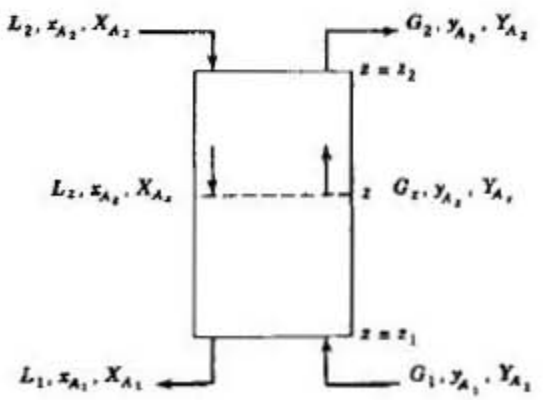


Figura 31.15 Proceso contracorriente en estado permanente

Analícese el proceso de contracorriente en estado permanente que aparece en la figura 31.15. Un balance de la entalpia alrededor de los planos $z=z_2$ y z, es el siguiente:

$$L_2H_{L_2} + GH_G = G_2H_{G_2} + LH_L \tag{31-14}$$

donde H es la entalpia molar de la corriente a su temperatura, presión y concentración particulares. Las entalpias se basan, usualmente, en una referencia de solvente transportador puro, libre de soluto y de soluto puro a una temperatura base determinada, T_0. La entalpia normal de una mezcla de líquido se calcula para una temperatura superior a la temperatura base, mediante la relación:

$$H_L = c_{pL}(T_L - T_0)M_{\text{prom}} + \Delta H_S \tag{31-15}$$

donde H_L es la entalpia de la corriente de líquido, en Btu/lb o kj/mol de L; $c_{p,L}$ es la capacidad calorífica de la mezcla con base en la masa, Btu/lb$_m$ °F o kJ/kg.K; T_L es la temperatura de la mezcla en °F o K; M_{prom} es el peso molecular medio de la mezcla y ΔH_s es el calor integral de la solución, evaluado a la temperatura base T_0 y la concentración de la mezcla en Btu/lb mol o en k J mol.

La entalpia molar de una mezcla gaseosa, con la misma temperatura base y el estado estándar del soluto, se expresa en la forma:

$$H_G = [y_{\text{soluto}}\, c_{pG\ \text{soluto}}\ M_{\text{soluto}} + (1 - y_{\text{soluto}})(c_{p,G\ \text{fase}\ G\ \text{libre de soluto}}) \tag{31-16}$$
$$(M_{\text{fase}\ G\ \text{libre de soluto}})](T_G - T_0) + y_{\text{soluto}}\ h_{f,g\ \text{soluto}}\ M_{\text{soluto}}$$

donde H es la entalpia de la corriente de líquido, en Btu/lb mol o kJ/mol de G; c_{p,G_1} es la capacidad calorífica en la fase gaseosa en Btu/lb$_m$ °F o en kJ/kg.K; T_G es la temperatura de la mezcla gaseosa en °F o K; M es el peso molecular y $h_{f,g,\ soluto}$ es el calor de vaporización del soluto en Btu/lb o en kJ/kg. El calor integral de la solución, H, es cero en las soluciones ideales y escencialmente cero en las mezclas de gases. Para las soluciones no ideales es una cantidad negativa si el calor sale en el mezclado y positiva si se absorbe.

Se puede utilizar la ecuación (31-14) para calcular la temperatura de una fase dada en un plano dentro del equipo de transferencia de masa. Los cálculos incluyen la aplicación simultánea del balance de masa para conocer la rapidez de flujo de la corriente asociada con el término particular de la entalpia.

31.5 COEFICIENTES DE CAPACIDAD DE TRANSFERENCIA DE MASA

El coeficiente individual de transferencia de masa, k_G, se definió mediante la expresión:

$$N_A = k_G(p_{AG} - p_{A,i}) \tag{29-6}$$

y el coeficente total de transferencia de masa se definió por medio de una ecuación semejante en función de la fuerza impulsora en unidades de presión parcial,

$$N_A = K_G(p_{AG} - p_A^*) \tag{29-10}$$

En ambas expresiones se expresó la transferencia de masa interfase, en moles transferidos de A por unidad de tiempo por unidad de área por unidad de fuerza impulsora en función de la presión. Para poder utilizar esta ecuación en el diseño de cambiadores de masa debe conocerse el área de contacto interfase. Aunque la columna de pared mojada, tal como se la describió en el Capítulo 26, tiene un área superficial definida, el área correspondiente, en otros tipos de equipo es virtualmente imposible de medir. Por esta razón el factor a se debe introducir para representar el área superficial por unidad de volumen del equipo de transferencia de masa. La transferencia de masa en una altura diferencial, dz, por unidad de sección transversal de área del cambiador de masa es:

$$N_a \left[\frac{\text{moles tansferidos a A}}{\text{(h) (área interfacial)}}\right] \text{a} \left[\frac{\text{área interfacial}}{\text{pies}^3}\right] dz \text{ (pies)}$$

$$= \frac{\text{moles transferidos de A}}{\text{(h) (sección transversal del área)}}$$

o, en función de los coeficientes de transferencia de masa,

$$N_A a\, dz = k_G a(p_{AG} - p_{A,i})\, dz \tag{31-17}$$

y

$$N_A a\, dz = K_G a(p_{AG} - p_A^*)\, dz \tag{31-18}$$

Como tanto el factor a como los coeficientes de transferencia de masa dependen de la geometría del equipo de transferencia de masa y de la rapidez de flujo de las dos corrientes no miscibles en contacto, usualmente se encuentran combinadas en forma de producto. El *coeficiente de capacidad individual*, $k_G a$, y el *coeficiente de capacidad total* $K_G a$, se calculan experimentalmente cada uno de ellos en forma de variable de procesos combinados. Las unidades del coeficiente de capacidad en la fase gaseosa son:

$$K_G a \left[\frac{\text{moles transferidos de A}}{\text{(h) (área interfacial) (presión)}}\right]\left[\frac{\text{área interfacial}}{\text{volumen}}\right] = \frac{\text{moles transferidos de A}}{\text{(h) (volumen) (presión)}}$$

las unidades más usuales son g mol de A/s.m^3 Pa o bien lb mol/(h) (pie^3) (atm). En términos de fuerza motriz, los coeficientes de capacidad se pueden definir en forma similar como

$$N_A a\, dz = k_L a(c_{A,i} - c_{A,L})\, dz \tag{31-19}$$

y

$$N_A a\, dz = K_L a(c_A^* - c_{A,L})\, dz \tag{31-20}$$

Las unidades que aparecen con mayor frecuencia en los coeficientes de capacidad de la fase líquida son g moles de A/s. m^3. g moles de A/m^3 de solución o lb moles de A/(h) (pies^3) (lb moles de A/pies^3 de solución). Las ecuaciones de capacidad de transferencia de masa en función de $K_y a$, $K_x a$, $K_Y a$ y $K_x a$ se definen de manera semejante.

31.6 ANALISIS DE EQUIPO DE CONTACTO CONTINUO

Los moles de la componente A en difusión transferida por unidad de tiempo, por sección transversal de área se definieron utilizando dos conceptos completamente distintos, el balance de material y las ecuaciones de transferencia de masa. Cuando el equipo ocurre un contacto continuo entre las dos fases no miscibles, ambas ecuaciones pueden combinarse y la expresión resultante se puede integrar, obteniéndose una relación para definir la altura desconocida del cambiador de masa.

COEFICIENTE DE CAPACIDAD TOTAL CONSTANTE

Piénsese en un cambiador de masa isotérmico, contracorriente, que se utiliza para lograr una separación en un sistema cuyo coeficiente total, constante de transferencia de masa es $K_Y a$ en toda la gama de valores relacionada con las operaciones de transferencia de masa. El balance de la masa, correspondiente a la componente A en la longitud diferencial dz, se describe por medio de la relación

$$\frac{\text{moles transferidos de A}}{\text{(h) (sección transversal de área)}} = L_S\,dX_A = G_S\,dY_A \qquad (31\text{-}10)$$

La transferencia de masa de la componente A en la longitud diferencial, dz, se define por medio de

$$\frac{\text{moles transferidos de } A}{\text{(h) (sección transversal de área)}} \qquad (31\text{-}21)$$

$$N_A a\,dz = K_Y a(Y_{AG} - Y_A^*)\,dz$$

Si se combinan ambas ecuaciones y se reordenan los términos, se obtiene:

$$dz = \frac{G_S\,dY_A}{K_Y a(Y_A - Y_A^*)} \qquad (31\text{-}22)$$

o, para la longitud del cambiador de masa,

$$z = \frac{G_S}{K_Y a}\int_{Y_{A_1}}^{Y_{A_2}} \frac{dY_A}{Y_A - Y_A^*} \qquad (31\text{-}23)$$

La evaluación del lado derecho de esta ecuación requiere de una integración gráfica. Tal como se estudió en la sección 31.3, puede evaluarse $Y_{A,G} - Y_A^*$ de la gráfica de Y_A contra X_A, tal como puede verse en la figura 31-16. Esta distancia vertical entre la línea de operación y la de equilibrio, representa la

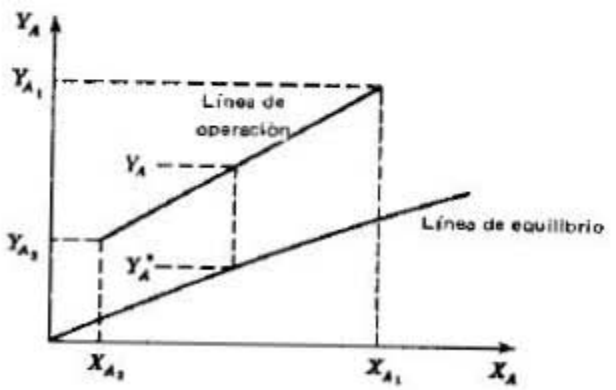


Figura 31.16 Evaluación de $Y_A - Y_A^*$, que es la fuerza motriz total

fuerza motriz total en Y unidades. Puede determinarse la fuerza motriz para cada valor de $Y_{A,G}$, y entonces se puede graficar su recíproco contra $Y_{A,G}$

como puede verse en la figura 31.17. Cuando ya se tiene el área bajo la curva de la figura 31.17 se puede calcular la longitud del cambiador de masa por medio de la ecuación (31.23)

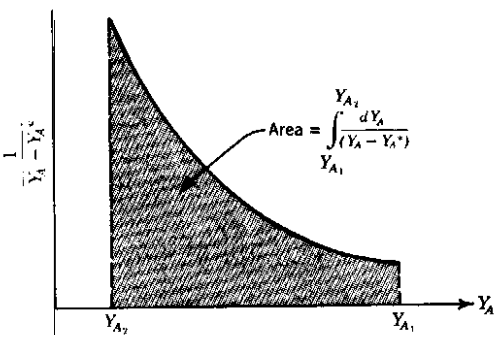


Figura 31.17 Evaluación gráfica de la integral $\int_{Y_{A_1}}^{Y_{A_2}} dY_A/(Y_A - Y_A^*)$.

Se podría obtener una ecuación semejante pero más complicada, en función del coeficiente de capacidad total, $K_G\,a$,

$$z = \frac{G_S}{K_G a} \int_{Y_{A_1}}^{Y_{A_2}} \frac{dY_A}{(p_{A,G} - p_A^*)} \tag{31-24}$$

Como toman parte dos unidades diferentes de concentración de gas, la ecuación es un poco más difícil de evaluar. La longitud del cambiador de masa también puede determinarse por medio de una ecuación que sea función del coeficiente de capacidad total del líquido, $K_x a$ cuando el coeficiente es constante en todo el rango de concentración que interviene en la operación de transferencia de masa.

$$z = \frac{L_S}{K_X a} \int_{X_{A_2}}^{X_{A_1}} \frac{dX_A}{X_A^* - X_A} \tag{31-25}$$

La fuerza impulsora total, $X_A^* - X_{A,L}$ es la diferencia horizontal que existe entre los valores de la línea de operación y la línea de equilibrio en una gráfica semejante a la de la figura 31.16.

LIMITE DE TOLERANCIA DEL COEFICIENTE DE CAPACIDAD VARIABLE CORRESPONDIENTE A LA RESISTENCIA EN LAS FASES GASEOSA Y LIQUIDA

En el Capítulo 29 se encontró que el coeficiente total varía de acuerdo con la concentración a menos que la cuerva de equilibrio sea una recta, por lo tanto, es de esperarse que el coeficiente de capacidad total también varíe al variar la pendiente de la curva de equilibrio en la región que incluye a las concentraciones global e interfacial. Las ecuaciones de diseño: (31-23), (31-24) y (31-25) se pueden usar con confianza cuando las líneas de equilibrio son ligeramente curvas. Sin embargo en los casos de curvaturas pronunciadas se deben basar los cálculos exactos en uno de los coeficientes de capacidad individual.

El balance de masa que corresponde a las componentes A en la longitud diferencial dz es:

$$L_S\,dX_A = G_S\,dY_A \tag{31-10}$$

Si se obtiene la diferencial de la ecuación (31-6), se obtiene:

$$dY_A = \frac{dy_A}{(1-y_A)^2}$$

Esta relación se puede sustituir en la ecuación (31-10) para obtener:

$$L_S\,dX_A = G_S\frac{dy_A}{(1-y_A)^2} \tag{31-26}$$

La transferencia de masa de la componente A en la longitud diferencial dz se define en función del coeficiente de capacidad individual en la fase gaseosa, por medio de la ecuación:

$$N_A a\,dz = k_G a(p_{A,G} - p_{A,i})\,dz \tag{31-27}$$

Si se combinan las ecuaciones (31-26) y (31-27) y se reordenan sus términos, se obtiene lo siguiente:

$$dz = G_S\frac{dy_A}{k_G a(p_{A,G} - p_{A,i})(1-y_A)^2}$$

ó

$$dz = \frac{G_S\,dy_A}{k_G aP(y_A - y_{A,i})(1-y_A)^2} \tag{31-28}$$

Tal como se estudió en el Capítulo 29, se pueden encontrar las composiciones interfaciales $y_{A,i}$ y $x_{A,i}$ correspondientes a cada punto de la línea de

operación trazando una recta desde el punto hasta la curva de equilibrio. La pendiente de esta recta es $-k_L/k_G$ en una gráfica de p_A contra c_A o también $-ck_L/k_G P$ en una gráfica de y_A contra x_A, donde c es la concentración molar en la fase líquida. En la figura 31.18 aparece la localización de las composiciones interfaciales en ambas gráficas.

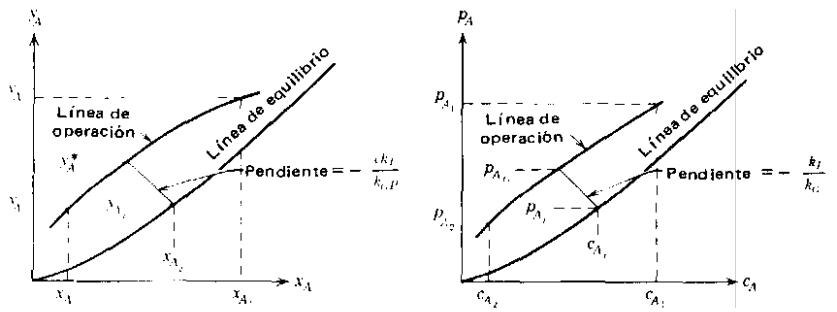


Figura 31.18 Determinación de la composición interfacial de la transferencia de la fase G a la L

Es importante recordar, según se estudió en la sección 31.3, que la línea de operación no es recta en las gráficas de y_A contra x_A y p_A contra C_A excepto en el caso de mezclas relativamente diluidas de gas y líquido. Si se conoce la composición interfacial $y_{A,i}$ de cada composición global, y_A de la corriente de gas, se puede integrar la ecuación (31-28) gráficamente para obtener la longitud del cambiador de masa.

FUERZA MOTRIZ LOGARITMICA MEDIA

Aunque el procedimiento gráfico de integración debe emplearse en la mayoría de los cálculos prácticos de diseño, a veces es posible utilizar una ecuación mucho más simple basada en una fuerza motriz logarítmica media. Cuando dos corrientes en contacto están relativamente diluidas, la curva de equilibrio y la línea de operación pueden ser ambas lineales en función de las fracciones molares en la gama de valores de concentración que interviene en la operación de transferencia de masa. En estas condiciones, $G_1 \approx G_2 \approx G$ y $L_1 \approx L_2 \approx L$. El balance de masa de la componente A se puede expresar, aproximadamente por medio de la ecuación:

$$L(x_{A_1} - x_A) = G(y_{A_1} - y_A) \tag{31-29}$$

ó

$$L\,dx_A = G\,dy_A \tag{31-30}$$

La rapidez de transferencia interfase se puede expresar en función del coeficiente de capacidad total en la fase gaseosa, por medio de:

$$N_A a\, dz = K_G a(p_{A,G} - p_A^*)\, dz$$

ó

$$N_A a\, dz = K_G aP(y_A - y_A^*)\, dz \tag{31-31}$$

Como las líneas de operación y equilibrio son rectas, la diferencia de ordenadas de ambas varía linealmente en su composición. Si la diferencia $y_A - y_A^*$ se denomina Δ, esta linearidad establece que:

$$\frac{d\Delta}{dy_A} = \frac{\Delta_{\text{extremo}} - \Delta_{\text{extremo}}}{y_{A_1} - y_{A_2}} = \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{y_{A_1} - y_{A_2}} \tag{31-32}$$

Si se combinan las ecuaciones (31-30) y (31-31) y se sustituye la ecuación (31-32) en la expresión resultante, se obtiene:

$$dz = \frac{G}{K_G aP} \frac{dy_A}{y_A - y_A^*} = \frac{G}{K_G aP} \frac{dy_A}{\Delta}$$

ó

$$dz = \frac{G}{K_G aP} \frac{y_{A_1} - y_{A_2}}{\Delta_1 - \Delta_2} \frac{d\Delta}{\Delta} \tag{31-33}$$

Al integrar sobre la longitud del cambiador de masa, se obtiene:

$$z = \frac{G}{K_G aP} \frac{y_{A_1} - y_{A_2}}{\Delta_1 - \Delta_2} \ln \frac{\Delta}{\Delta_2}$$

ó

$$z = \frac{G}{K_G aP} \frac{y_{A_1} - y_{A_2}}{(y_A - y_A^*)_{lm}} \tag{31-34}$$

donde

$$\Delta_{lm} = \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{\ln \Delta_1/\Delta_2} = (y_A - y_A^*)_{lm}$$

$$= \frac{(y_A - y_A^*)_{\text{extremo}} - (y_A - y_A^*)_{\text{extremo}}}{\ln [(y_A - y_A^*)_{\text{extremo}} / (y_A - y_A^*)_{\text{extremo}}]} \tag{31-35}$$

Existe una expresión similar en función del coeficiente de capacidad total en la fase líquida. Esta es:

$$z = \frac{L(x_{A_1} - x_{A_2})}{K_L ac(x_A^* - x_A)_{lm}} \tag{31-36}$$

donde

$$(x_A^* - x_A)_{lm} = \frac{(x_A^* - x_A)_{\text{extremo}} - (x_A^* - x_A)_{\text{extremo}}}{\ln [(x_A^* - x_A)_{\text{extremo}} / (x_A^* - x_A)_{\text{extremo}}]} \tag{31-37}$$

EJEMPLO 4

Se va absorber amoniaco de aire a 68°F y presión atmosférica en una torre empacada contracorriente, de 6.07 in de diámetro, utilizando como absorbente, agua libre de amoniaco. La rapidez de entrada del gas será de 390 ft^3/min y la rapidez de entrada del agua será de 24.6 lb_m/min. En estas condiciones, el coeficiente de capacidad total, $K_y a$ se puede suponer igual a 4.60 lb mol/h ft^3 ΔY_{NH_3}. La concentración de amoniaco se reducirá de una fracción molar de 0.0825 a una de 0.003. La torre se enfriará y la operación tendrá lugar a unos 68°F. Pueden usarse los datos de equilibrio del ejemplo 1. Determínese la longitud del cambiador de masa.

Se dieron las concentraciones de las tres corrientes, las cuales pueden expresarse en la forma libre de NH_3, de la siguiente manera:

$$Y_{NH_3}|_1 = \frac{y_{NH_3}|_1}{1 - y_{NH_3}|_1} = \frac{0.0825}{0.9175} = 0.09$$

$$Y_{NH_3}|_2 = \frac{y_{NH_3}|_2}{1 - y_{NH_3}|_2} = \frac{0.003}{0.997} = 0.003$$

y

$$X_{NH_3}|_2 = 0.0$$

El área de la torre es igual $\pi D^2/4$ ó $(\pi/4)\,[(6.07/12)^2] = 0.201$ pies^2. El gas entra al cambiador en el plano 1 y su rapidez de flujo es:

$$G = \frac{VP}{RT}\frac{1}{A} = \frac{(390\ ft^3/min)(1\ atm)}{(0.73\ ft^3\ atm/lb\ mol\ °R)(528°R)}\frac{1}{0.201\ ft^2}$$

$$= 5.03\ lb\ mol\ gas/(min)(ft^2)$$

La rapidez de flujo de gas libre de NH_3 es:

$$G_S = (5.03)\frac{lb\ mol}{(min)(ft^2)}\left(\frac{0.9175\ mol\ aire}{mol\ gas}\right) = 4.61\ lb\ mol\ air/min\ ft^2$$

La rapidez de flujo de agua libre de NH_3 se calcula usando el flujo que entra en el cambiador en el plano 2;

$$L_S = (24.6\ lb_m/min)\frac{lb\ mol}{18\ lb_m}\frac{1}{0.201\ ft^2} = 6.80\ lb\ mol\ de H_2O/min\ ft^2$$

El líquido abandona el intercambiador en el plano 1; su concentración se calcula usando la ecuación de balance de materia para el caso de contracorriente

$$G_S(Y_{NH_3}|_1 - Y_{NH_3}|_2) = L_S(X_{NH_3}|_1 - X_{NH_3}|_2)$$

$$4.61(0.09 - 0.003) = 6.80(X_{NH_3}|_1 - 0.00)$$

La concentración de salida, $X_{NH_3}|_1$ es de 0.059. Las líneas de operación y equilibrio son las que aparecen en la figura 31-19

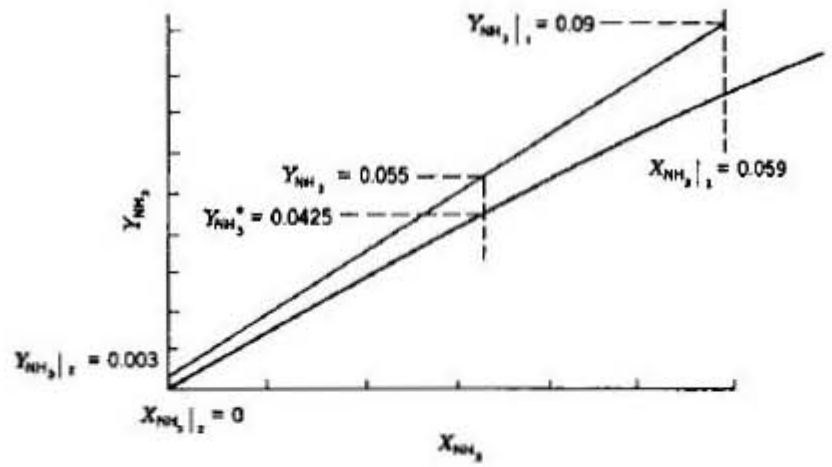


Figura 31.19 Línea de operación correspondiente al ejemplo 4

Como en este caso las concentraciones del gas y del líquido están lo suficientemente diluidas como para suponer líneas rectas de equilibrio y de operación en la gráfica de y contra x, se debe calcular la altura de la torre usando el método de integración gráfica, usando la expresión:

$$z = \frac{G_S}{K_Y a} \int_{Y_{A_1}}^{Y_{A_2}} \frac{dY_A}{Y_A - Y_A^*}$$

ó

$$z = \frac{4.61 \text{ lb mol de gas libre de } NH_3/\text{h ft}^2}{4.6 \text{ lb mol de } NH_3/\text{h ft}^3 \, \Delta Y \text{unidades}} \int_{NH_3|_1}^{NH_3|_2} \frac{dY_{NH_3}}{Y_{NH_3} - Y_{NH_3}^*} \qquad (31\text{-}23)$$

TABLA 31.1 COMPOSICION DEL GAS DEL EJEMPLO 3

Y_A	Y_A^*	$Y_A - Y_A^*$	$1/(Y_A - Y_A^*)$
0.003	0	0.003	333.3
0.01	0.0065	0.0035	296
0.02	0.0153	0.0047	212.5
0.035	0.0275	0.0075	133.3
0.055	0.0425	0.0125	80.0
0.065	0.0503	0.0147	68.0
0.075	0.508	0.017	58.9
0.09	0.0683	0.0217	47.6

En la Tabla 31.1, Y_{NH_3} es la composición calculada en un punto de la línea de operación e $Y_{NH_3}{}^*$ es la composición sobre la línea de equilibrio que se encuentra directamente debajo del valor de Y_{NH_3}.

En la figura 31.19 aparece un ejemplo de estas composiciones. La integral:

$$\int_{Y_{NH_3|1}}^{Y_{NH_3|2}} \frac{dY_{NH_3}}{Y_{NH_3} - Y_{NH_3}^*}$$

aparece calculada gráficamente en la figura 31.20.

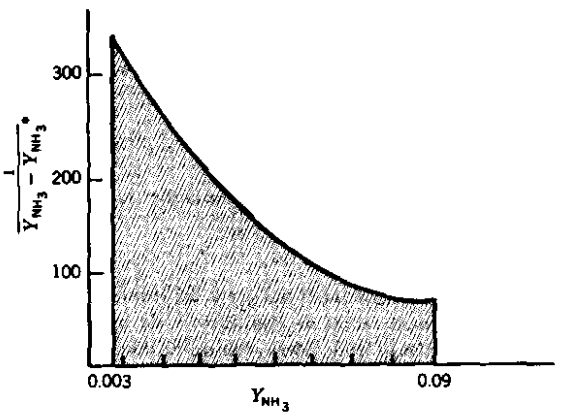


Figura 31.20 Evaluación gráfica de la integral

El área bajo la curva es el valor numérico de la integral. La longitud resultante del cambiador de masa es:

$$z = \frac{4.61}{4.60} 10.95 = 11.0 \text{ pie}$$

EJEMPLO 5

Una ley, recientemente aprobada, requiere que la eficacia del sistema de absorción que actualmente se emplea para reducir el nivel de contaminación en el gas de salida se puede mejorar para satisfacer estas nuevas exigencias. En las condiciones actuales de operación, 13.6 mol/s.m^2 de gas de salida fluyen en contracorriente con 27.2 mol/s.m^2 de agua en el absorbedor de 12m de alto. La concentración de A se reduce de 2 a 0.5 mol por ciento.

Se ha sugerido que la concentración de gas de salida requerida se pueda alcanzar duplicando el flujo de agua en la torre existente. Su diámetro es lo suficientemente grande como para permitir este aumento en la rapidez de flujo. Si se supone que el proceso está controlado por la película de gas y que el coeficiente de capacidad total, $K_G a$ es proporcional a la velocidad de la masa del solvente, elevada a la potencia 0.4, determínese la concentración de A del gas que sale, cuando se usan la misma torre de 12 m y la misma velocidad de la masa de gas con la rapidez de flujo duplicada. El equilibrio del sistema se define por medio de una ley de Henry, modificada: $y_A^* = 1.5x_a$.

Como los valores de las concentraciones se encuentran dentro de la gama de valores de dilución donde la curva de equilibrio es una recta, la altura de la torre se puede calcular mediante la ecuación (31-34):

$$z = \frac{G(y_{A_1} - y_{A_2})}{K_G a P (y_A - y_A^*)_{lm}}$$

Un balance de materia del sistema existente establece la composición de la corriente de líquido que sale

$$G(y_{A_1} - y_{A_2}) = L(x_{A_1} - x_{A_2})$$

$$(13.6 \text{ mol/s} \cdot \text{m}^2)(0.02 - 0.005) = (27.2 \text{ mol/s} \cdot \text{m}^2)(x_{A_1} - 0)$$

$$x_{A_1} = 0.0075$$

Las composiciones del sistema de salida en cada uno de los extremos de la torre son:

parte inferior : $y_{A_1} = 0.02$

$$x_{A_1} = 0.0075$$

$$y_{A_1}^* = 1.5x_{A_1} = 1.5(0.0075) = 0.0113$$

parte superior : $y_{A_2} = 0.005$

$$x_{A_2} = 0.0$$

$$y_{A_2}^* = 1.5x_{A_2} = 0.0$$

En la torre existente, $(y_A - y_A^*)$ se calcula por medio de la ecuación (31-35):

$$(y_A - y_A^*)_{lm} = \frac{(y_A - y_A^*)_{\text{extremo}} - (y_A - y_A^*)_{\text{extremo}}}{\ln\left[\dfrac{(y_A - y_A^*)_{\text{extremo}}}{(y_A - y_A^*)_{\text{extremo}}}\right]}$$

$$= \frac{(0.02 - 0.0113) - (0.005 - 0)}{\ln \dfrac{(0.02 - 0.0113)}{(0.005 - 0.0)}} = 0.0067$$

Al sustituir los valores conocidos en la ecuación (31-34), se obtiene:

$$12 = \frac{(13.6 \text{ mol/s} \cdot \text{m}^2)(0.02 - 0.005)}{K_G a_1 P (0.0067)}$$

$$12 = \frac{(13.6 \text{ mol/s} \cdot \text{m}^2)(2.24)}{K_G a_1 P} \qquad (31\text{-}38)$$

Cuando se estudia el sistema propuesto se obtiene la siguiente relación con la ecuación (31-34):

$$12 = \frac{(13.6 \text{ mol/s} \cdot \text{m}^2)(0.02 - y_{A_2})}{K_G a_{11} P (y_A - y_A^*)_{lm}} \qquad (31\text{-}39)$$

Al igualar y simplificar las ecuaciones (31-38) y (31-39) se obtiene:

$$\frac{2.24}{K_G a_I} = \frac{(0.02 - y_{A_2})}{K_G a_{II}(y_A - y_A^*)_{lm}}\bigg|_{II}$$

ó

$$\frac{K_G a_{II}(2.24)}{K_G a_I} = \frac{(0.02 - y_{A_2})}{(y_A - y_A^*)_{lm}}\bigg|_{II} \tag{31-40}$$

Como el coeficiente de capacidad es proporcional a la velocidad de la masa del solvente elevada a la potencia 0.4, la razón del coeficiente de capacidad es:

$$\frac{K_G a_{II}}{K_G a_I} = \left[\frac{L_{II}}{L_I}\right]^{0.4} = \left[\frac{(54.4 \text{ mol/s} \cdot \text{m}^2)(0.018 \text{ kg/mol})}{(27.2 \text{ mol/s} \cdot \text{m}^2)(0.018 \text{ kg/mol})}\right]^{0.4} = 1.32$$

Así, la ecuación (31-40) se tranforma en:

$$\frac{0.02 - y_{A_2}}{(y_A - y_A^*)_{lm}} = (1.32)(2.24) = 2.95 \tag{31-41}$$

Esta ecuación requiere de una solución por el método de prueba y error. Si se supone $y_{A2} = 0.0021$ se puede hacer un balance total para calcular la x_{A_1} correspondiente al sistema propuesto.

$$G(y_{A_1} - y_{A_2}) = L(x_{A_1} - x_{A_2})$$

$$(13.6 \text{ mol/s} \cdot \text{m}^2)(0.02 - 0.0021) = (54.4 \text{ mol/s} \cdot \text{m}^2)(x_{A_1} - 0.0)$$

$$x_{A_1} = 0.0045$$

Las composiciones en cada uno de los extremos de la torre, son:

parte inferior: $y_{A_1} = 0.02$

$$x_{A_1} = 0.0045$$

$$y_{A_1}^* = 1.5x_{A_1} = 1.5(0.0045) = 0.0067$$

parte superior: $y_{A_2} = 0.0021$ (valor estimado)

$$x_{A_2} = 0.0$$

$$y_{A_2}^* = 1.5x_{A_2} = 1.5(0.0) = 0.0$$

El término $(y_A - y_A^*)_{Lm}$ que corresponde a la torre propuesta, se calcula usando la ecuación (31-35)

$$(y_A - y_A^*)_{lm} = \frac{(y_A - y_A^*)_{\text{extremo}} - (y_A - y_A^*)_{\text{extremo}}}{\ln\left[\dfrac{(y_A - y_A^*)_{\text{extremo}}}{(y_A - y_A^*)_{\text{extremo}}}\right]}$$

$$(y_A - y_A^*)_{lm} = \frac{(0.02 - 0.0067) - (0.0021 - 0.0)}{\ln\left[\dfrac{(0.02 - 0.0067)}{(0.0021 - 0.0)}\right]} = 0.00607$$

$$\frac{0.02 - y_{A_2}}{(y_A - y_A^*)_{lm}} = \frac{0.02 - 0.0021}{0.00607} = 2.95$$

la cual satisface la ecuación (31-41). Como resultado del método de prueba y error, la concentración de A en el gas de salida es 0.21%.

31.7 CONCLUSION

Los cambiadores de masa de contacto continuo se diseñan integrando una ecuación que relaciona las ecuaciones de balance de masa y transferencia de masa en un área diferencial de contacto interfacial. En este capítulo se han descrito los cuatro tipos principales de equipo de transferencia de masa. Se encontraron las ecuaciones fundamentales para el diseño de equipo de contacto continuo. Un balance de masa correspondiente a la componente en difusión, A, en función de las unidades de concentración libre de soluto, produjo las siguientes ecuaciones de línea de operación, que son muy importantes:

Operaciones contracorriente en estado permanente:

$$G_S(Y_{A_1} - Y_{A_2}) = L_S(X_{A_1} - X_{A_2})$$

y

$$G_S\,dY_A = L_S\,dX_A$$

Operaciones concurrentes en estado permanente

$$G_S(Y_{A_1} - Y_{A_2}) = L_S(X_{A_2} - X_{A_1})$$

y

$$G_S\,dY_A = -L_S\,dX_A$$

Debido a la dificultad que existe para medir el área de contacto interfase dentro del equipo de transferencia de masa se introdujo el factor a, que es el área superifical interfase por unidad de volumen del cambiador. El producto del coeficiente de transferencia convectiva de masa y el factor a se denominó coeficiente de capacidad de transferencia de masa. La masa transferida en una longitud diferencial por sección transversal del área se expresó por medio de ecuaciones empíricas, una de las cuales fue la siguiente:

$$N_A a\,dz = K_G a(p_{A,G} - p_A^*)\,dz$$

Para equipo en el que hay un contacto continuo entre dos fases no miscibles, se combinaron el balance de la masa diferencial y la transferencia de masa diferencial, para producir las siguientes ecuaciones de diseño:

Coeficiente de capacidad total constante $K_y a$

$$z = \frac{G_S}{K_Y a} \int_{Y_{A_1}}^{Y_{A_2}} \frac{dY_A}{(Y_A - Y_A^*)}$$

La integral debe resolverse gráficamente.

Tolerancia para la resistencia del coeficiente total de capacidad variable en las fases gaseosa y líquida.

$$z = \int_{Y_{A_1}}^{Y_{A_2}} \frac{dY_A}{k_G a P (y_A - y_{A,i})(1 - y_A)^2}$$

Esta integral también se resuelve gráficamente

Líneas rectas de equilibrio y operación en coordenadas xy, *fuerza motriz logarítmica media*

$$z = \frac{G(y_{A_1} - y_{A_2})}{K_G a P (y_A - y_A^*)_{lm}}$$

donde

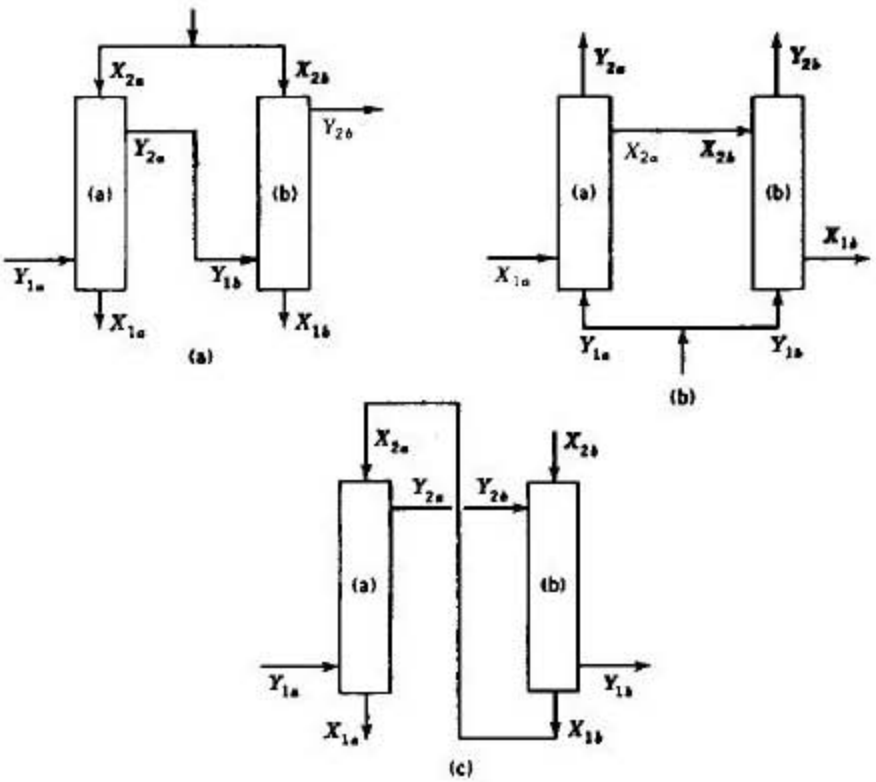
$$(y_A - y_A^*)_{lm} = \frac{(y_A - y_A^*)_1 - (y_A - y_A^*)_2}{\ln [(y_A - y_A^*)_1 / (y_A - y_A^*)_2]}$$

Se hizo aún más énfasis en la semejanza entre la transferencia de masa y la de energía, en este capítulo. Se obtuvieron las ecuaciones de diseño de los cambiadores de masa, usando un término combinado que representa la resistencia total $K_G a$, comparada con UA y la resistencia total $(p_{A,G} - p_A^*)$, comparada con ΔT_{total}, integrando sobre el área de contacto.

PROBLEMAS

31.1 Para la deabsorcion de una componente volátil de una solución, hay que usar dos torres. Dibuje los diagramas de operación, uno para cada proyecto propuesto, mostrando la relación entre las líneas de operación y la de equilibrio.

31.2 Se va a airear un recipiente de 15,000 ft^3 con seis rejillas, cada una usando aire a la velocidad de 15 SCFM. Encuentre el tiempo necesario para elevar el nivel de oxígeno disuelto del agua de desecho de 5×10^{-5} g mol/l a 30×10^{-4} g mol/l si la temperatura del agua es de 10°C y



su profundidad de 10.5 ft. El contenido de sólidos disueltos será lo suficientemente bajo para que se cumpla la ley de Henry.

31.3 En el problema anterior, el agua de desecho que se encontraba a 10°C Se aireó en un recipiente de 10.5 ft de profundidad usando SCFM de aire. Prediga el tiempo de aeración si:

(a) Se hubiera usado un recipiente de 15 ft de profundidad con el mismo número de rejillas y la misma rapidez de flujo de gas,

(b) un recipiente de 10, 000 ft^3 y 10.5 ft de profundidad se hubiera usado para la aeración.

(c) Se hubieran alimentado las rejillas con 15 SCFM de oxígeno puro en el recipiente de 15,000 ft^3, suponiendo que $K_L a$ correspondiente al oxígeno, es esencialmente igual a K_L a para aire,

(d) la temperatura del agua de desecho hubiera sido de 20°C en lugar de 10°C.

31.4 El benceno, liberado de gas de carbón, se recupera pasando la solución aceitosa de lavado de benceno, mediante el uso de una torre en contacto con vapor. La corriente de entrada contiene una fracción molar de benceno de 0.10 y el vapor está libre de benceno. Se desea recuperar el 85% del benceno usando una rapidez de vapor de 1.5 vences la rapidez

mínima del vapor. Se utilizará un aceite de lavado (solvente líquido libre de benceno) cuya rapidez de flujo será de 6.94 mol/seg. Determine la cantidad requerida de moles de vapor por segundo si:

(a) se utiliza una torre contracorriente
(b) se usa una torre concurrente. Los datos de equilibrio correspondientes al sistema de vapor de aceite para el lavado del benceno

moles de benceno / moles de aceite lavador	0.0	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10	0.12	0.14
moles de benceno / moles de vapor	0.0	0.07	0.14	0.22	0.31	0.405	0.515	0.65

31.5 Se desea eliminar la componente A de una corriente de líquido que, inicialmente, contiene 3.5 moles por ciento de A. La torre va a alimentar con una rapidez de 10 moles/h pie^2 de aire que contiene una fracción molar de 0.001 de A. La corriente de líquido que fluye en sentido opuesto a la corriente de gas abandona la torre, libre de A, con una rapidez de 20 moles/h ft^2. La solubilidad de A en el solvente a la presión y temperatura, aparece en la siguiente tabla:

y_A	0.000	0.0025	0.0085	0.0205	0.0430	0.0800
x_A	0.000	0.010	0.020	0.030	0.040	0.050

(a) ¿Cuál es la concentración mínima a la que se puede eliminar la componente?
(b) Si el solvente abandona la torre, conteniendo 2.5 moles por ciento de A, ¿cuál es la concentración de la corriente emergente de gas?

31.6 Una compañía industrial emplea un absorbente, empacado hasta una altura de 2.5 m como depurador de gas. Se hace pasar por la torre una mezcla de aire y amoniaco, que contiene 4.93% de NH_3, en sentido contrario al de una corriente de agua, inicialmente libre de amoniaco. El gas emergente contiene solamente 0.5% de NH_3. Entran a la torre 25 m^3/min de gas y 30 kg/min de agua. La torre funciona a 295 K y 1.013X10^5 Pa. En las concentraciones diluidas a 295 K, las concentraciones de equilibrio se relacionan por medio de y/x=1.09. Determine la razón: $(L/G)_{\text{real}}/(L/G)_{\text{mínima}}$

31.7 El agua de cloro para blanquear pulpa de madera se prepara mediente la absorción de cloro en agua en una torre empacada que funciona a 20°C y 1 atm de presión. Las presiones del cloro en el gas que entra y en el que sale de la torre son 0.90 g/l y 0.40 g/l, respectivamente. La

torre se alimenta con agua pura. Para las soluciones diluidas que se encuentran en la torre, los litros de solución se pueden considerar iguales a los litros de agua. Si L' es igual al número de litros de agua dividido entre el peso molecular del cloro y C es igual a la solubilidad del cloro, en gramos/litro, $L'\,dC$ será igual a los moles de cloro que absorbió la corriente del líquido.

(a) Determine L'/G_s
(b) Haga una gráfica de la línea de operación sobre la curva, correspondiente a presión contra solubilidad del cloro.
(c) Dibuje la línea de operación sobre la curva Y contra la solubilidad del cloro.

31.8 Se desea eliminar la componente A de una corriente de líquido que contiene, inicialmente, 4 moles por ciento de A. La torre se alimenta con una corriente de aire, inicialmente libre de A, con una rapidez de 10 moles/(h) $(ft)^2$. La corriente de líquido que fluye en sentido opuesto al de la corriente de gas, abandona la torre, con una rapidez libre de A, de 15 moles/(h) (ft^2), conteniendo 2 moles por ciento de A. La solubilidad de A en el solvente a la temperatura y presión de la torre aparece en la siguiente tabla.

y_A	0.000	0.0025	0.0085	0.0205	0.0430	0.0800
x_A	0.000	0.010	0.020	0.030	0.040	0.050

Determine:
(a) la razón $G_{s\ real}/G_{s,min}$.
(b) la composición de la corriente emergente de gas.

31.9 Si la torre contracorriente de alimentación descrita en el problema anterior se empaca a una altura de 20 ft, determine el coeficiente total de transferencia de masa $K_y a$, en lb mol/(h) (ft^3) (ΔY_A). La torre tiene una sección transversal de 1 pie^2.

31.10 Se está utilizando actualmente un absorbente, empacado a una altura de 15 ft para remover el contaminante procedente de una corriente de gas de desecho. Se alimentan 30000 ft^3/h del gas, que contiene 5% de mercaptán, al fondo de la torre de absorción. Al alimentar la parte superior de la torre con una corriente de solvente no volátil y libre de mercaptán, se reduce la concentración de este último en el gas emergente, a 0.3%. La corriente de solvente abandona el fondo de la torre, conteniendo 3.65% de mercaptán. A la presión y temperatura de la torre, o sea, 68°F y 1 atm, los datos de equilibrio del sistema mercaptán -solvente, son los siguientes:

X lb mol de mercaptán / lb mol de solvente libre de mercaptán	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
Y lb mol de mercaptán / lb mol de aire libre de mercaptán	0.0	0.005	0.013	0.025	0.040	0.062

Determine:
(a) la rapidez de flujo del solvente líquido en lb mol/h,
(b) la razón $(L_s/G_s)_{real}/(L_s/G_s)_{minima}$
(c) el coeficiente total de transferencia de masa, $K_y a$, en lb mol/(h) (ft^3) (ΔY) si la sección transversal del área es de 2 ft^2.

31.11 Se va a utilizar una torre de 6.07 in de diámetro para reducir la concentración de amoniaco, NH_3 de una corriente de gas, de 3.5 a 0.4% por volumen. El agua se alimenta con una rapidez de 116 lb mol/h y el gas se alimenta contracorriente, con una rapidez de 60 lb mol/h. La torre opera de manera isotérminca a 68°F y 1 atm de presión. El coeficiente de capacidad total $K_y a$ se puede suponer de 16.0 lb mol/(h) (ft^3) (ΔY_{NH_3}).
Determine
(a) la longitud requerida de la torre
(b) la razón: $(L_s/G_s)_{real}/(L_s/G_s)_{minima}$
Los datos de equilibrio a 68°F son los siguientes:

X lb mol de NH_3 / lb mol de H_2O	0.0164	0.0252	0.0349	0.0445	0.0722
Y lb mol de NH_3 / lb mol de aire	0.021	0.032	0.042	0.053	0.08

31.12 Se va a absorber benceno de un mezcla de aire y benceno que contiene 5 moles de benceno por cada 100 de aire. Por cada 105 moles de mezcla gaseosa hay 10 moles disponibles de un aceite absorbente. La operación se realiza a 300 K y a una presión de 1.013×10^5 Pa. Es aplicable la ley de Raoult y la presión del vapor de benceno a 300 K es de 1.33×10^4 Pa. Calcule el porcentaje de benceno absorbido en los casos siguientes:
(a) la mezcla gaseosa y el aceite viajan en sentido opuesto en una columna de altura infinita,
(b) la mezcla de gas y el aceite van a ponerse en contacto, permitiéndoles permanecer en reposo durante un lapso grande de tiempo.

31.13 La absorción de agua en ácido sulfúrico es un proceso exotérmico. Describa el efecto que tendría esto en la altura requerida de una columna de transferencia de masa en comparación con la altura evaluada, si se suponen condiciones isotérmicas.

31.14 Pasa aire que contiene 4.5%de amoniaco, NH_3, en sentido contrario al de una corriente de agua en un absorbente empacado. La rapidez de entrada del gas es de 100 lb mol/(h) (ft^2) y la rapidez de entrada del agua libre de NH_3 nos proporciona la razón L_s/G_s real, que es 1.5 veces mayor que la mínima razón L_s/G_s. Suponga que la torre opera a una temperatura constante de 68°F y 1 atm de presión. En las concentraciones diluidas, a una temperatura de 68°F es aplicable la ley de Henry modificada, $y/x=1.075$. Si el gas emergente contiene 0.2% de amoniaco, determine:

(a) la cantidad de libras de amoniaco que se absorbe por hora, por pie cuadrado.

(b) la altura de absorbedor si el coeficiente de capacidad total del gas, $K_G a$ es de 18 lb mol/(h) (ft^3) (atm).

31.15 Una torre de 6.07 in. de diámetro y empacada en 50 in. reduce la concentración de amoniaco de 4.5 a 1.3 por ciento en volumen de una corriente de aire y amoniaco que se alimenta a la torre con una velocidad de 113 lb_m /h. Una corriente de agua libre de amoniaco se alimenta contracorriente, con una rapidez de 72 lb_m /h. La torre funciona isotérmicamente a 68°F, a presión atmosférica. Bajo estas condiciones, los datos de equilibrio son los siguientes:

X lb mol de NH_3 / lb mol de H_2O	0.0164	0.0252	0.0349	0.0445	0.0722
Y lb mol de NH_3 / lb mol de aire	0.021	0.032	0.042	0.053	0.08

Determine el coeficiente total del gas, $K_y a$, correspondiente a la absorción de amonaico dentro de estas torre si se le puede considerar constante en toda la longitud de la torre.

31.16 40000 ft^3 de gas por hora, conteniendo 5% de benceno y 95% de aire se alimentan al fondo de una torre de absorción. En la parte superior de la columna, se introducen 4000lb_m /h, de un aceite de absorción no volatil (cuyo peso molecular es igual a 230). El aceite contiene inicialmente 0.2% por peso de benceno. La torre de absorción tiene un diámetro de 3.7 ft y una altura empacada de 26 ft. La torre se opera a una temperatura constante de 80°F y a una presión constante de 1 atm. A 80°F, la presión de vapor del benceno es de 106 mm de Hg. El 95% del benceno es absorbido por el aceite de absorción. Evalúe el coeficiente de capacidad total, $K_G a$, si se le supone constante en la torre.

31.17 Se va a diseñar una torre de transferencia de masa para reducir la concentración orgánica de 0.0349 a 0.0129 mg mol/litro. La torre, de 2 ft de diámetro, se alimentará con cinco mil galones por hora de aguas negras, en sentido opuesto al de una corriente de aire que entrará a la torre totalmente libre del material orgánico. Si se utiliza una razón de

rapidez, de flujo volumétrico (en 1/h) a rapidez de flujo de gas (en mg mol/h), Q_L/G, de 1.5, el coeficiente de capacidad total, $K_L a$, es igual a 36 lb mol/(h) (ft^3) (lb mol)/(ft^3). Los datos de equilibrio necesarios para resolver el problema, son:

mg mol organico/L	0.0252	0.0349	0.0495
fracción molar de organico en gas	0.03	0.042	0.053

Determine
(a) la altura requerida de la torre
(b) El flujo mínimo de gas, G que puede usarse.

31.18 El gas de un horno Mannheim contiene 12.5% de HCI por volumen y 87.5% de gases inertes. Este gas se depura por medio de agua libre de HCI, a presión atmosférica y a una temperatura de 20°C. Para recuperar un 97% del HCl del horno se ha decidido hacer funcionar la torre a 1.5 veces la razón mínima, L_s/G_s. La relación de equilibrio correspondiente a las soluciones de HCl en agua está dada por los datos de la tabla siguiente:

x	0.210	0.243	0.287	0.330	0.353	0.375	0.400	0.425
y	0.0023	0.0095	0.0215	0.0523	0.0852	0.135	0.203	0.322

(a) ¿Cuál será la concentración de la corriente emergente de ácido?
(b) La torre va a ser de 2 ft de diámetro. Se inyectarán diez mil pies cúbicos del gas de Mannheim cada hora, a la torre. El coeficiente de capacidad total, $K_G a$, se puede suponer de 1.8 lb mol/(h) (ft^3) (atm). Determine la altura de la torre.

31.19 Se va a diseñar una torre empacada para elevar el nivel de oxígeno de una corriente continua de aguas negras, a 10°C, de $5X10^{-5}$ a $3X10^{-4}$ mol/litro. La corriente de agua de 2830 ft^3/h se introduce por la parte superior de una torre de 2 pies de diámetro mientras por la parte inferior se le introducen 500 ft^3/h a través de un distribuidor. A esta rapidez de flujo, el coeficiente de capacidad total, $K_L a$ se puede suponer de 86 mol/(h) (ft^3) (mol/ft^3). Determine la altura de la torre.

31.20 En el procesamiento de la pulpa de madera por sulfito*, el licor de cocimiento se prepara absorbiendo dióxido de azufre en dos torres empacadas (de Jenssen) arregladas para funcionar para flujos contracorriente. La corriente emergente de gas que abandona la primera torre

*Este problema aparece en la publicación de la Technical Association of The Pulp and Paper Industry (Asociación Técnica de la Industria de la Pulpa y el Papel), con el título de "Chemical Engeneering Problems in the Pulp and Papel Industry".

pasa al fondo de la segunda en el cual hace contacto con una corriente en sentido contrario de agua, que entra por la parte superior. Las condiciones siguientes describen el funcionamiento de una torre particular:

flujo incidente de agua	270 galones/min
volumen total de gas que entra	838 pies^3/min
composición del gas que entra	14.8 vol.% SO_2
	85.2 vol% gases inertes
contenido de SO_2 del gas emergente	1.0%
presión dentro de la torre	1 atm
temperatura isotérmica de la torre	30°C
rapidez máxima de flujo del licor	75 lb_m/ft^2 min
rapidez máxima de flujo de gas	1.5 Pps
gravedad específica del licor	1.0
coeficiente de transferencia de masa de la capacidad total	0.217 lb_m SO_2/min ft^3 (lb_m) SO_2 ft^3

Los datos de equilibrio de 30°C son los siguientes:

y', $\frac{lb_m\ SO_2}{ft^3\ inerte}$	0.026	0.025	0.020	0.015	0.010	0.005	0.0016
c, $\frac{lb_m\ SO_2}{ft^3\ licor}$	0.780	0.749	0.624	0.480	0.330	0.168	0.050

(a) Calcule el diámetro de la torre y la altura necesaria de la sección empacada para satisfacer las condiciones dadas.
(b) ¿Cuál sería el error resultante en la altura de la torre si se hubiera supuesto una fuerza motriz logarítmica media?

31.21 Evalúe la altura de un absorbedor diseñado para absorber 75% de la componente A de una corriente de gas que entra originalmente con 6 moles por ciento de A. El solvente S, cuya composición es de 0.01 de fracción molar de A se alimenta, contracorriente, con una rapidez de 20 moles/(h) (ft^2) a una corriente de gas que entra con una rapidez de 10 moles/(h) (ft^2). El coeficiente de capacidad total, $K_y a$, se puede suponer constante en toda la columna e igual a 0.6 lb mol/(h) (ft^3) (Δy_A). La solubilidad de A en el solvente a la temperatura y presión, aparece en la siguiente Tabla:

y_A	0.000	0.0025	0.0085	0.0205	0.0430	0.0800
x_A	0.000	0.010	0.020	0.030	0.040	0.050

31.22 El SO_2 de una corriente de aire de desecho se va a reducir de 5% por volumen a 0.05 antes de descargar la corriente de gas en la atmósfera. La reducción se va a llevar a cabo por medio de la absorción de SO_2 en una corriente de agua libre de SO_2, que fluye contracorriente en relación con la corriente de gas en una torre empacada de absorción. La rapidez de flujo de aire, estando libre de SO_2, es de 100 $lb_m/(h)(ft^2)$. Va a fluir agua a través de la torre con una rapidez de 1800 $lb_m/(ft^2)$ (h) a una temperatura de 20°C. La torre funcionará a una presión de 2 atm. Si el coeficiente total de transferencia de masa, $K_y a$, es igual a 0.8 lb mol/(h) (ft^3) (ΔY_A) determine la altura de empacamiento requerida. Los datos de equilibrio correspondientes al sistema SO_2-agua aparecen en la siguiente Tabla:

$\frac{\text{masa de } SO_2}{100 \text{ masa de } H_2O}$	0.02	0.05	0.1	0.3	0.5
presión parcial de SO_2, mm Hg	0.5	1.2	3.2	14.1	26.0

$\frac{\text{masa de } SO_2}{100 \text{ masa de } H_2O}$	0.7	1.0	1.5	2.5	5.0
presión parcial de SO_2, mm Hg	39.0	59.0	92.0	161	336

31.23 Se va a diseñar un absorbedor para reducir el contenido de amoniaco, NH_3, de una mezcla diluida de amoniaco y aire, de 4.9 a 0.5%. Entrarán novecientos pies cúbicos de gas por minuto a 70°F y 1 atm al fondo de la torre y por la parte superior de la misma entrarán 60 lb_m/min de agua libre de NH_3. El coeficiente de capacidad total a la entrada del gas, $K_G a$ es de 1.8 lb mol/(h) (ft^3) (atm). Este coeficiente, $K_G a$ variará dentro de la torre en forma proporcional a la potencia 0.54 de la rapidez de gas, esto es, $K_G a$ es proporcional a $G^{0.54}$. Determine la altura de la torre.

31.24 Se va a diseñar una torre empacada para la absorción del 95% del SO_2 contenido en el gas de un quemador, por medio de una corriente de agua que fluye contracorriente respecto al gas. El gas, cuyo análisis (seco) es el siguiente:

SO_2	10% volúmenes
O_2	12% volúmenes
N_2	78% volúmenes

entrará a la columna a 50°C saturado de vapor de agua. El volumen húmedo del gas de entrada será de 250 ft^3/min. Con base en una torre vacía, este volumen de gas tendrá una velocidad de 0.25 ft/seg. La corriente de agua que entra contendrá inicialmente 0.026% en peso de SO_2 y saldrá con 3.75% en peso de SO_2. Bajo estas condiciones de fun-

cionamiento, se predice que los valores de los coeficientes de capacidad serán de $K_G a$=2.55 lb mol/(h) (ft^3) (atm) y $K_L a$=53.1 lb mol/(h) (ft^3) (lb mol/ft^3). Los datos de equilibrio a 50°C son los que aparecen en la siguiente Tabla

presión parcial de SO_2, mm Hg	12.0	20.8	29.0	46.0	82.0
concentración g SO_2/100 g H_2O	0.10	0.15	0.20	0.30	0.50
densidad de la solución en lb_m/ft^3	61.71	61.73	61.74	61.77	61.83

INDICE DE AUTORES

Addoms, J. N., 451
Arnold, J. H., 552
Astarita, G., 686, 732

Barrer, R. M., 562, 858
Beckmann, W., 415
Berenson, P., 451
Bergelin, O. P., 436
Bewley, L. W., 329
Bird, R. B., 134, 273, 550, 552, 554, 859, 763
Blasius, H., 213, 647
Boelter, L. M. K., 326, 425
Boussinesq, J., 233
Bowman, R. A., 474
Bromley, L. A., 451
Brown, G. A., 436

Carnahan, B., 335
Carslaw, H. S., 312, 326, 359
Cary, J. R., 433
Cess, R. D., 436, 523
Chang, P., 557
Chapman, S., 547
Chen, M. M., 461
Cherry, V. H., 326
Chiang, S. H., 728
Chilton, T. H., 682
Choi, H. Y., 451
Christian, W. J., 669
Churchill, S. W., 432
Colebrook, C. F., 251
Colburn, A. P., 398, 425, 435, 459, 682
Cowling, T. G., 548
Crank, J., 529, 602, 640, 863
Curtiss, C. F., 133, 552, 554

Danckwerts, P. V., 685, 686, 732
Daniels, F., 550

de Groot, S. R., 541
Deissler, R. G., 261, 262, 429
Dittus, F. W., 425
Doberstein, S. C., 436
Douglas, M. J. M., 432

Eckenfelder, W. W., 744
Eckert, E. R. G., 417, 429, 430, 667
Elenbass, W., 418
Evnochide, S., 719
Eyring, H., 556

Fick, A., 540
Fourier, J. B. J., 326
Fritz, W., 451
Froessling, N., 719

Garner, F. H., 719
Geankoplis, C. J., 717, 730
Giedt, W. H., 429, 430
Gilliland, E. R., 552, 727
Girifalco, L. A., 562
Glasstone, S., 556
Goldstein, S., 214
Graetz, L., 422
Gregg, J. L., 457
Grosh, R. J., 436
Gupta, A. S., 731

Halliday, D., 133
Hartnett, J. P., 667
Hatta, S., 611
Hawkins, G. A., 275
Higbie, R., 625, 685
Hirschfelder, J. O., 133, 550, 552, 554, 859
Holloway, F. A., 732
Hottel, H. C., 506, 512, 513, 514, 522
Hougen, O. A., 736

Howarth, L., 214
Hsu, S. T., 418, 432, 453
Hsu, Y. Y., 453
Hull, H. L., 435

Ingersoll, A. C., 359
Ingersoll, L. R., 359

Jackson, T. W., 417
Jaeger, J. C., 312, 326, 359
Jakob, M., 275, 312
Jeans, J., 548
Johnson, H. A., 326
Johnson, H. F., 625
Jost, W., 602

Katz, D. L., 424
Kays, W. M., 436, 440, 468, 477, 481
Kezios, S. P., 669
King, C. J., 733
King, W. J., 420
Kirkbride, C. G., 459
Knudsen, J. G., 424
Kruger, C. H., 523
Kunii, D., 731

Laidler, K. J., 556
Langhaar, H. L., 260
Larson, E. M., 567
Le Bas, G., 558
Levenspiel, O., 731
Levich, V. G., 560
Lewis, W. K., 707
Lightfoot, E. N., 134, 273
Ling, A. T., 397, 458
Linton, W. H., 727
London, A. L., 436, 468, 477, 481
Lorenz, L., 274, 414
Luther, H. A., 335

McAdams, W. H., 418, 419, 431, 432, 434, 435, 506
Marchello, J. M., 686
Martinelli, R. C., 326
Monrad, C. C., 693
Moody, L. F., 252
Mueller, A. C., 474, 488

Nagel, W. M., 474
Navier, M., 162
Nikuradse, J., 236, 250
Norman, W. S., 717, 733
Nusselt, W., 454, 460, 477

Peaceman, D. W., 728
Pelton, J. F., 693
Pigford, R. L., 625, 717, 728, 733
Planck, M., 498
Pohlhausen, E., 391
Prandtl, L., 234, 236, 401

Raimondi, P., 728
Reid, R. C., 273, 552, 559, 568, 855, 860
Resnick, R., 133
Reynolds, O., 396, 676
Rohsenow, W. M., 451, 457, 458

Satterfield, C. N., 560
Schlichting, H., 228
Schmidt, E., 415
Scriven, L. E., 728
Seider, F. N., 425, 426
Sharma, B. L., 562
Sherwood, T. K., 273, 552, 559, 569, 695, 717, 727, 732, 733, 855, 860
Shewmon, P. G., 562
Skelland, A. H. P., 717, 733
Slattery, J. C., 552
Soehngen, E., 429, 430
Sparrow, E. M., 457, 523
Spotz, E. L., 550, 859
Steinberger, R. L., 719
Stewart, W. E., 134, 273
Stokes, C. G., 162
Suckling, R. D., 719
Sutherland, W., 548

Tate, C. E., 425, 426
Thodos, G., 719, 731
Toor, H. L., 686, 728
Treybal, R. E., 717, 719, 723

Vincenti, W. G., 523
Vivian, J. E., 728
von Kármán, T., 250, 403, 672

Webber, J. H., 458
Welty, J. R., 335, 338, 366, 368, 515
Westwater, J. W., 453
Whitman, W. G., 707
Wiebelt, J. A., 523
Wilke, C. R., 134, 554, 557, 568, 733, 736
Wilkes, J. O., 335
Wilson, E. J., 730
Woertz, B. B., 695

Zabel, O. J., 359

INDICE DE MATERIAS

A

Ablación, 690
Absorbencia para la radiación térmica, 495
Absorción, 591, 622, 766, 768
Aceleración:
  convectiva, 161
  local, 161
Acreación, 744
Agua, propiedades del, 845
Aire, propiedades del, 828
Aletas, 318
  distribución de temperatura en las, 320
  pérdida de calor por las, 321
Aletas, eficiencia de las
  definición de la, 322
  para aletas circulares, 322
  para aletas rectangulares, 322
Análisis dimensional, 187, 245
  para la transferencia de calor, con convección forzada dentro de un conducto, 384
    con convección natural, 386
  para la transferencia de masa, con convección forzada dentro de un conducto, 384
    con convección natural, 663
Analogía de Reynolds, 397
Analogías:
  en la transferencia de calor, 396
  en la transferencia de masa, 675
  entre calor y momento, 396
Analogía eléctrica,
  para la conducción en estado permanente, 283
Analogía, eléctrica, para la conducción en estado permanente, 283
Arnold, celda para la medición de los coeficientes de difusión de gas, 588
Arrastre, 205
Arrastre, coeficiente de, 205-209, 225

B

Bernoulli, ecuación de
  en un flujo no rotacional, 182
  forma desarrollada, 118
  su relación con la termodinámica, 113
  validez a lo largo de las líneas de corriente, 168
  validez en toda la región 182
Biot, número de, 354
Blasius, fórmula de fricción, 240

C

Calentamiento y enfriamiento transitorio, *véase* Conducción, estado no permanente
Calibradores de tubo, 864
Calor, cambiador de, 465
  clasificación, 466
  coraza y tubo, 467, 474
  diferencia de temperatura media logarítmica, 472
  efectividad del, 477
  exposición general de, 465
  flujo cruzado, 465, 474
  punto de vista de las unidades de transferencia (NUT) para diseño, 477
  resistencias por ensuciamiento para, 488
  tubo doble, 466
Cambiador de calor de tubo doble, 466
Cambiadores de calor de contraflujo, 469
Cambiadores de calor de flujo cruzado, 474
  análisis de, utilizando diferencia de temperatura logarítmica media, 473
  gráficas de factores de corrección, 478
Cambiadores de calor de flujo paralelo, 469
Cambiadores de calor de tubo y coraza, 474

análisis de los:
usando diferencia logarítmica media de temperatura, 475
factor correctivo para, 479
Cambio de capacidad, 470
Capa de amortiguamiento, 238
Capa laminar límite en placas, 211, 223, 664
Capa límite
concentración, 664
ecuación integral del momento, 220, 240
grosor, 216, 394
grosor de desplazamiento, 226
grosor del momento, 228
laminar, 208, 212, 388
separación, 220
subcapa laminar, 210, 238
térmica, 394
transición, 211, 242
turbulenta, 240
Capa límite, análisis aproximado de la Arquímedes, principio de, 220, 672
Capa límite de concentración, 664
Capa térmica límite: 383
análisis exacto de la, 388
análisis integral aproximado de, 393
consideraciones acerca del flujo turbulento, 398
definición de la, 383
grosor de la, 391
Carga, 114, 246
Centro:
de presión, 41
Chapman-Enskog, teoría para la predicción de la conductividad térmica de, 273
Chilton-Colburn, analogía para la transferencia de masa de, 682
Choque normal, 67, 81, 93
Cilindros:
convección libre en los, 417
flujo de potencial alrededor de los, 177
fuerza de arrastre en los, 206
transferencia de calor por convección forzada desde los, 429
transferencia de masa por convección forzada desde los, 722
Concentración:
de fracción molar, 537
de la fracción de masa, 436
de la masa, 435
de mezcla homogénea, 658
molar, 436
unidades de concentración libres de soluto, 748
Condensación, 454
en forma de gota, 454
en forma de película, 454
Condensación, en forma de gota, 454
Condensación, en forma de película:
análisis de la capa límite, 457
análisis turbulento, 459
en bancos de conductos horizontales, 460
en cilindros horizontales y verticales, 460
modelo de Nusselt, 454
Conducción:
analogía eléctrica para la, 270
a través de una pared compuesta, 305
ecuaciones:
en coordenadas cilíndricas, 299
en coordenadas esféricas, 299
para definir, 282
efecto de la conductividad variable en la, 312
tridimensionales generales, 296
Fourier, ley de, 271
a través de un cilindro hueco, 276
a través de una esfera hueca, 276
a través de una pared plana, 280
con generación de energía interna, 312
estado permanente:
bidimensional
solución analítica, 325
solución analógica, 332
solución gráfica, 328
soluciones numéricas, 336
unidimensional, 303
exposición general, 269
estado no permanente:
análisis de parámetro de mosaico, 352
con resistencia interna despreciable, 352
con resistencia superficial despreciable, 356
en una placa semiinfinita, 360
método gráfico de Schmidt, 366
método integral, 370
sistemas multidimensionales, 362
uso de tablas, 362
Conductividad térmica:
de los gases, 273
de los líquidos, 273
de los sólidos, 824
ecuación para definir la, 271
variación con la temperatura, 275
Conductividad, *véase* Conductividad térmica
Conductos rugosos:
coeficiente de fricción para los, 251
perfil de velocidad en los, 239
Coeficientes de capacidad de transferencia de masa, 731, 738
Coeficiente de difusión: 541, 546
coeficiente de difusión líquida, 555, 857
Nernst, ecuación de, 559
Wilke-Chang, ecuación de, 556
coeficiente de difusión sólida, 559, 858
coeficiente de difusión "efectiva", 560
de un gas, 548, 855, 856
celda de Arnold para la medición del, 588
Hirschfelder, ecuación de, 550
Wilke, ecuación para una mezcla gaseosa, 554
Coeficiente de expansión térmica, 387
Coeficientes de la capacidad para la transferencia de energía, 732, 758
Coeficientes de la película de transferencia de masa individual, 702
Colburn, analogía para la transferencia de calor de Colburn, 398
para la transferencia de calor, 398
para la transferencia de masa, 682
Colburn, ecuación de flujo turbulento en con-

ductos de, 425
Columna de pared mojada, transferencia de calor en una, 622
Condiciones a la frontera encontradas en la transferencia de masa, 578
Conducción, factor de forma para la conducción tablas de valores, 333
Contacto continuo, análisis de equipo de
coeficiente constante de capacidad global, 760
coeficiente variable de capacidad global, 763
fuerza impulsora logarítmica media, 764
Continuidad, ecuaciones de
para una especie dada, 573
para una mezcla, 574
Continuidad, ecuación de
forma diferencial, 153
forma integral, 60
Continuo, 22
Contradifusión equimolar, 598
Convección:
exposición general acerca de la, 278, 381
mecanismo físico de la, 381
transferencia de masa en la, 657
Convección, coeficiente de la transferencia de masa en la, 562, 657, 702
correlación de, 702
Convección, coeficiente de transferencia de calor en la, 278, 381
correlación de, 413
Convección forzada:
alrededor de los cilindros en el flujo cruzado, 321
flujo alrededor de conjuntos de tubos, 434
flujo alrededor de esferas individuales, 433
transferencia de calor en el punto de estancamiento, 437
Convección forzada, transferencia de calor en la
flujo laminar en conductos:
Graetz, solución para, 422
Seider-Tate, ecuación de, 425
flujo turbulento en conductos:
Colburn, ecuación de, 425
Dittus-Boelter, ecuación de, 425
Seider-Tate, ecuación de, 426
para flujo externo sobre placa plana, 429
para flujo interno, 422
Convección libre, *véase* Convección natural
Convección natural:
en cilindros horizontales, 418
en la transferencia de masa, 662
en placas horizontales, 419
Lorentz, solución para una pared vertical calentada, 415
Schmidt-Beckman, análisis de,
para una pared vertical calentada, 415
para superficies verticales, 413
relaciones simplificadas para el aire, 421
sobre esferas, 420
Cortante de formación, 127
Cuerpo gris para radiación térmica, 517
Cuerpo negro, radiación de, véase Radiación de cuerpo negro

D

Dalton, ley para la mezcla de gases, 537
Densidad, 22
Derivada siguiente al fluido, 155
Desplazamiento, grosor de, 226, 244
Diámetro equivalente, 255
Difusión a través de una película de gas estancado, 588
Difusión molecular, 534
estado no permanente, 525
estado permanente, 588
Difusión molecular en estado pseudo permanente, 595
Difusividad de la masa, *véase* Difusión, coeficiente de
Difusividad térmica, 298, 383
Distancia de penetración en la conducción en estado no permanente, 370
Distorsión angular, 128, 174
Dittus-Boelter, ecuación de, para el flujo turbulento en conductos, 425
Divergencia, operador de, 154, 791

E

Ebullición, 448
Ebullición en estanque, 448
Ebullición nucleada en estanque, 448
Ecuaciones diferenciales
de la transferencia de calor, 293
de la transferencia de masa, 571, 574
Eficiencia de aletas, 322
Emitancia de las superficies, 496
valores de la, 506
Energía total específica, 109
Ensuciamiento, en cambiador de calor, 487
Ensuciamiento, tabla de resistencias de, 487
Entalpía, 110
equilibrio del equipo de transferencia de masa, 758
Equilibrio entre dos fases, 697
Henry, ley de, 699
"ley de distribución", 699
Raoult-Dalton, ley de, 699
Esferas:
coeficiente de arrastre, 209, 226
flujo cruzado, transferencia de calor en el, 433
transferencia de masa por convección a las, 718
Esfuerzo:
cortante, 24
en un punto, 23
normal, 24
turbulento, 231
Esfuerzo, notación para el, 25, 236
tensión superficial para el agua
variación con la temperatura, 463
Esfuerzos cortantes:
en un elemento de fluido, 136
en un flujo turbulento, 231
Esfuerzos turbulentos, 233

Espectro electromagnético, 494
Estela, 206
Euleriano, descripción del flujo, 54
Euler, número de, 190

F

Factor j:
  para la transferencia de calor, 398
  para la transferencia de masa, 681
Factor de vista, radiación, 510
  gráficas para diversas configuraciones de superficies, 512
Fick, ecuación de razón de transferencia de masa molecular, 535
Fick, segunda ley de difusión, 577
  en coordenadas cilíndricas, 578
  en coordenadas esféricas, 579
  en coordenadas rectangulares, 579
Flecha, trabajo de, 108
Flotación, 44
Fluido, definición de, 21
Fluido, fricción de un, relacionada con la transferencia de calor, 395
Flúidos, propiedades de los, 23, 828
Flujo cruzado sobre cilindros
  coeficiente de transferencia de calor para, 429
  coeficiente de transferencia de masa para, 722
Flujo cruzado sobre esferas
  coeficiente de transferencia de calor para, 433
  coeficiente de transferencia de masa para, 718
Flujo de difusión molecular de transferencia de masa, 540
  contribución del gradiente de concentración, 54
  contribución del movimiento en masa, 542
Flujo, descripción lagrangiana de, 54
Flujo en un conducto, laminar, transferencia de calor en, 422
Flujo, gráfica de,
  para conducción, 314
  para transferencia de masa, 614
Flujo irrotacional, 174
Flujo laminar:
  en tubos, 144, 247, 259
  sobre placas, 212
  transferencia de calor, coeficientes para la, 422
Flujo potencial, 173, 182
Flujo potencial, fuente en el, 185
Flujo, propiedades de, 23
Flujo, separación de, 207, 219
Flujo turbulento
  en capas límite, 240
  en tubos, 236
  esfuerzos de Reynolds en, 233
  transferencia de masa en el, 788
Flujo unidimensional, 61
Fourier, ecuación de campo, 298
Fourier, módulo para la conducción en estado permanente, 354
Fricción, factor de:
  Darcy, 247
  en flujo laminar de tubo, 247
  en tubos, 253, 259
  Fanning, 247, 257
Fricción, pérdida por:
  a la entrada de un tubo, 259
  Bernoulli, en la ecuación de, 118
  en accesorios de tubería, 252
  en un tubo, 247
Fricción, velocida de, 235, 236, 249
Froude, número de, 190
Función de corriente, 175, 213
Función de error, 361, 643, 863

G

Gases, propiedades de los, 827
  conductivida térmica de los, 272
Gradiente, 30, 725
Graetz, número de, 424
Graetz, problema de *véase* Convección forzada, Graetz, número de
Grashof, número de
  para la transferencia de calor, 388
  para la transferencia de masa, 664
Graficador de campo análogo, 332, 615
Grupos adimensionales, 190
Gurney-Lurie, tablas de
  para conducción en estado no permanente, 806
  para transferencia de masa molecular en estado no permanente, 644

H

Hagen-Poiseuille, ley de, 147, 248
Hatta, número de, 610
Henry, ley de, 699

I

Irradiación, definición de, 517

K

Kirchhoff, ley de radiación térmica de, 496
Knudsen, difusión de, 546, 559

L

Laplace, ecuación de, 177, 181
  para la transferencia de calor, 299
  para la transferencia de masa, 578, 611, 614
Lennard-Jones, parámetros de, 550, 551, 859-861
Ley de la potencia un séptimo, 239
Lewis, número de, 659
Línea de operación, ecuaciones de, 746
  línea de operación de flujo contracorriente, 749
  línea de operación de flujo en la dirección de la corriente, 754

Líneas de corriente, 56, 175
Líneas de trayectoria, 57
Líquidos:
coeficientes de difusión de la masa, 857
conductividad térmica de los, 272
propiedades de los, 845
Longitud de entrada para el flujo en tubos,
correcciones para los coeficientes de transferencia de calor, 428
Longitud equivalente de las conexiones de tubería, 254

M

Manómetro de tubo U, 38
Media logarítmica:
diferencia de concentración, 765
diferencia de temperatura, 471
factores de corrección para la, 479
Metales líquidos, propiedades de los, 851
Metales, propiedades de los, 824
Método de red para el análisis de la radiación, 515
Método gráfico:
para conducción en estado no permanente, *véase* Schmidt, gráfica de
para difusión molecular unidimensional, 647
para la conducción bidimensional en estado permanente
véase Flujo, gráfica de, para conducción
Mezcla homogénea, concentración de, 658
Mezclado, longitud de, 234, 677
Momento angular, 84
Momento de momento, 83
Momento, difusividad,233, 383
Momento, espesor de, 228
Momento simultáneo:
de transferencia de calor y masa, 517
Momento, teorema de, 75
Movimiento, ecuaciones de, 169

N

Navier-Stokes, ecuación de:
en forma adimensional, 189
para viscosidad constante, 162, 803
Neutrones, difusión de, 545
Newton, ecuación de rapidez para la convección de, 278
Newtoniano, fluido, 129
Newton, ley de viscosidad, 127
No deslizamiento, condición de, 130
No newtoniano, fluido, 129
Nusselt, número de, definición del:
para la transferencia de calor, 384
para la transferencia de masa, 661
Nut, definición de, 477

O

Operación concurrente de transferencia de masa, 753
Operaciones de transferencia de masa de contracorriente, 747

P

Peclet, número de, 424
Película, teoría de la
coeficientes de transferencia de masa, 592, 688
con reacciones químicas, 610
independiente de las reacciones químicas, 592, 600
para la transferencia de masa, 591, 600
Película de condensación, *véase* Condensación, película de
estudio general de la, 454
tratamiento analítico de la, 454
Película de ebullición, *véase* Ebullición, película de
Película, temperatura de la, 393
Pérdida de entrada, 259
Perfil de concentración, 592, 600
Plaça Plana
coeficiente de transferencia de masa para una 664, 718
flujo laminar sobre una, 208, 212
flujo turbulento sobre una, 240
Poder de emitancia para la radiación térmica, 496
Poiseuille, flujo de, 147, 248
Poisson, ecuación de, para la transferencia de calor, 298
Polhausen, solución de, para una capa laminar límite:
para la transferencia de calor, 396
para la transferencia de masa, 668
Potencial químico, 544
Planck, funciones de radiación, 501
Planck, ley de radiación, 498
Prandtl, analogía de:
para la transferencia de calor, 403
para la transferencia de masa, 681
Prandtl, longitud de mezclado, 234, 677
Prandtl, número de:
en un flujo turbulento, 383, 401
importancia física del, 383
Presión:
de estancamiento, 183
definición de, 26
Presión adversa, gradiente de, 220
Presión, caída de, en bancos de tubo, 435
Presión de estancamiento, 183
Presión dinámica, 206
Presión estática, 25
Primera ley de la termodinámica:
para un sistema, 101
para un volumen de control, 109
Principio de Arquímedes, 45
Propiedades:
del agua, 845
del aire, 819, 828
de la radiación, 505
de los gases, 828-844
de los metales, 824-825
de los metales líquidos, 851-853
de los no metales, 825

Prueba de modelos, 194, 230
Punto de estancamiento en la transferencia de calor, 437

R

Radiación:
de absorbencia, 495
de cuerpo gris, 517
de cuerpo negro, 496
distribución espectral de la,
para el cuerpo negro, 499
para la energía térmica, 499
emitancia de vapor de agua, 523
en gases, emitancia de CO_2, 524
en un medio absorbente y transmisor, 521
exposición general de la, 280, 493
intensidad de, 497
intercambio de calor entre superficies negras, 508
intercambio entre, superficies grises, 517
superficies en presencia de un rerradiante, 516
mecanismo físico de la, 493
método reticular para el análisis de la, 515
Planck, ley de la, 500
poder de emisión para la, 496
reflectividad para la, 495
reflexión difusa para la, 495
transmitancia para la, 495
Radiación, coeficiente de transferencia de calor de, 525
Radiación, factor de forma para la, *véase* factor de vista, radiación
Radiación, factor de vista de la
tablas para el, 512
Radiación, intensidad de, 497
Radiación, método reticular de, 515
Radiación, propiedades de la,
monocromática, 496
Radio crítico para la conducción en una pared cilíndrica, 316
Radiosidad, 517
Raoult-Dalton, ley del equilibrio de, 700
Raoult, ley de, 699
Razón mínima L_s/G_s para la transferencia de masa, 750, 754
Reacción heterogénea, 602
Reacción homogénea, 601, 608
Reciprocidad, relación de, en la transferencia de calor de radiación, 510
Reflectancia para la radiación térmica, 495
Reflexión difusa para la radiación térmica, 495
Remolino, difusividades de, 679
Remolino, viscosidad de, 231
Resistencia térmica:
de una pared plana, 283
de un cilindro hueco, 283
Reynolds, analogía de,
para la transferencia de calor, 396
para la transferencia de masa, 675
Reynolds, esfuerzo de, 233
Reynolds, experimento de, 203
Reynolds, número de,
en estudios de modelos, 191
en la transición, 204, 211
flujo de capa límite, 211
para la condensación, 459
para los coeficientes de fricción, 250
Rugosidad:
en conductos, 245
relativa, 254

S

Schmidt, gráfica de:
para la transferencia de calor, 365
para la transferencia de masa, 648
Schmidt, número de, 659
Seider Tate, ecuación de:
para el flujo en un conducto laminar, 425
para el flujo turbulento en un conducto, 426
Semejanza:
cinemática, 189
dinámica, 191
geométrica, 188
Semejanza dinámica, 191
Sherwood, número de, 661
Sistema, 57
Sistema bidimensional, solución numérica del, 335
Slug, 31
Sólidos:
conductividad térmica de los, 275, 824
con fuentes de calor
distribución de temperaturas en los, 313
Soret, efecto de, 542
Stanton, número de, 386
Stephan-Boltzman, constante de, 280, 500
Stephan-Boltzmann, ley de la radiación térmica, 280, 500
Stokes, relación de viscosidad, 139, 801
Subcapa laminar, 210, 238
Superficie extendida
con sección transversal variable, 319
ecuación general para una, 318
ecuación unidimensional para una, 317
perfiles de temperatura en una, 321

T

Tablas de efectividad NUT, 483
Tablas de transferencia de estado no permanente, 646, 805
Tablas para el análisis de la transferencia no permanente, 805
Tanques o estanques de transferencia de masa por lote, 743
estanque, 448
flujo de, 448
nucleada, 448
mecanismo físico de la, 448
película de, 451
Temperatura, distribución de la

en aletas, 320
en los sólidos con fuentes de calor, 314
en una capa laminar límite, 389
en un flujo en conducto laminar, 423
Temperatura, película, 393
Teoría de las dos resistencias, 701
controlada por la fase de gas, 707
controlada por la fase líquida, 707
resistencia en la fase de gas, 705
resistencia en la fase líquida, 705
Teoría de penetración para la transferencia de masa, 625, 627, 685
Torre de aspersión, 740
Torre de burbujas, 741
Torre de placa de burbujas, 742
Torre empacada, 742
Trabajo, rapidez de:
cortante, 107
de flecha, 107
de flujo, 107
viscoso, 108
Transferencia de calor global, coeficiente de, 285
tabla aproximada de valores para el diseño de cambiadores de calor, 489
Transferencia de masa global, coeficiente de, 703
Transferencia de masa interfase, 697
Transición
en capas límite, 211, 242
en un flujo en un tubo, 205
Transición, región de, 251
Transmitancia para la radiación térmica, 495
Tubos:
flujo en, 144, 235-236, 247, 259
fricción, coeficiente de, 249
no circular, 255
perfiles de velocidad en, 144, 236
Poiseuille, flujo en, 144, 248
tamaños, 864
Turbulencia, 229
Turbulencia, intensidad de, 230

U

Unidades de transferencia, número de:
método de análisis de cambiador de calor, 477

V

Velocidad de la masa promedio, 539
Velocidad molar promedio, 540
Velocidad, perfil de:
cerca de una pared de tubo, 236, 237
cerca de una placa plana, 215, 240
en tubos, 239, 259
en tubos rugosos, 239
totalmente desarrollado, 62, 146, 259
Velocidad, potencial de, 180
Viscosidad:
absoluta, 135
cinemática, 135
efecto de la temperatura en la, 134, 136
segundo coeficiente de, 801
Viscosidad cinemática, 135
Volumen de control, 57
Volúmenes atómico y molecular, 557, 558
Volúmenes de control, leyes básicas para los:
conservación de la masa, 60
primera ley de la termodinámica, 109
momento de momento, 84
momento lineal, 75
Von Karman, analogía de:
para la transferencia de calor, 403
para la transferencia de masa, 681
Vorticidad, 174

W

Wiedemann, Franz, Lorentz, ecuación de, 274
Wien, ley del desplazamiento para la radiación térmica, 500

—oOo—

NOMENCLATURA

$\mathbf{a}$,	aceleración en ft/seg^2, m/seg^2
A,	área ft^2, m^2.
A_p,	área proyectada de la superficie; ft^2, m^2, ec (12-3).
c,	concentración molar total, lb mol/ft^3; mol/m^3.
$c_A{}^*$,	concentración de A en equilibrio con la composición global de la fase gaseosa, $P_{A,G}$: lb mol/ft^3; mol/m^3; ec (29-11).
c_{A_0},	concentración de A en el tiempo $t = 0$; lb mol/ft^3; mol/m^3, capítulo 27.
$c_{A,i}$,	concentración molar líquida de A en la interfase; lb mol/ft^3, mol/m^3; sección 29.2.
$c_{A,L}$,	concentración molar líquida de la corriente global; lb mol/ft^3, mol/m^3; sección 29.2.
$c_{A,s}$,	concentración de A en la superficie; lb mol/ft^3, mol/m^3. Sección 28.4.
$c_{A,\infty}$,	concentración de A en la corriente global; lb mol/ft^3, mol/m^3; sección 28.4.
c_i,	concentración molar de la especie i, lb mol/ft^3, mol/m^3; ec (24.4).
c_p,	capacidad calorífica; Btu/lb °F, J/kg K.
$\bar{C}$,	velocidad molecular aleatoria promedio; m/seg, secciones 7.3, 15.1 y 24.2.
C_C,	proporción de capacidad de la corriente de fluido frío; Btu/h °F, kW/K; ec (22-1).
C_d,	parámetro correlacionador en la ebullición nucleada; adimensionalmente; ec (21-4).
C_D,	coeficiente de arrastre, adimensional, ec (12-3).
C_f,	coeficiente de fricción; adimensional; ec (12-2).
C_H,	proporción de capacidad de corriente de fluido caliente; Btu/h °F, kW/K; ec (22-1).
C_{sf},	coeficiente correlacionador de ebullición nucleada; adimensional; tabla 21.1.

d_c, diámetro del cilindro; ft, m; tabla 30.1.
d_p, diámetro de la partícula esférica; ft, m; tabla 30.1.
D, diámetro del tubo, ft, m.
D_{AB}, difusividad de la masa o coeficiente de difusión correspondiente a la componente A, en difusión a través de la componente B; ft^2/h, m^2/seg; ec (24-15).
$D_{A,eff}$, coeficiente de catalización de difusión "efectiva"; ft^2/h, m^2/seg; ec. (24-48).
D_{eq}, diámetro equivalente; ft, m; ec (14-18).
$D_{K,eff}$, coeficiente de difusión de Knudsen, ft^2/h, m^2/seg; ec (24-51).
e, rugosidad del tubo; pulg, mm, ec (14-2).
e, energía específica o energía por unidad de masa; Btu/lb_m, J/kg; sección 6.1.
E, energía total del sistema; Btu, J; sección 6.1.
E, poder emisivo total; $Btu/h\ ft^2$, W/m^2; ec (23-2).
E, potencial eléctrico; voltio, secciones 17.4, 26.3.
E_b, poder emisivo del cuerpo negro; $Btu/h\ ft^2$, W/m^2; ec (23-8).
f, variable dependiente utilizada en la solución de Blasius de capa límite; adimensional; ec (12-13).
f', parámetro de semejanza para el análisis convectivo de la capa límite; la prima denota la derivada con respecto a η; adimensional, ec (19-16).
f_D, factor de fricción, de Darcy; adimensional; ec (14-4).
f_f, factor de fricción, de Fanning; adimensional; ec (14-3).
F, fuerza; lb_f, N; sección 1.2.
F, factor de correlación correspondiente a las configuraciones de los cambiadores compactos de calor; adimensional; ec (22-14).
F_{ij}, factor de vista para transferencia de calor radiante; adimensional; sección (23-7).
$\bar{F}_{ij}$, factor de vista correspondiente a la transferencia de calor rerradiante; adimensional; sección 23.8.
$\mathcal{F}_{ij}$, factor de vista de cuerpo gris; adimensional; sección 23.8.
$\mathfrak{F}$, constante de Faraday; 9,652 × 10 coulombs absolutos/g equivalente; ec (24-47).
$\mathbf{g}$, aceleración debida a la gravedad; ft/seg^2, m/seg^2.
g_c, factor dimensional de conversión; $32.2\ ft/lb_m/lb_f seg^2$, $kg\ m/seg^2 \cdot N$.
G, irradiación; $Btu/h\ ft^2$, W/m^2; sección 23.10.
G, velocidad de la masa; $lb_m/ft^2\ h$, $g/m^2 \cdot seg$. tabla 30.1.
G, número total de moles de la fase gaseosa por tiempo, por sección transversal de área; $lb\ mol/ft^2\ h$, $g\ moles/m^2 \cdot seg$; ec (31-4).
G_b, velocidad de la masa de las burbujas; $lb_m\ ft^2\ seg$, $kg/m^2 \cdot seg$; ec (21.5).
G_M, velocidad molar; $lb\ mol/ft^2\ h$, $g\ mol/m^2 \cdot seg$; tabla 30.1.
G_s, número de moles en la corriente de gas con base en un soluto libre por tiempo, por sección transversal de área; $lb\ mol/ft^2\ h$, $g\ mol/m^2 \cdot seg$; ec (31-8).
h, coeficiente de transferencia convectiva de calor $Btu/h\ ft^2\ ^\circ F$, $W/m^2 \cdot K$; ec (15-11).

h, profundidad del estanque de oxigenación; ft; ec (31-3).

h_L, pérdida de cabeza, $\Delta P/p$; ft lb_f/lb_m, $Pa/kg/m^3$; ec (14-3).

h_{Lx}, coeficiente de transferencia de calor correspondiente al flujo dentro de un conducto que recorre una distancia L desde la entrada del mismo, con $L<60D$; Btu/h ft^2 °F, $W/m^2 \cdot K$; ec (20-33).

h_r, coeficiente de transferencia de calor radiante; Btu/h ft^2 °F, $W/m^2 \cdot K$; sección 23.12.

h_∞, coeficiente de transferencia de calor correspondiente al flujo interno, para $L>60D$; Btu/h ft^2 °F, $W/m^2 \cdot K$; ec (20-33).

H, constante de la ley de Henry; concentración de la fase gaseosa/concentración de la fase líquida; ec (29-4).

$\mathbf{H}$, momento de momento; $lb_m\ ft^2/seg$, $Kg \cdot m^2/seg$; ec (5-7).

H_i, entalpia de especímenes dados i; Btu, J.

$\bar{H}_i$, entalpia molar parcial de especímenes i; Btu/lb mol, J/mol; ec (26-62).

$\mathcal{H}$, humedad, masa de H_2O/masa de aire seco; lb_m/lb_m, kg/kg; tabla 29.1.

I, intensidad de radiación; Btu/h ft^2, W/m^2; sección 23.3.

j', factor j de transferencia de calor con conjuntos de tubos; adimensional; figuras 20.13, 20.14.

j_D, factor j de transferencia de masa, analogía de Chilton-Colburn; adimensional; ec (28-56).

j_H, factor j de transferencia de calor, analogía de Colburn; adimensional; ec (19-38).

$\mathbf{j}_i$, flujo de masa relativo a la velocidad promedio de la masa; lb_m/ft^2 h, $kg/m^2 \cdot seg$; ec (25-17).

J, radiosidad j Btu/h ft^2, W/m^2; sección 23.10.

$\mathbf{J}_i$, flujo molar relativo a la velocidad molar promedio; lb mol/h ft^2, $mol/m^2 \cdot seg$; ec (24-16).

k, conductividad térmica; Btu/h ft °F, $W/m \cdot K$; ec (15-1).

k_r, constante de rapidez de la reacción química, usada para definir r_A y R_A; sección 25.3.

k^0, coeficiente de transferencia de masa sin transferencia neta de masa a la película; lb mol/$ft^2 \cdot$ seg Δc_A; $mol/m^2 \cdot$ seg. Δc_A; ec (26-24).

k_c, coeficiente de transferencia convectiva de masa; lb mol/ft^2 h Δc_A, $mol/m^2 \cdot seg \cdot mol/m^3$; ec (24-52).

k_c, coeficiente medio de transferencia convectiva de masa; lb mol/ft^2 h Δc_A, $mol/m^2 \cdot seg \cdot mol/m^3$; ec (28-25).

k_G, coeficiente de transferencia convectiva de masa en la fase gaseosa; lb mol/ft^2 h atm, $mol/m^2 \cdot seg \cdot Pa$; ec (29-6).

k_L, coeficiente de transferencia convectiva de masa en la fase líquida; lb mol/ft^2 h lb mol/ft^3, mol $m^2 \cdot seg \cdot m^3$; ec (29-7).

k_Ga, coeficiente individual de capacidad gaseosa, lb mol/h ft^3 atm, $mol/seg \cdot m^3 \cdot Pa$; ec (39-17).

k_La, coeficiente individual de capacidad líquida; lb mol/h ft^3 Δc_A, $mol/seg \cdot m^3$ mol/m^3; ec (31-19).

K_G, coeficiente global de transferencia de masa en la fase gaseosa; lb mol/h ft^2 atm, $mol/seg \cdot m^2 \cdot Pa$; ec. (29-10).

K_L, coeficiente global de transferencia de masa en la fase líquida lb mol/h ft^2 Δc_A, mol/seg · m^2 · mol/m^3; ec (29-11).

$K_G a$, coeficiente global de capacidad gaseosa; lb mol/h ft^3 atm mol/seg · m^3 Pa; ec (31-18).

$K_L a$, coeficiente global de capacidad líquida; lb mol/h ft^3 Δc_A mol/seg · m^3 · mol/m^3; ec (31-20).

$K_X a$, coeficinte global de capacidad líquida basado en ΔX_A, fuerza motriz; lb mol/h ft^3 ΔX_A, mol/seg · m^3 · ΔX_A; ec (31-22).

$K_Y a$, coeficiente global de capacidad gaseosa basado en Y, fuerza motriz; lb mol/h ft^3 ΔY_A, mol/seg · m^3 · ΔY_A; ec (31-21).

L, longitud de mezclado; ecs (13-10), (19-40) y (28-25).

L, longitud característica; ft, m.

L, número total de moles de la fase líquida por tiempo, por sección transversal de área; lb mol/h ft^2, mol/seg · m^2; ec (31-4).

L_{eq}, longitud equivalente; ft, m; ec (14-17).

L_m, velocidad de la masa molar líquida; lb mol/h ft^2, mol/seg · m^2; tabla 30.1.

L_s, número de moles de la fase líquida con base en un soluto libre por tiempo, por sección transversal de área; lb mol/h ft^2, mol/seg · m^2; ec (31-8).

m, masa de la molécula; sección 7.3.

m, resistencia relativa = $D_{AB}/k_c x_1$; adimensional, sección 27.2.

m, pendiente de la recta de equilibrio, unidades de concentración de gas por unidades de concentración de líquido; ec (29-14).

$\mathbf{M}$, momento; lb$_m$ ft^2/seg, kg · m^2/seg.

M_i, peso molecular de la especie; lb/lb mol, kg/mol.

n, constante de cama empacada; adimensional; ec (30-17).

n, número de especies en una mezcla; ecs (24-1), (24-3) y (24-6).

n, posición relativa = x/x_1; adimensional; sección 27.2.

N, moléculas por unidad de volumen; sección 7.3.

$\mathbf{n}$, vector unitario normal dirigido hacia el exterior; ec (4-1).

n_i, número de moles de la especie i.

$\mathbf{n}_i$, flujo de masa relativo a un conjunto de ejes estacionarios; lb$_m$ /h ft^2, kg/seg · m^2; ec (24-22).

$\mathbf{N}_i$, flujo molar relativo a un conjunto de ejes estacionarios; lb mol/h ft^2, mol/seg · m^2; ec (24-21).

NUT, número de unidades de transferencia; adimensional; sección 22.4.

p_A^*, presión parcial de A en equilibrio con la composición global.

$p_{A,G}$, presión parcial de la componente A en la corriente globos de gas; atm, Pa; sección 29.2.

$p_{A,i}$, presión parcial de la componente A en la interfase; atm, Pa; sección 29.2.

p_i, presión parcial de la especie i; atm, Pa.

$p_{B,lm}$, media logarítmica de la presión parcial de un gas que no está en difusión; atm, Pa, ec (26-8).

P, presión total; atm, Pa.

$\mathbf{P}$, momento lineal total del sistema; lb$_m$ ft/seg, Kg · m/seg; ec (5-1).

P_c, presión crítica; atm, Pa.
P_i, presión de vapor de la especie i; atm, Pa.
q, rapidez de flujo de calor; Btu/h, W; ec (15-1).
$\dot{q}$, rapidez de generación volumétrica de energía; Btu/h ft^3, W/m^3; ec (16-1).
Q, transferencia de calor; Btu, J, sección 6.1.
Q_g, rapidez de flujo de gas, ft^3/min; ec (31-3).
r, distancia radial tanto en coordenadas cilíndricas como en coordenadas esféricas; ft, m.
r, radio; ft, m.
r_{crit}, radio crítico de aislamiento; ft, m; ec (17-13).
R, radio de la esfera, ft; m; ec (26-35).
R, constante universal de los gases; atm ft^3/lb mol °R, Pa · m^3/mol · K; ejemplo 1, sección 24.1.
R_t, resistencia térmica; h °F/Btu, K/W; ec (15-16).
r_A, rapidez de producción de la masa A dentro del volumen de control; lb_m/ft^3 h, kg/m^3 · seg; ec (25-5).
R_A, rapidez de producción de moles de A en el volumen de control lb mol/ft^3 h, mol/m^3 · seg; ec (25-11).
s, factor de renovación de superficie; ec (28-63).
S, factor de forma; ft o m. ec (15-19).
S, corte seccional de área; ft^2, m^2; sección 26.5.
$\mathbf{S}$, intensidad de la fuerza ejercida sobre el volumen de control; lb_f/seg^2 ft, kg/seg^2 · m; sección 1.2.
t, tiempo; h, seg.
T temperatura absoluta; °R, K.
T_b, temperatura normal de ebullición; K; ec (24-38).
T_c, temperatura crítica; K; ec (24-36).
T_f, temperatura de la película; °F, K; ec (19-28).
T_{sat}, temperatura de mezclas saturadas vapor-líquido; °F, K; figura 21.1.
U, coeficiente de transferencia total de calor; Btu/h ft^2 °F, W/m^2 · k; ec (15-17).
$\mathbf{v}_0$, velocidad terminal; ft/seg, m/seg.
v_x, componente de la velocidad a lo largo de x, v: ft/seg, m/seg.
v_y, componente de la velocidad a lo largo de y, v: ft/seg, m/seg.
v_z, componente de la velocidad a lo largo de z, v: ft/seg, m/seg.
v^+, velocidad adimensional
$\mathbf{v}$, velocidad, ft/seg; m/seg.
$\mathbf{v}$, velocidad de la masa promedio correspondiente a la mezcla de componentes múltiples; ft/seg, m/seg, ec (25-13).
$\mathbf{v}_i$, velocidad de la especie dada, i; ft/seg, m/seg.
$\mathbf{v}_i - \mathbf{v}$, velocidad de difusión de la especie i con relación a la velocidad de la masa promedio; ft/seg, m/seg, sección 24.1.
$\mathbf{v}_i - \mathbf{V}$, velocidad de difusión de la especie i con relación a la velocidad molar media; ft/seg, m/seg, sección 24.1.
V, volumen del gas, ft^3, m^3, ec (24-5).
V_b, volumen molecular en el punto normal de ebullición, cm^3/g mol, ec (24-34).

V_c, volumen molecular crítico; cm^3/g mol; ec (24-34).
$\mathbf{V}$, velocidad molar media; ft/seg, m/seg; ec (24-14).
W, trabajo realizado; Btu, J; sección 6.1.
W, contenido de humedad; lb de humedad/lb de sólido seco, kg de humedad/kg de sólido seco; sección 27.2.
w_A, rapidez de flujo de masa de la especie A; $lb_{lb\,m}$/mh, g/seg.
W_s, trabajo de flecha; Btu, J; sección 6.1.
W_δ, trabajo de flecha; Btu, J; sección 6.1
W_τ, trabajo cortante, Btu, J; sección 6.1.
x, coordenada rectangular
x_1, longitud característica; ft, m; sección 27.2.
x_A, fracción molar en las fases líquidas o sólida; adimensional; ec (24-7).
X_A, moles de A/moles de líquido libre de A; ec (31-7).
X_D, tiempo relativo, $D_{AB}\,t/x_1^{\,2}$; adimensional; sección 27.2.
y, coordenada rectangular
y^+, distancia adimensional; ec (13-18).
y_A, fracción molar en la fase gaseosa; ecs (24.7) y (24-8).
$y_{B,\mathrm{lm}}$, fracción molar logarítmica media del gas transportador; ec (26-6).
y_n', fracción logarítmica de la componente n en una mezcla gaseosa con base en una especie libre de i; ec (24-42).
Y, parámetro en el análisis en un intercambiador de calor; adimensional; ec (22-12).
Y, cambio no efectuado; adimensional; sección 27.2.
Y_A, moles de A/moles de gas libre de A; ec (31-6).
z, distancia en la dirección de z; ft, m.
z, coordenada rectangular
Z, frecuencia de colisión con la pared; ec (7-8).
Z, parámetro del análisis de cambiador de calor; adimensional; ec (22-13).
α, absortancia; adimensional; sección 23.2.
α, difusividad térmica; ft^2/h; m^2/seg; ec (16-17).
α, constante de cama empacada; ec (30-17).
β, factor geométrico correspondiente a la transferencia de calor en el punto de estancamiento; tabla 20.3.
β, coeficiente de expansión térmica; 1/° F, 1/K; ec (19-10).
δ, espesor de la capa límite; ft, m, ec (12-28).
δ, espesor de la capa estancada o laminar; ft, m; ec (26-9).
δ_c, espesor de la capa límite de concentración; ft, m; ec (28-18)'
δ_t, espesor de la capa térmica límite; ft, m, ec (19-22).
ϵ, emitancia; adimensional, ec (23-2).
ϵ_{AB}, parámetro de Lennard-Jones; ergios; ec (24-40).
ϵ_D, difusividad de masa de remolino, ft^2/h, m^2/seg; ec (28-44).
ϵ_H, difusividad térmica de remolino; ft^2/h, m^2/seg, sección 19.7.
ϵ_i, parámetro de Lennard-Jones; ergios; ecs (24-37) y (24-38).
ϵ_M, difusividad de remolino de momento o viscosidad de remolino; ft^2/h, m^2/seg; ec (13-13).
η, variable dependiente utilizada por Blasius en la solución de la capa límite; adimensional; ec (12-12).

η, parámetro de semejanza correspondiente al análisis de convección; adimensional; ec (19-7).
η_F, eficiencia de aleta; adimensional; sección 17.3 figura 17.11.
θ, parámetro de temperatura = $T - T_i$; °F, K; sección 17.3.
θ, espacio nulo fraccionario de un catalizador; ec (24-49).
θ, ángulo, en coordenadas cilíndricas o esféricas; radianes.
θ_E, constante de correlación; ec (31-3).
κ, constante de Boltzman; ergios K; sec (23-4) y (24-2).
λ, trayectoria molecular media libre; secciones (23-4), (24-2).
λ, longitud de onda de la radiación térmica; micras; sección 23-4.
λ, conductancia iónica (amp/cm^2)(volt/cm)(g equivalente/cm^2); ec (24-47).
μ, viscosidad; lb_m/ft seg, Pa · seg; ec (7-4).
μ_B, viscosidad del solvente B; cp; ec (24-45).
μ_i, potencial químico de la especie dada; Btu/lb mol, J/mol; ec (24-23).
ν, frecuencia, hz; sección 23.1.
ν, viscosidad cinemática μ/ρ, ft^2/seg, m^2/seg.
π, grupos pi en análisis dimensional; secciones 14.1, 19.3, 28.3.
ρ, densidad de un fluido; lb/ft^3, kg/m^3; sección 1.2.
ρ, densidad de masa de la mezcla; lb_m/ft^3; kg/m^3; ec (24-1).
ρ, reflectancia; adimensional; sección 23.2.
ρ_i, concentración de masa de la especie i, lb_m/ft^3, kg/m^3; ec (24-13).
σ, tensión superficial; lb_f/ft, N/m; capítulo 21.
σ, constante de Stefan-Boltzman; 0.1714×10^{-8} Btu/h ft^2 °R^4, 5.672×10^{-10} W/m^2 · K^4; ec (15-13).
σ_{AB}, parámetro de Lennard-Jones; Å; ec (24-39).
σ_i, un parámetro de Lennard-Jones; Å; ecs (24-34), (24-35), (24-36).
σ_{ii}, esfuerzo normal; lb_f/pulg^2, N/m^2, sección 1.2.
τ, tortuosidad de un catalizador; ec (24-49).
τ, transmitancia; adimensional; sección 23.2.
τ_{ij}, esfuerzo cortante; lb_f/pulg^2 N/m^2; sección 1.2.
τ_0, esfuerzo cortante en la superficie; lb_f/pulg^2, N/m^2; ec (12-30).
ϕ, potencial de la velocidad; sección 10.4.
ϕ, ángulo en coordenadas esféricas; radianes.
ω, velocidad angular; 1/seg.
ω_i, fracción de masa de la especie i; adimensional; ec (24-2).
$\omega/2$, vorticidad; ec (10-4).
Γ, rapidez de flujo de la película de condensación por unidad de ancho; lb_m/ft seg, kg/m · seg; ec (21-13).
Δ, $y_A - y_A^*$; adimensional; ec (31-32).
Δa, equivalente $a_2 - a_1$ donde a es cualquier variable y 1 y 2 se refieren a dos superficies de control.
ΔT_{lm}, diferencia de temperatura logarítmica media; ° F, K; ec (22-9).
$\mathscr{E}$, efectividad del cambiador de calor; adimensional; ec (22-17).
Φ_B, parámetro de asociación; ec (24-45).
Ψ, función de corriente; sección 10.2.
Ω, ángulo sólido; radianes, sección 23.3.
Ω_D, integral de colisión; ec (24-33) y apéndice K.

Ω_k, integral de colisión de Lennard-Jones; ec (15-7) y apéndice K.
Ω_μ, integral de colisión de Lennard-Jones, ec (7-10) y apéndice K.

PARAMETROS ADIMENSIONALES

Bi, número de Biot, $(hV/A)/k$; ec (18-7).
Eu, número de Euler, $P/\rho v^2$; ec (11-2).
Fo, número de Fourier, $\alpha t/(V/A)^2$; ec (18-8).
Fr, número de Froude, v^2/gL; ec (11-1).
Gr, número de Grashof, $\beta g \rho^2 L^3 \Delta T/\mu^2$; ec (19-12).
Gr_{AB}, numéro de Grashof de transferencia de masa, $L^3 g \Delta \rho_A/\rho \nu^3$; ec (28-9).
Gz, número de Graetz, $(\pi/4)(D/x)$ Re Pr; sección 20.2.
Le, número de Lewis, $k/\rho c_p D_{AB}$; ec (28-3).
Nu, número de Nusselt, hL/k; ec (19-6).
Nu_{AB}, número de Nusselt de transferencia de masa, $k_c L/D_{AB}$: ec (28-7).
Pe, número de Peclet, $Dv\rho c_p/k$ = Re Pr; sección 20.2.
Pr, número de Prandtl, $\nu/\alpha = \mu c_p/k$; ec (19-1).
Re, número de Reynolds, $lv\rho/\mu = Lv/\nu$; ec (11-3).
Sc, número de Schmidt, $\mu/\rho D_{AB}$; ec (28-2).
Sh, número de Sherwood, $k_c L/D_{AB}$; ec (28-7).
St, número de Stanton, $h/\rho v c_p$; ec (19-8).

OPERACIONES MATEMATICAS

D/Dt, derivada sustancial; ec (9-4).
div $\mathbf{A}$, o $\nabla \cdot \mathbf{A}$, divergencia de un vector.
erf ϕ, función de error de ϕ ; apéndice L.
exp x, o e^x, función exponencial de x.
ln x, logaritmo base e, de x.
$\log_{10} x$, logaritmo base 10, de x.

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{e}_z.$$

APENDICE
A
TRANSFORMACIONES DE LOS OPERADORES ∇ Y ∇^2 A COORDENADAS CILINDRICAS

EL OPERADOR ∇ EN COORDENADAS CILINDRICAS

En coordenadas cartesianas, ∇ se escribe así:

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{A-1}$$

Al hacer la transformación de este operador a coordenadas cilíndricas, se deben transformar tanto los vectores unitarios como las derivadas parciales.

En la figura A-1 aparecen: un sistema de coordenadas cartesianas y uno de coordenadas cilíndricas. Se observa que las siguientes relaciones son las que existen entre las coordenadas cartesianas y las cilíndricas:

$$z = z \qquad x^2 + y^2 = r^2 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \tag{A-2}$$

Por lo tanto:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_{\text{cyl}} = \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_{\text{cart}} \tag{A-3}$$

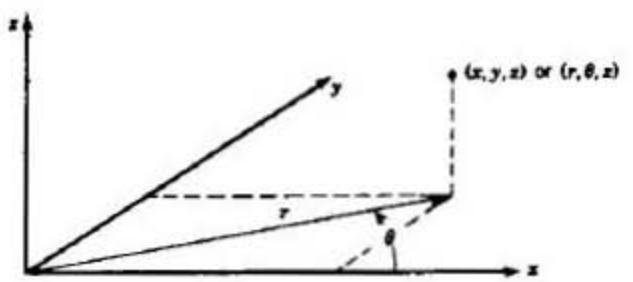


Figura A.1 Coordenadas cilíndricas y cartesianas.

en tanto que, utilizando la regla de la cadena:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

Como

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}=\operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}=-\frac{y}{x^2\sec^2\theta}=-\frac{y}{r^2}=-\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}$$

así

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=\operatorname{sen}\theta\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)-\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right) \tag{A-4}$$

De manera similar:

$$\frac{\partial}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}$$

donde

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}=\operatorname{sen}\theta \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{1}{x\sec^2\theta}=\frac{\cos\theta}{r}$$

así pues, $(\partial/\partial y)$ se transforma en:

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)=\operatorname{sen}\theta\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\cos\theta}{r}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right) \tag{A-5}$$

También se deben transformar los vectores unitarios. Si se resuelven los vectores unitarios, en sus componentes, en x, y, z, se obtiene:

$$\mathbf{e}_z=\mathbf{e}_z \tag{A-6}$$

$$\mathbf{e}_x=\mathbf{e}_r\cos\theta-\mathbf{e}_\theta\operatorname{sen}\theta \tag{A-7}$$

$$\mathbf{e}_y=\mathbf{e}_r\operatorname{sen}\theta+\mathbf{e}_\theta\cos\theta \tag{A-8}$$

Al sustituir las relaciones anteriores en la ecuación (A-1) se obtiene:

$$\mathbf{e}_x\frac{\partial}{\partial x}=\mathbf{e}_r\cos^2\theta\frac{\partial}{\partial r}-\mathbf{e}_r\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}-\mathbf{e}_\theta\operatorname{sen}\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}+\mathbf{e}_\theta\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\mathbf{e}_y\frac{\partial}{\partial y}=\mathbf{e}_r\operatorname{sen}^2\theta\frac{\partial}{\partial r}+\mathbf{e}_r\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}+\mathbf{e}_\theta\operatorname{sen}\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}+\mathbf{e}_\theta\frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

y

$$\mathbf{e}_z\frac{\partial}{\partial z}=\mathbf{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

Si se suman las relaciones anteriores, se obtiene, después de percatarse de que $\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1$,

$$\nabla=\mathbf{e}_r\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\mathbf{e}_\theta}{r}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)+\mathbf{e}_z\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{A-9}$$

EL OPERADOR ∇^2 EN COORDENADAS CILINDRICAS

Un vector unitario no puede variar su magnitud; sin embargo su dirección sí puede cambiar. Los vectores cartesianos unitarios no cambian sus direcciones absolutas, pero en coordenadas cilíndricas, tanto $\mathbf{e}_r$ como $\mathbf{e}_\theta$ dependen del ángulo θ. Como estos vectores cambian de dirección, tienen derivada con respecto a θ. Como $\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_x \cos\theta + \mathbf{e}_y \operatorname{sen}\theta$ y $\mathbf{e}_\theta = -\mathbf{e}_x \operatorname{sen}\theta + \mathbf{e}_y \cos\theta$, puede observarse que:

$$\frac{\partial}{\partial r}\mathbf{e}_r = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial r}\mathbf{e}_\theta = 0$$

en tanto que

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta \tag{A-10}$$

y

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta = -\mathbf{e}_r \tag{A-11}$$

Ahora, el operador $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ por lo cual:

$$\nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial_z}\right)$$

Después de hacer las operaciones indicadas, se obtiene lo siguiente:

$$\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial r^2}$$

$$\frac{\mathbf{e}_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \cdot \nabla = \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\mathbf{e}_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)$$

ó

$$\frac{\mathbf{e}_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \cdot \nabla = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

y

$$\mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Por lo tanto, el operador ∇^2 se transforma en:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{A-12}$$

ó

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{A-13}$$

APENDICE

B

SUMARIO DE OPERACIONES DIFERENCIALES VECTORIALES EN DIVERSOS SISTEMAS DE COORDENADAS

COORDENADAS CARTESIANAS

Sistema de coordenadas

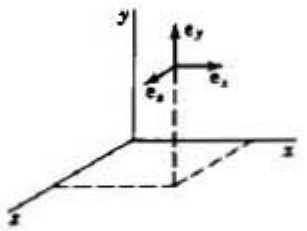


Figura B.1 Vectores unitarios en el punto (x, y, z).

Gradiente

$$\nabla P = \frac{\partial P}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial P}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial P}{\partial z}\mathbf{e}_z \tag{B-1}$$

Divergencia

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{B-2}$$

Rotacional

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{Bmatrix} \left(\dfrac{\partial v_z}{\partial y} - \dfrac{\partial v_y}{\partial z}\right)\mathbf{e}_x \\ \left(\dfrac{\partial v_x}{\partial z} - \dfrac{\partial v_z}{\partial x}\right)\mathbf{e}_y \\ \left(\dfrac{\partial v_y}{\partial x} - \dfrac{\partial v_x}{\partial y}\right)\mathbf{e}_z \end{Bmatrix} \tag{B-3}$$

Laplaciano de un escalar

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \tag{B-4}$$

COORDENADAS CILINDRICAS

Sistemas de coordenadas

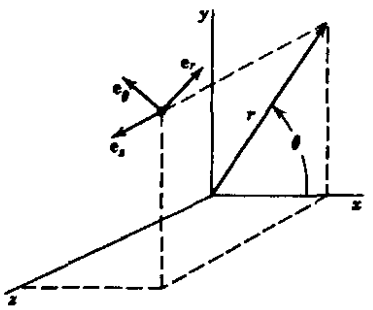


Figura B.2 Vectores unitarios en el punto (r, θ, z).

Gradiente

$$\nabla P = \frac{\partial P}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{\partial P}{\partial z}\mathbf{e}_z \tag{B-5}$$

Divergencia

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{B-6}$$

Rotacional

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{Bmatrix} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)\mathbf{e}_r \\ \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\mathbf{e}_\theta \\ \left\{\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]\right\}\mathbf{e}_z \end{Bmatrix} \tag{B-7}$$

Laplaciano de un escalar

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \tag{B-8}$$

COORDENADAS ESFERICAS

Sistemas de coordenadas

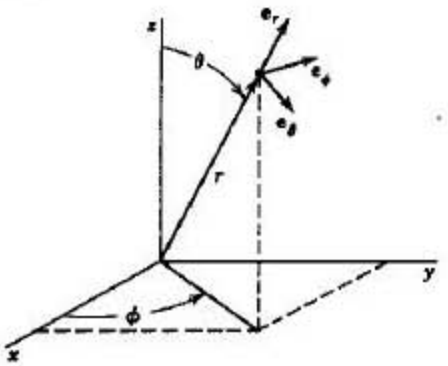


Figura B.3 Vectores unitarios en el punto (r, θ, ϕ).

Gradiente

$$\nabla P = \frac{\partial P}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial P}{\partial \phi}\mathbf{e}_\phi \tag{B-9}$$

Divergencia

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta \operatorname{sen}\theta) + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \tag{B-10}$$

Rotacional

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\left[\dfrac{\partial}{\partial \theta}(v_\phi \operatorname{sen}\theta) - \dfrac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right]\mathbf{e}_r \\ \left[\dfrac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\dfrac{\partial v_r}{\partial \phi} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r v_\phi)\right]\mathbf{e}_\theta \\ \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \dfrac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]\mathbf{e}_\phi \end{Bmatrix} \tag{B-11}$$

Laplaciano de un escalar

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} \tag{B-12}$$

APENDICE
C
SIMETRIA DEL TENSOR DE ESFUERZO

Se puede demostrar que el esfuerzo cortante $\tau_{i,j}$ es igual a $\tau_{j,i}$ por medio del siguiente argumento simple: Tomemos en consideración el elemento de

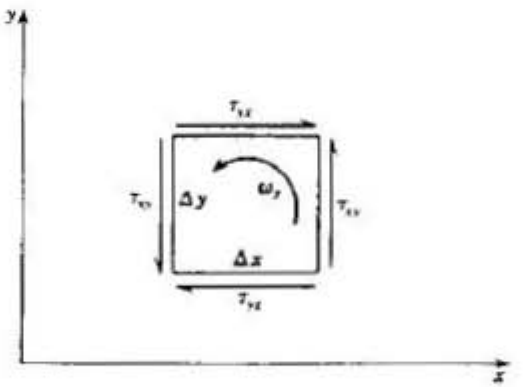


Figura C.1 Diagrama de cuerpo libre de un elemento.

fluido que aparece en la figura C.1 La suma de los momentos sobre el elemento, se relaciona con la aceleración angular por medio de:

$$\sum M = I\dot{\omega} \tag{C-1}$$

donde I es el momento de inercia másico del elemento. Si se sustituye en la ecuación (C-1), queda:

$$-(\tau_{y,x}\,\Delta x\,\Delta z)\,\Delta y + (\tau_{x,y}\,\Delta y\,\Delta z)\,\Delta x = \rho\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z\frac{(\Delta x^2+\Delta y^2)}{12}\dot{\omega}_z$$

donde se ha utilizado el momento de inercia de un prisma rectangular, para el elemento.

El volumen del elemento $\Delta x\ \Delta y\ \Delta z$ puede cancelarse para dar origen a:

$$\rho\left(\frac{\Delta x^2+\Delta y^2}{12}\right)\dot{\omega}_z = \tau_{x,y} - \tau_{y,x} \tag{C-2}$$

Ahora, al observar que la diferencia de esfuerzo cortante depende del tamaño del elemento. Cuando el elemento se reduce a un punto, Δx y Δy tienden a cero de manera independiente y, en el límite, se obtiene:

$$\tau_{x,y} = \tau_{y,x}$$

y como esto se puede hacer con cada eje:

$$\tau_{i,j} = \tau_{j,i}$$

Otra forma de ver la ecuación (C-2) es determinar la aceleración angular, ω_z, cuando el elemento se reduce a un punto. La aceleración angular en un punto debe ser finita, por lo cual, $\tau_{y,x}$ y $\tau_{x,y}$ deberán ser iguales.

APENDICE
D
LA CONTRIBUCION VISCOSA AL ESFUERZO NORMAL

El esfuerzo normal, σ, se puede dividir en dos partes: la contribución de la presión, $-P$ y una contribución viscosa, σ_v. La contribución viscosa al esfuerzo normal, se obtiene por analogía con la ley de Hooke correspondiente a un sólido elástico. En la ley de Hooke correspondiente al esfuerzo tridimensional, el esfuerzo normal, $\sigma_{x,x}$, en la dirección de x se relaciona con las deformaciones en las direcciones x, y, z, mediante la ecuación:*

$$\sigma_{x,x} = 2G\epsilon_x + \frac{2G\eta}{1-2\eta}(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) \tag{D-1}$$

donde G es el módulo cortante, η es la razón de Poisson y ϵ es la deformación axial. Cuando se estudió la relación de Newton de la viscosidad, se vio que la deformación cortante, en un sólido, es análoga a la rapidez de deformación cortante de un fluido. De acuerdo con esto, la deformación axial en un sólido, ϵ_x, es análoga a la rapidez de deformación axial en un fluido, σ_{vx}/σ_x.

Cuando se sustituyen las derivadas de la velocidad por las deformaciones en la ecuación (D-1) y se utiliza la viscosidad en lugar de módulo cortante, se obtiene:

$$(\sigma_{x,x})_{\text{viscoso}} = 2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda\nabla\cdot\mathbf{v} \tag{D-2}$$

Aquí se observa que la suma de las derivadas de la rapidez de deformación es igual a $\nabla.\mathbf{v}$ y al segundo coeficiente se le ha denominado λ y se le llama viscosidad global o segundo coeficiente de viscosidad.

*Una forma más común es:

$$\sigma_{x,x} = \frac{E}{(1+\eta)(1-2\eta)}[(1-\eta)\epsilon_x + \eta(\epsilon_y + \epsilon_z)]$$

El módulo cortante, G se ha reemplazado por su equivalente, $E/2(1+\eta)$.

El esfuerzo normal total en la dirección de x, se transforma en:

$$\sigma_{x,x} = -P + 2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda\nabla\cdot\mathbf{v} \tag{D-3}$$

Si las componentes correspondientes al esfuerzo normal en las direcciones y y z se suman, se obtiene:

$$\sigma_{x,x} + \sigma_{y,y} + \sigma_{z,z} = -3P + (2\mu + 3\lambda)\nabla\cdot\mathbf{v}$$

de manera que el esfuerzo normal promedio, $\bar{\sigma}$, está dado por la ecuación:

$$\bar{\sigma} = -P + \left(\frac{2\mu + 3\lambda}{3}\right)\nabla\cdot\mathbf{v}$$

Así, a menos que $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$, el esfuerzo promedio dependerá de las propiedades del flujo, P. Stokes supuso que $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$, y los experimentos han indicado que λ es del mismo orden de magnitud que μ, para el aire. Como $\nabla\cdot\mathbf{v} = 0$ en un flujo incompresible, el valor de λ no tiene importancia, excepto cuando se trata de fluidos compresibles.

Las expresiones resultantes, correspondientes al esfuerzo normal en un fluido newtoniano, son:

$$\sigma_{x,x} = -P + 2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x} - \tfrac{2}{3}\mu\nabla\cdot\mathbf{v} \tag{D-4}$$

$$\sigma_{y,y} = -P + 2\mu\frac{\partial v_y}{\partial y} - \tfrac{2}{3}\mu\nabla\cdot\mathbf{v} \tag{D-5}$$

$$\sigma_{z,z} = -P + 2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z} - \tfrac{2}{3}\mu\nabla\cdot\mathbf{v} \tag{D-6}$$

APENDICE

E

LAS ECUACIONES DE NAVIER STOKES CORRESPONDIENTES A ρ Y μ CONSTANTES EN COORDENADAS CARTESIANAS CILINDRICAS Y ESFERICAS

COORDENADAS CARTESIANAS

en la dirección de x

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)=-\frac{\partial P}{\partial x}+\rho g_x+\mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) \tag{E-1}$$

en la dirección de y

$$\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)=-\frac{\partial P}{\partial y}+\rho g_y+\mu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right) \tag{E-2}$$

en la dirección de z

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=-\frac{\partial P}{\partial z}+\rho g_z+\mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right) \tag{E-3}$$

COORDENADAS CILINDRICAS

en la dirección de r

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-\frac{v_\theta^2}{r}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)$$

$$=-\frac{\partial P}{\partial r}+\rho g_r+\mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right] \tag{E-4}$$

en la dirección de θ

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{v_r v_\theta}{r}+v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)$$
$$=-\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}+\rho g_\theta+\mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta)\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}\right] \quad \text{(E-5)}$$

en la dirección de z

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)$$
$$=-\frac{\partial P}{\partial z}+\rho g_z+\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right] \quad \text{(E-6)}$$

COORDENADAS ESFERICAS*

en la dirección de r

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}+\frac{v_\phi}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi}-\frac{v_\phi^2}{r}-\frac{v_\theta^2}{r}\right)$$
$$=-\frac{\partial P}{\partial r}+\rho g_r+\mu\left[\nabla^2 v_r-\frac{2}{r^2}v_r-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}-\frac{2}{r^2}v_\theta\cot\theta-\frac{2}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}\right] \quad \text{(E-7)}$$

en la dirección de θ

$$\rho\left[\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{v_\phi}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}+\frac{v_r v_\theta}{r}-\frac{v_\phi^2\cot\theta}{r}\right]$$
$$=-\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}+\rho g_\theta+\mu\left[\nabla^2 v_\theta+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-\frac{v_\theta}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}-\frac{2\cos\theta}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}\right] \quad \text{(E-8)}$$

en la dirección de ϕ

$$\rho\left(\frac{\partial v_\phi}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\phi}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta}+\frac{v_\phi}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}+\frac{v_\phi v_r}{r}+\frac{v_\theta v_\phi}{r}\cot\theta\right)$$
$$=-\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial P}{\partial \phi}+\rho g_\phi+\mu\left[\nabla^2 v_\phi-\frac{v_\phi}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}+\frac{2}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi}+\frac{2\cos\theta}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right] \quad \text{(E-9)}$$

*en las ecuaciones anteriores,

$$\nabla^2=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

APENDICE

F

TABLAS PARA LA SOLUCION DE PROBLEMAS DE TRANSFERENCIA EN ESTADO NO PERMANENTE

Tabla F.1 Símbolos correspondientes a las tablas para el estado no permanente.

	Símbolo del parámetro	Transferencia de masa molecular	Conducción de calor
Cambio incompleto, razón adimensional	Y	$\frac{c_{A_i} - c_A}{c_{A_i} - c_{A_0}}$	$\frac{T_\infty - T}{T_\infty - T_0}$
Tiempo relativo	X	$\frac{D_{AB}t}{x_1^2}$	$\frac{\alpha t}{x_1^2}$
Posición relativa	n	$\frac{x}{x_1}$	$\frac{x}{x_1}$
Resistencia relativa	m	$\frac{D_{AB}}{k_c x_1}$	$\frac{k}{hx_1}$

T = temperatura
c_A = concentración de la componente A
x = distancia del centro a cualquier punto
t = tiempo
k = conductividad térmica
h, k_c = coeficientes de transferencia convectiva
α = difusividad térmica
D_{AB} = difusividad de la masa

subíndices
0 = condición inicial en el tiempo $t = 0$
1 = frontera
A = componente A
∞ = condición de referencia correspondiente a la temperatura

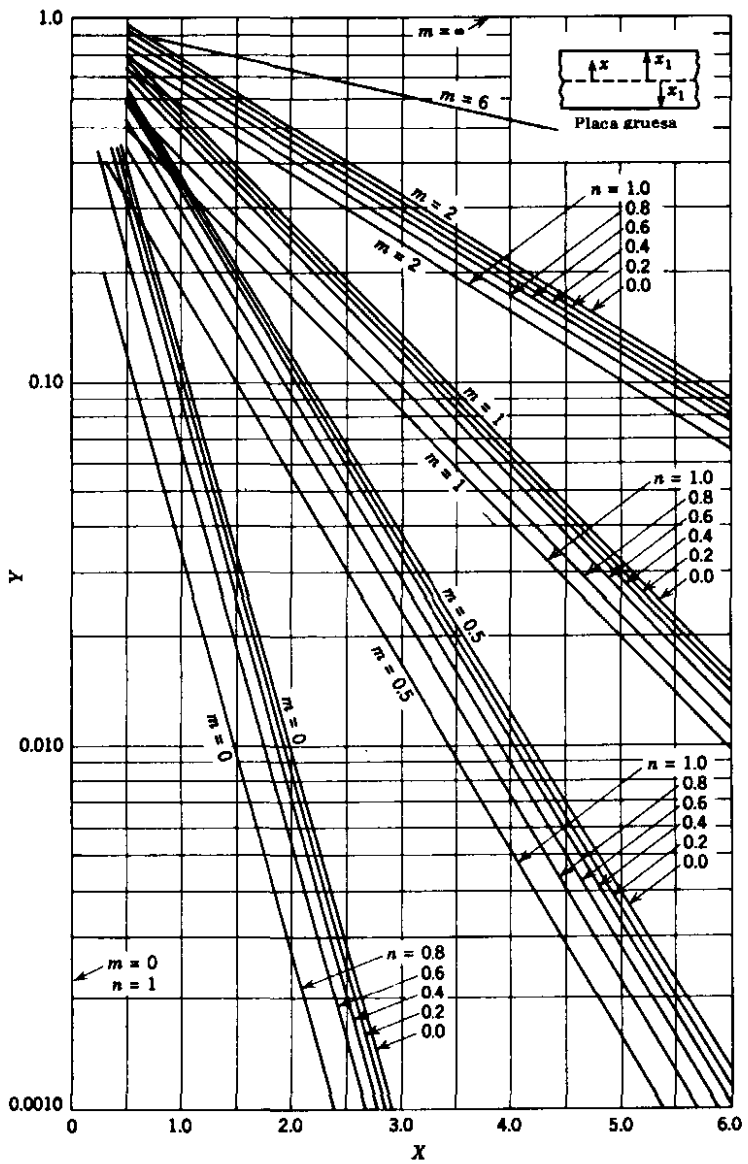


Figura F.1 Transferencia en estado no permanente efectuada en una placa plana grande.

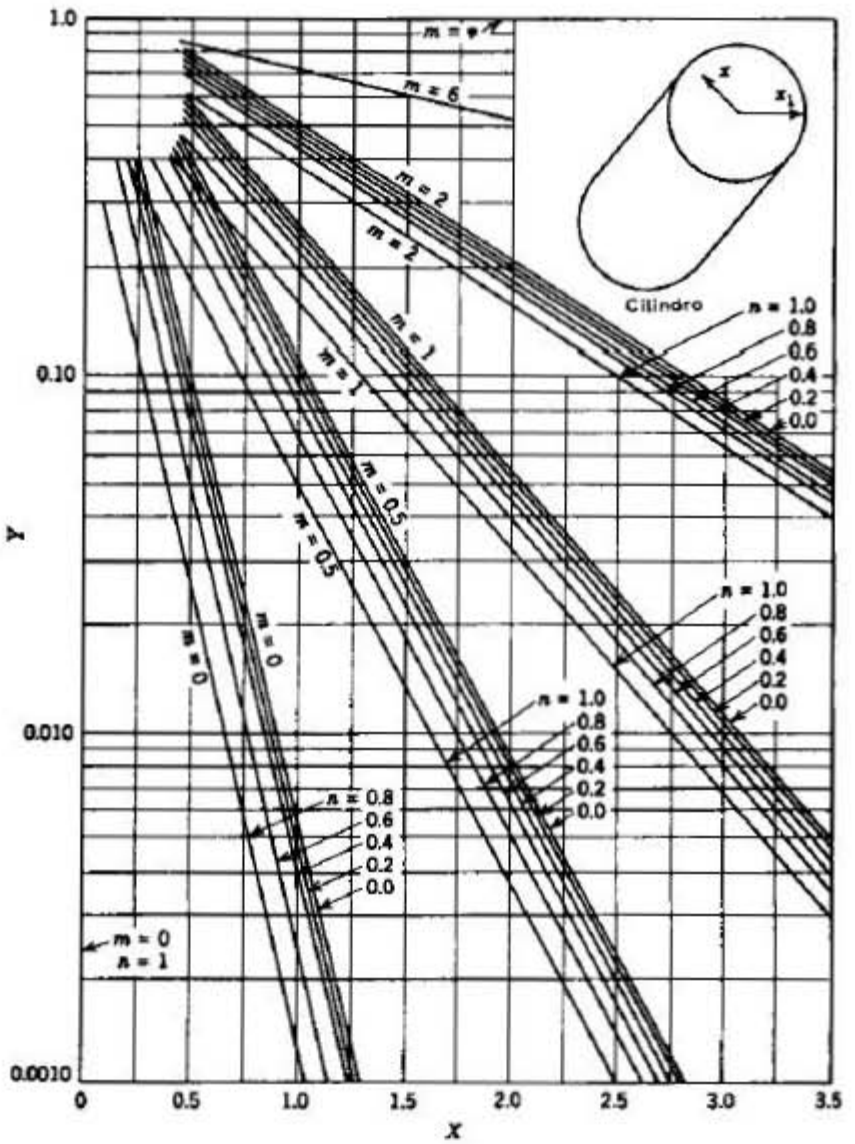


Figura F.2 Transferencia en estado no permanente en un cilindro largo.

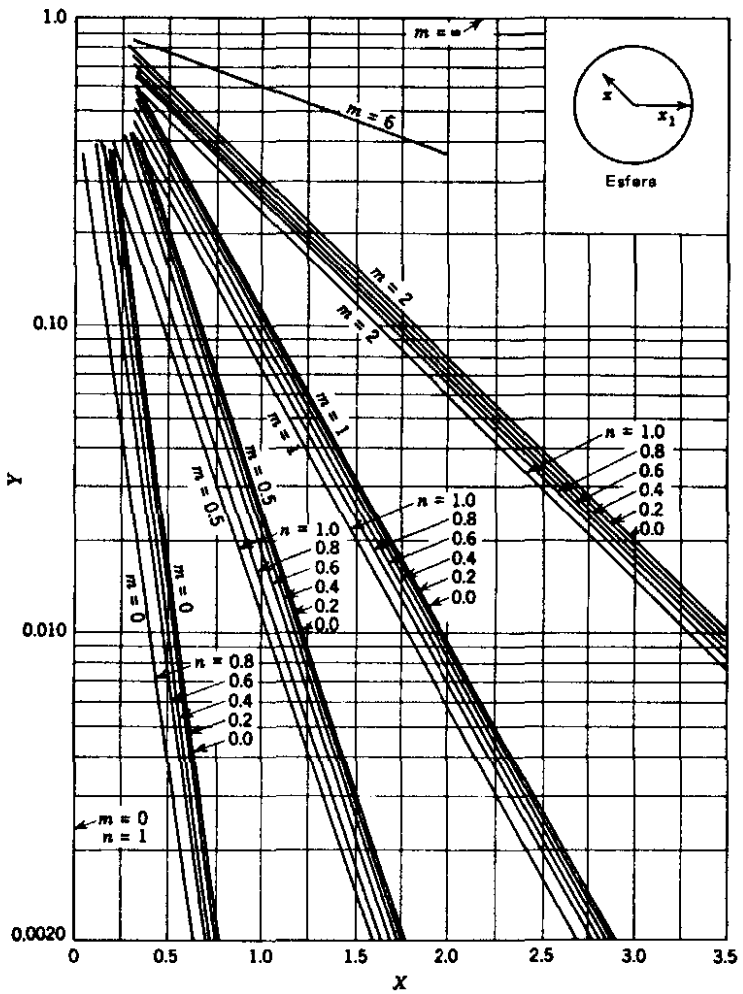


Figura F.3 Transferencia en estado no permanente en una esfera.

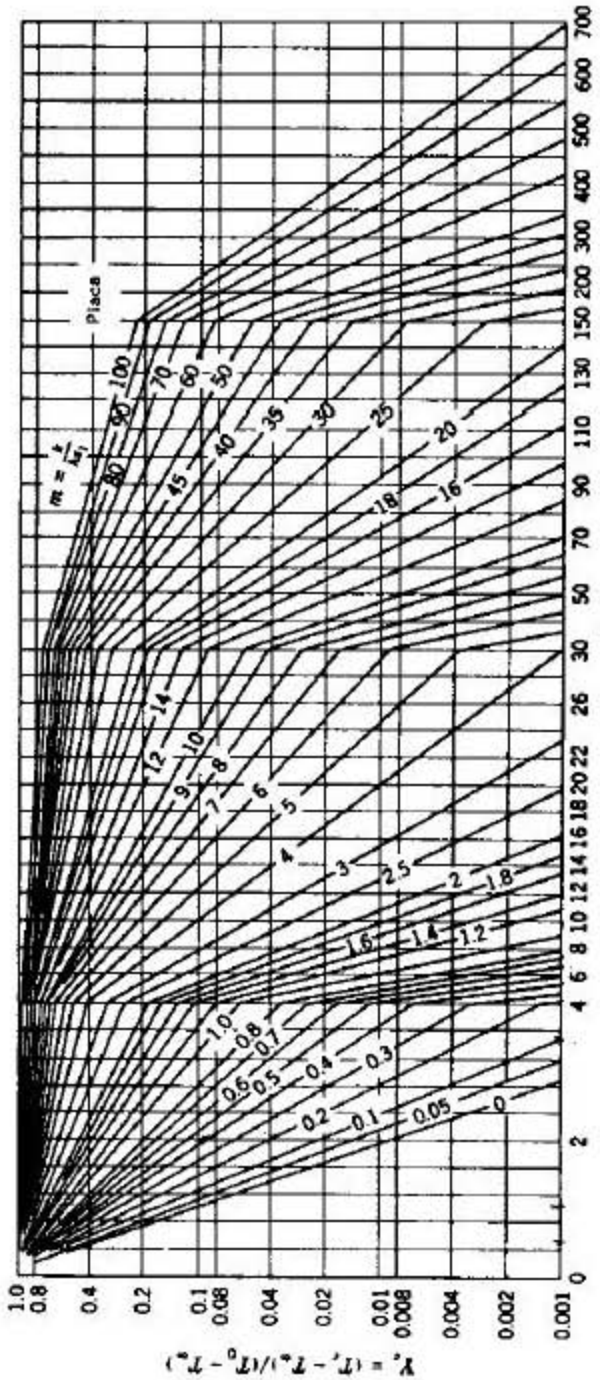


Figura F.4 Historia de la temperatura central de una placa infinita.

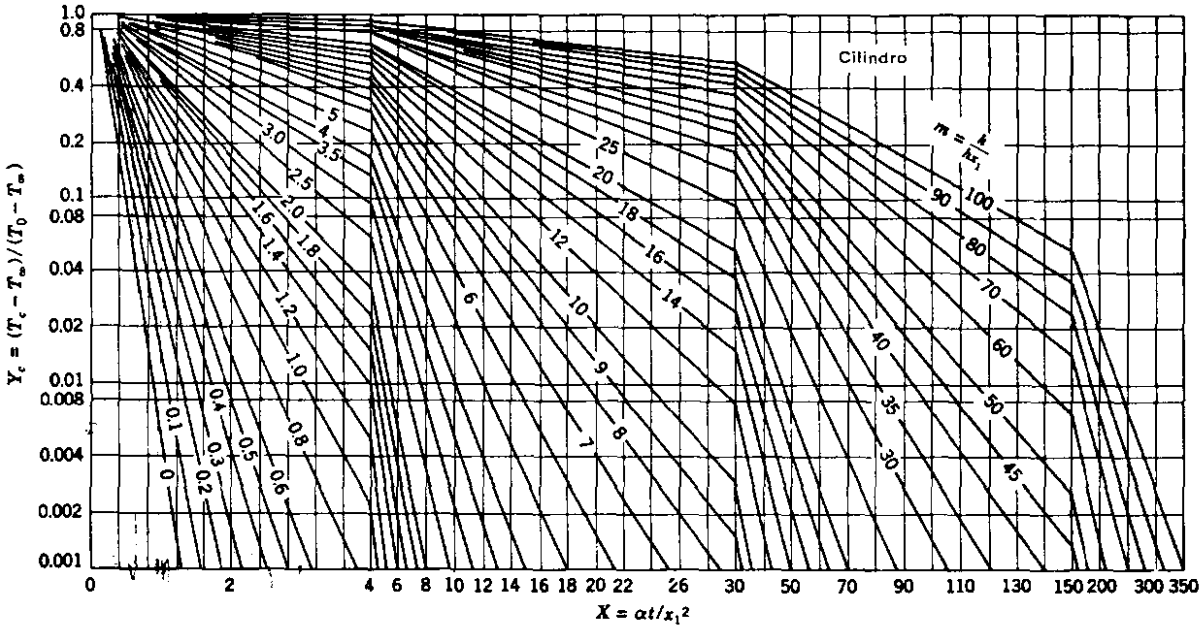


Figura F.5 Historia de la temperatura central en un cilindro infinito.

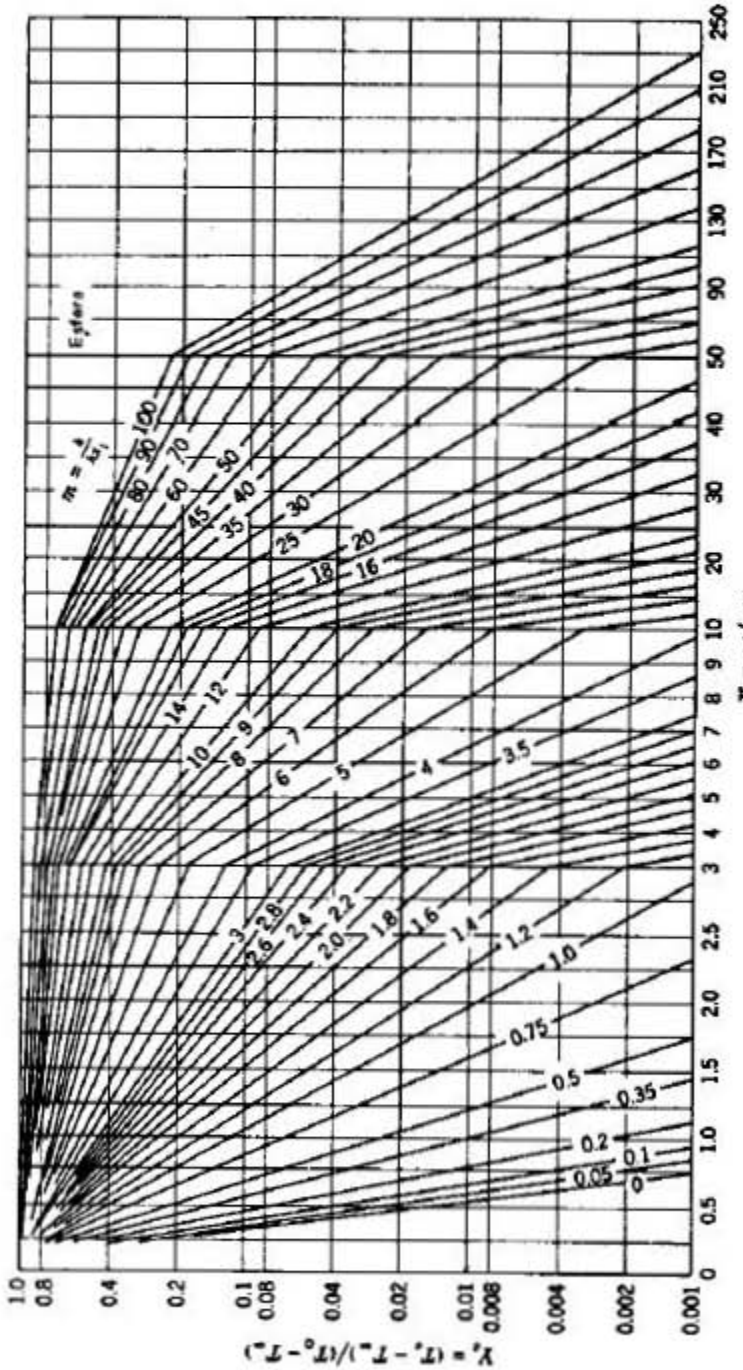


Figura F.6 Historia de la temperatura central de una esfera.

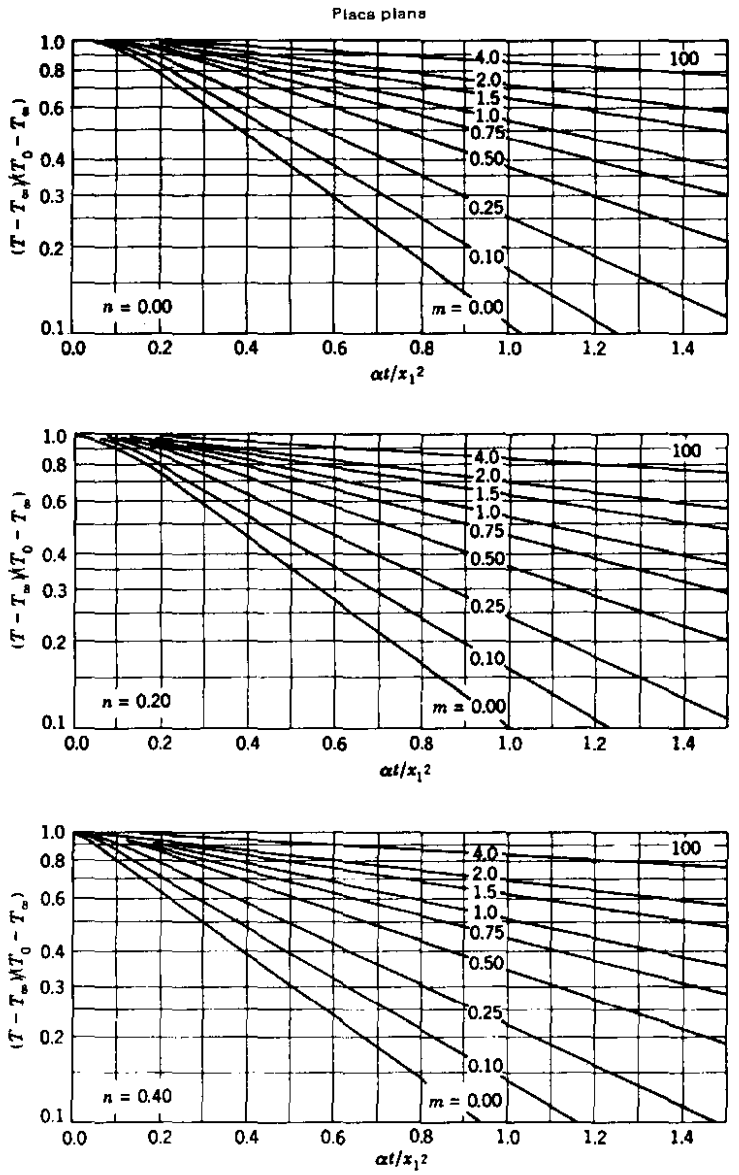
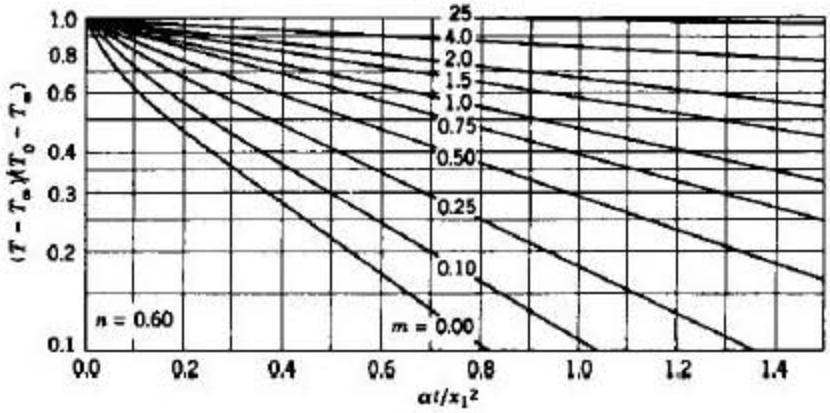
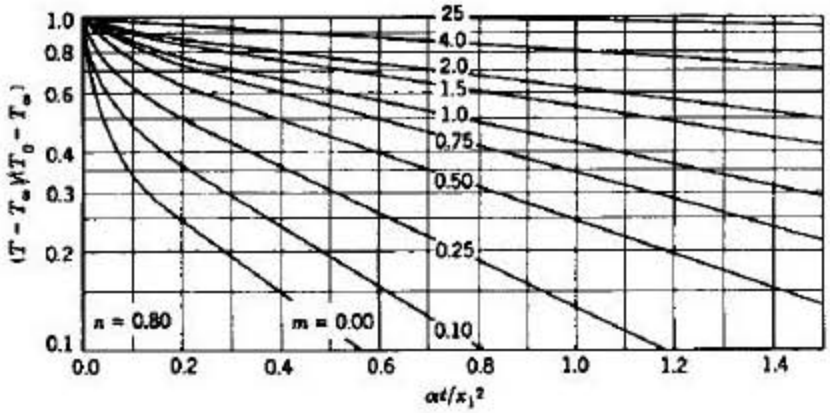
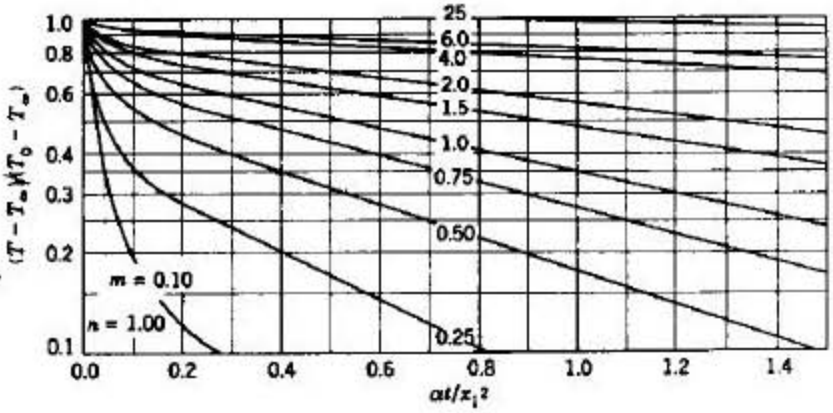


Figura F.7 Gráficas para la solución de problemas de transferencia en estado no permanente: placa plana.

Placa plana


$(T - T_\infty)/(T_0 - T_\infty)$
$\alpha t/x_1^2$
n = 0.60
m = 0.00
25
4.0
2.0
1.5
1.0
0.75
0.50
0.25
0.10


$(T - T_\infty)/(T_0 - T_\infty)$
$\alpha t/x_1^2$
n = 0.80
m = 0.00
25
4.0
2.0
1.5
1.0
0.75
0.50
0.25
0.10


$(T - T_\infty)/(T_0 - T_\infty)$
$\alpha t/x_1^2$
m = 0.10
n = 1.00
25
6.0
4.0
2.0
1.5
1.0
0.75
0.50
0.25

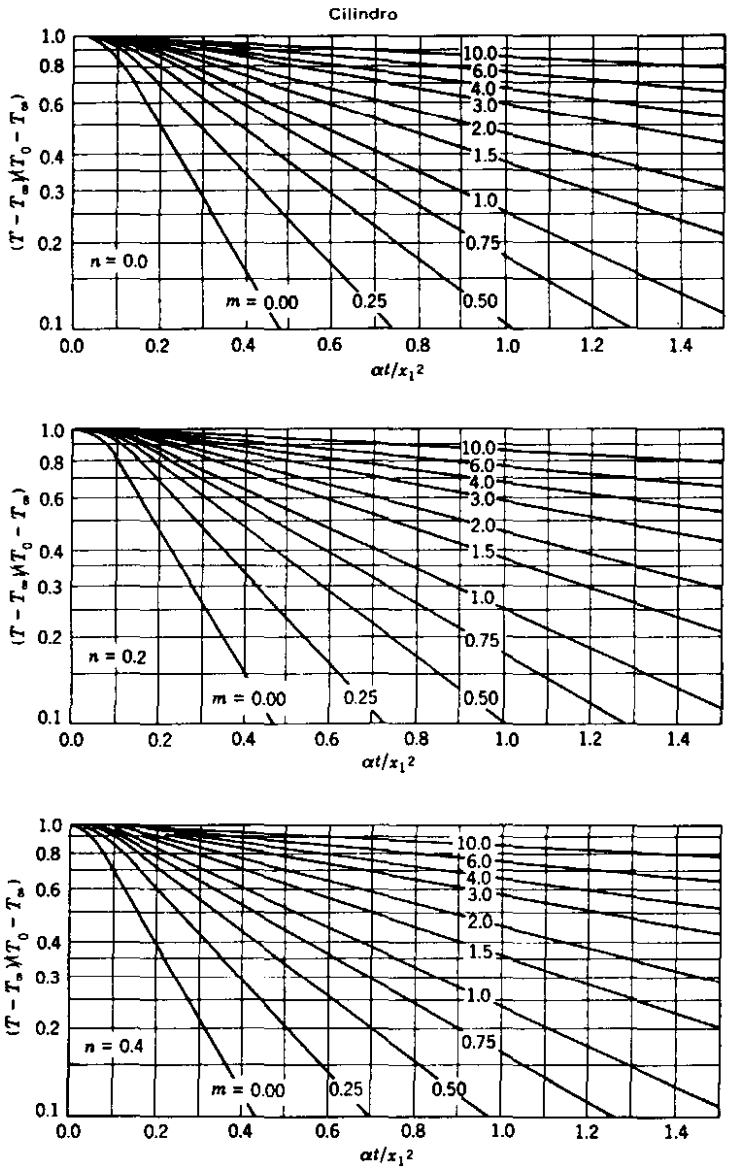
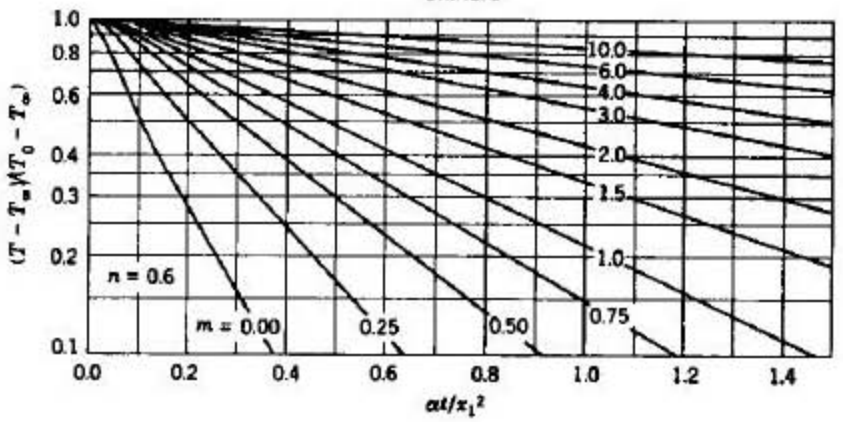
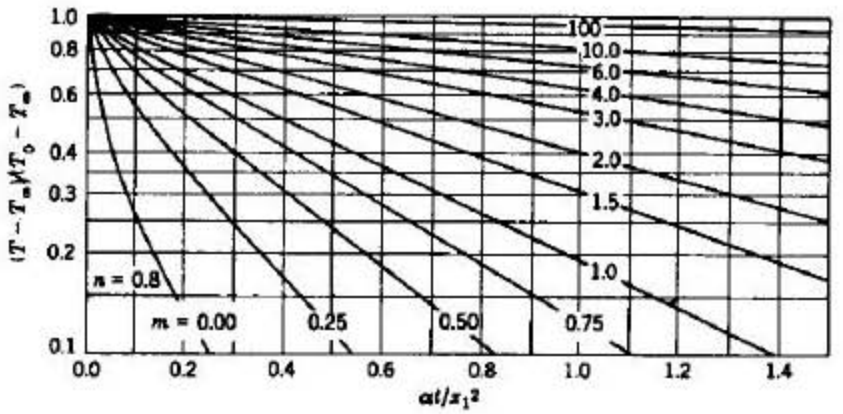
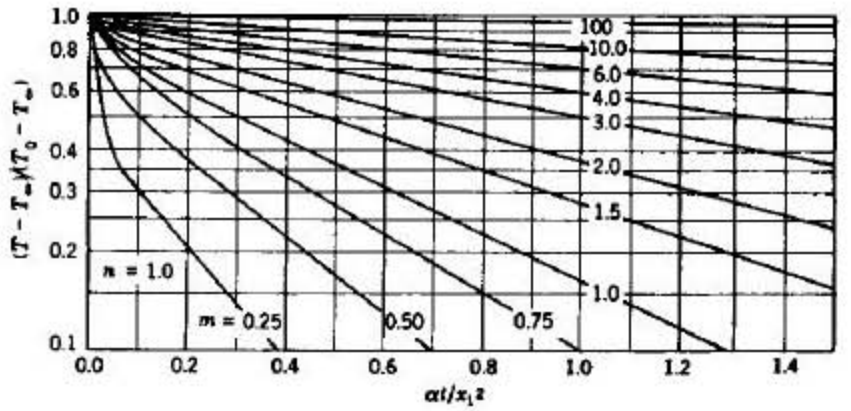


Figura F.8 Gráficas para la solución de problemas de transferencia en estado no permanente: cilindro.

Cilindro


1.0
0.8
0.6
0.4
0.3
0.2
0.1
$(T - T_\infty)/(T_0 - T_\infty)$
10.0
6.0
4.0
3.0
2.0
1.5
1.0
n = 0.6
m = 0.00
0.25
0.50
0.75
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
$\alpha t/r_1^2$


1.0
0.8
0.6
0.4
0.3
0.2
0.1
$(T - T_\infty)/(T_0 - T_\infty)$
100
10.0
6.0
4.0
3.0
2.0
1.5
1.0
n = 0.8
m = 0.00
0.25
0.50
0.75
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
$\alpha t/r_1^2$


1.0
0.8
0.6
0.4
0.3
0.2
0.1
$(T - T_\infty)/(T_0 - T_\infty)$
100
10.0
6.0
4.0
3.0
2.0
1.5
1.0
n = 1.0
m = 0.25
0.50
0.75
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
$\alpha t/r_1^2$

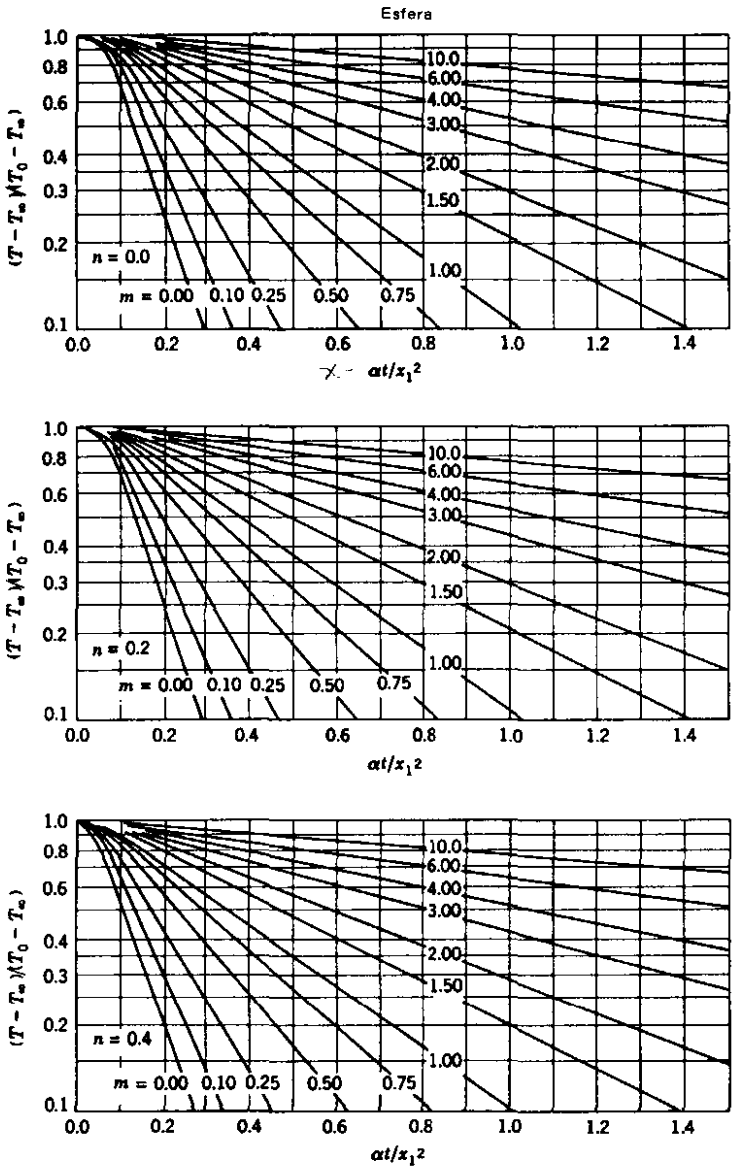
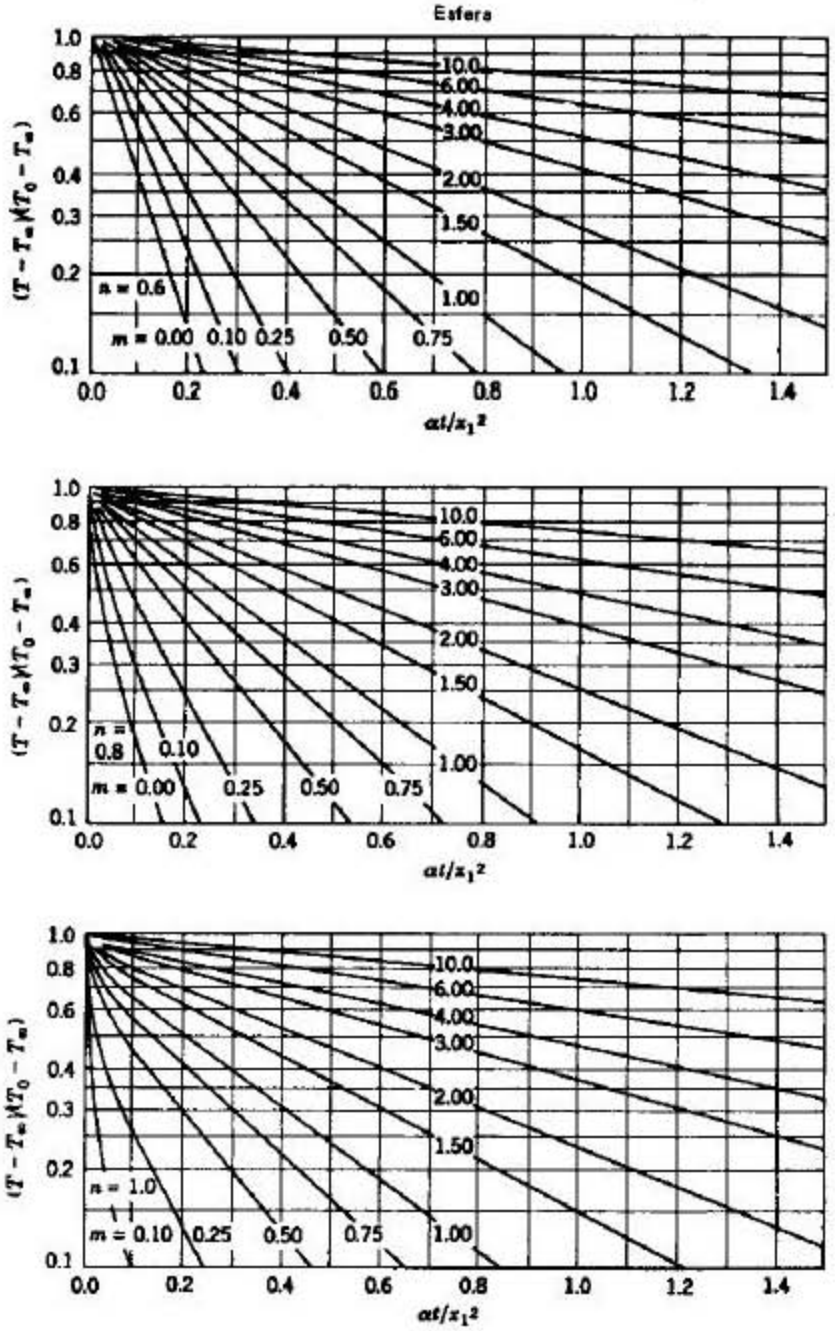


Figura F.9 Gráficas para la solución de problemas de transferencia en estado no permanente: esfera.


Esfera
$(T - T_\infty)/(T_0 - T_\infty)$
$\alpha t/x_1^2$
n = 0.6
m = 0.00 0.10 0.25 0.50 0.75
n = 0.8
m = 0.00 0.10 0.25 0.50 0.75
n = 1.0
m = 0.10 0.25 0.50 0.75 1.00
10.0
6.00
4.00
3.00
2.00
1.50
1.00
0.0 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0 1.2 1.4
0.1 0.2 0.3 0.4 0.6 0.8 1.0

APENDICE
G
PROPIEDADES DE LA ATMOSFERA ESTANDAR

Tabla 6.1 Unidades del sistema inglés

h (ft)	T (°F)	a (fps)	P lb/pies^2	ρ (slug/pies^3)	$\mu \times 10^7$ (slug/pies seg)
0	59.00	1117	2116.2	0.002378	3.719
1,000	57.44	1113	2040.9	0.002310	3.699
2,000	51.87	1109	1967.7	0.002242	3.679
3,000	48.31	1105	1896.7	0.002177	3.659
4,000	44.74	1102	1827.7	0.002112	3.639
5,000	41.18	1098	1760.8	0.002049	3.618
6,000	37.62	1094	1696.0	0.001988	3.598
7,000	34.05	1090	1633.0	0.001928	3.577
8,000	30.49	1086	1571.9	0.001869	3.557
9,000	26.92	1082	1512.8	0.001812	3.536
10,000	23.36	1078	1455.4	0.001756	3.515
11,000	19.80	1074	1399.8	0.001702	3.495
12,000	16.23	1070	1345.9	0.001649	3.474
13,000	12.67	1066	1293.7	0.001597	3.453
14,000	9.10	1062	1243.2	0.001546	3.432
15,000	5.54	1058	1194.3	0.001497	3.411
16,000	1.98	1054	1147.0	0.001448	3.390
17,000	−1.59	1050	1101.1	0.001401	3.369
18,000	−5.15	1046	1056.9	0.001355	3.347
19,000	−8.72	1041	1014.0	0.001311	3.326
20,000	−12.28	1037	972.6	0.001267	3.305
21,000	−15.84	1033	932.5	0.001225	3.283
22,000	−19.41	1029	893.8	0.001183	3.262
23,000	−22.97	1025	856.4	0.001143	3.240

*Datos tomados de NACA TN 1428.

h (ft)	T (°F)	a (fps)	P (lb/ pies^2)	ρ (slug/pies^3)	$\mu \times 10^7$ (slug/pies seg)
24,000	−26.54	1021	820.3	0.001104	3.218
25,000	−30.10	1017	785.3	0.001066	3.196
26,000	−33.66	1012	751.7	0.001029	3.174
27,000	−37.23	1008	719.2	0.000993	3.153
28,000	−40.79	1004	687.9	0.000957	3.130
29,000	−44.36	999	657.6	0.000923	3.108
30,000	−47.92	995	628.5	0.000890	3.086
31,000	−51.48	991	600.4	0.000858	3.064
32,000	−55.05	987	573.3	0.000826	3.041
33,000	−58.61	982	547.3	0.000796	3.019
34,000	−62.18	978	522.2	0.000766	2.997
35,000	−65.74	973	498.0	0.000737	2.974
40,000	−67.6	971	391.8	0.0005857	2.961
45,000	−67.6	971	308.0	0.0004605	2.961
50,000	−67.6	971	242.2	0.0003622	2.961
60,000	−67.6	971	150.9	0.0002240	2.961
70,000	−67.6	971	93.5	0.0001389	2.961
80,000	−67.6	971	58.0	0.0000861	2.961
90,000	−67.6	971	36.0	0.0000535	2.961
100,000	−67.6	971	22.4	0.0000331	2.961
150,000	113.5	1174	3.003	0.00000305	4.032
200,000	159.4	1220	0.6645	0.00000062	4.277
250,000	−8.2	1042	0.1139	0.00000015	3.333

Tabla 6.2 Unidades SI-Propiedades de la atmósfera estandar.

h (m)	T (K)	a (m/s)	P (Pa)	ρ (kg/m^3)	$\mu \times 10^5$ (Pa · s)
0	288.2	340.3	1.0133×10^5	1.225	1.789
500	284.9	338.4	0.95461	1.167	1.774
1 000	281.7	336.4	0.89876	1.111	1.758
1 500	278.4	334.5	0.84560	1.058	1.742
2 000	275.2	332.5	0.79501	1.007	1.726
2 500	271.9	330.6	0.74692	0.9570	1.710
3 000	268.7	328.6	0.70121	0.9093	1.694
3 500	265.4	326.6	0.65780	0.8634	1.678
4 000	262.2	324.6	0.61660	0.8194	1.661
4 500	258.9	322.6	0.57753	0.7770	1.645
5 000	255.7	320.5	0.54048	0.7364	1.628
5 500	252.4	318.5	0.50539	0.6975	1.612
6 000	249.2	316.5	0.47218	0.6601	1.595
6 500	245.9	314.4	0.44075	0.6243	1.578
7 000	242.7	312.3	0.41105	0.5900	1.561
7 500	239.5	310.2	0.38300	0.5572	1.544
8 000	236.2	308.1	0.35652	0.5258	1.527

h (m)	T (K)	a (m/s)	P (Pa)	ρ (kg/m^3)	$\mu \times 10^5$ (Pa · s)
8 500	233.0	306.0	0.33154	0.4958	1.510
9 000	229.7	303.8	0.30801	0.4671	1.493
9 500	226.5	301.7	0.28585	0.4397	1.475
10 000	223.3	299.5	0.26500	0.4135	1.458
11 000	216.8	295.2	0.22700	0.3648	1.422
12 000	216.7	295.1	0.19399	0.3119	1.422
13 000	216.7	295.1	0.16580	0.2666	1.422
14 000	216.7	295.1	0.14170	0.2279	1.422
15 000	216.7	295.1	0.12112	0.1948	1.422
16 000	216.7	295.1	0.10353	0.1665	1.422
17 000	216.7	295.1	8.8497×10^{-1}	0.1423	1.422
18 000	216.7	295.1	7.5652	0.1217	1.422
19 000	216.7	295.1	6.4675	0.1040	1.422
20 000	216.7	295.1	5.5293	0.08891	1.422
25 000	221.5	298.4	2.5492	0.04008	1.448
30 000	226.5	301.7	1.1970	0.01841	1.475
35 000	236.5	308.3	0.57459	0.008463	1.529
40 000	250.4	317.2	0.28714	0.003996	1.601
45 000	264.2	325.8	0.14910	0.001966	1.671
50 000	270.7	329.8	7.9779×10^{-2}	0.001027	1.704
55 000	265.6	326.7	4.27516	0.0005608	1.678
60 000	255.8	320.6	2.2461	0.0003059	1.629
65 000	239.3	310.1	1.1446	0.0001667	1.543
70 000	219.7	297.1	5.5205×10^{-3}	0.00008754	1.438
75 000	200.2	283.6	2.4904	0.00004335	1.329
80 000	180.7	269.4	1.0366	0.00001999	1.216

APENDICE

H

PROPIEDADES FISICAS DE LOS SOLIDOS

Material	ρ (lb_m/ft^3) (68°F)	ρ (kg/m^3) (293 K)	c_p (Btu/lb_m °F) (68°F)	c_p (J/kg · K) $\times 10^{-2}$ (293 K)	α (ft^2/hr) (68°F)	α (m^2/seg) $\times 10^5$ (293 K)	k (Btu/hr ft °F) °F (68)	(212)	(572)	k (W/m · K) K (293)	(373)	(573)
Metales												
Aluminio	168.6	2 701.1	0.224	9.383	3.55	9.16	132	133	133	229	229	230
Cobre	555	8 890	0.092	3.854	3.98	10.27	223	219	213	386	379	369
Oro	1 206	19 320	0.031	1.299	4.52	11.66	169	170	172	293	294	298
Hierro	492	7 880	0.122	5.110	0.83	2.14	42.3	39	31.6	73.2	68	54
Plomo	708	11 300	0.030	1.257	0.80	2.06	20.3	19.3	17.2	35.1	33.4	29.8
Magnesio	109	1 750	0.248	10.39	3.68	9.50	99.5	96.8	91.4	172	168	158
Níquel	556	8 910	0.111	4.560	0.87	2.24	53.7	47.7	36.9	93.0	82.6	63.9
Platino	1 340	21 500	0.032	1.340	0.09	0.23	40.5	41.9	43.5	70.1	72.5	75.3
Plata	656	10 500	0.057	2.388	6.42	16.57	240	237	209	415	410	362
Estaño	450	7 210	0.051	2.136	1.57	4.05	36	34	—	62	59	—
Tungsteno	1 206	19 320	0.032	1.340	2.44	6.30	94	87	77	160	150	130
Uranio	1 167	18 700	0.027	1.131	0.53	1.37	16.9	17.2	19.6	29.3	29.8	33.9
Zinc	446	7 150	0.094	3.937	1.55	4.00	65	63	58	110	110	100
Aleaciones												
Aluminio 2024	173	2 770	0.230	9.634	1.76	4.54	70.2			122		
Bronce (70% Cu, 30% Ni)	532	8 520	0.091	3.812	1.27	3.28	61.8	73.9	85.3	107	128	148
Constantán (60% Cu, 40% Ni)	557	8 920	0.098	4.105	0.24	0.62	13.1	15.4		22.7	26.7	

Hierro fundido	455	7 920	0.100	4.189	0.65	1.68	29.6	26.8		51.2	46.4	
Nicromo V	530	8 490	0.106	4.440	0.12	0.31	7.06	7.99	9.94	12.2	13.8	17.2
Acero inoxidable	488	7 820	0.110	4.608	0.17	0.44	9.4	10.0	13	16	17.3	23
Hierro dulce (1% C)	488	7 820	0.113	4.733	0.45	1.16	24.8	24.8	22.9	42.9	42.9	39.0
No metales												
Asbesto	36	580	0.25	10.5			0.092	0.11	0.125	0.159	0.190	0.21
Ladrillo (adobe)	144	2 310	0.22	9.22				0.65			1.13	
Ladrillo (de construcción)	106	1 670	0.20	8.38			0.38			0.66		
Ladrillo (de cromado)	188	3 010	0.20	8.38				0.67			1.16	
Concreto	144	2 310	0.21	8.80			0.70			1.21		
Lámina de corcho	10	160	0.4	17			0.025			0.043		
Tierra diatomácea pulverizada	14	220	0.2	8.4			0.03			0.05		
Vidrio (de ventana)	170	2 720	0.2	8.4			0.45			0.78		
Vidrio (Pyrex)	140	2 240	0.2	8.4			0.63	0.67	0.84	1.09	1.16	1.45
Ladrillo de caolín	19	300							0.052			0.09
85% de magnesio	17	270					0.038	0.041		0.066	0.071	
Tierra negra arenosa 4% H_2O	104	1 670	0.4	17			0.54			0.94		
Tierra negra arenosa 10% H_2O	121	1 940					1.08			1.87		
Asbesto	10	160	0.2	8.4			0.023	0.033		0.040	0.057	
Madera, roble, trepa	51	820	0.57	23.9			0.12			0.21		
Madera, roble, trepa	51	820	0.57	23.9			0.23			0.40		

APENDICE

I

PROPIEDADES FISICAS DE LOS GASES Y LIQUIDOS*

*Todas las propiedades de los gases corresponden a la presión atmosférica.

Gases

T (°F)	ρ (lb_m/ft^3)	c_p (Btu/lb_m°F)	$\mu \times 10^5$ (lb_m/ft seg)	$\nu \times 10^3$ (ft^2/ seg)	k (Btu/hr ft°F)	α (ft^2/hr)	Pr	$\beta \times 10^3$ (1/°F)	$g\beta\rho^2/\mu^2$ (1/°F · ft^3)
				Aire					
0	0.0862	0.240	1.09	0.126	0.0132	0.639	0.721	2.18	4.39×10^6
30	0.0810	0.240	1.15	0.142	0.0139	0.714	0.716	2.04	3.28
60	0.0764	0.240	1.21	0.159	0.0146	0.798	0.711	1.92	2.48
80	0.0735	0.240	1.24	0.169	0.0152	0.855	0.708	1.85	2.09
100	0.0710	0.240	1.28	0.181	0.0156	0.919	0.703	1.79	1.76
150	0.0651	0.241	1.36	0.209	0.0167	1.06	0.698	1.64	1.22
200	0.0602	0.241	1.45	0.241	0.0179	1.24	0.694	1.52	0.840
250	0.0559	0.242	1.53	0.274	0.0191	1.42	0.690	1.41	0.607
300	0.0523	0.243	1.60	0.306	0.0203	1.60	0.686	1.32	0.454
400	0.0462	0.245	1.74	0.377	0.0225	2.00	0.681	1.16	0.264
500	0.0413	0.247	1.87	0.453	0.0246	2.41	0.680	1.04	0.163
600	0.0374	0.251	2.00	0.535	0.0270	2.88	0.680	0.944	79.4×10^3
800	0.0315	0.257	2.24	0.711	0.0303	3.75	0.684	0.794	50.6
1000	0.0272	0.263	2.46	0.906	0.0337	4.72	0.689	0.685	27.0
1500	0.0203	0.277	2.92	1.44	0.0408	7.27	0.705	0.510	7.96

T (K)	ρ (kg/m^3)	$c_p \times 10^{-3}$ (J/kg · K)	$\mu \times 10^5$ (Pa · seg)	$\nu \times 10^5$ (m^2/seg)	$k \times 10^2$ (W/m · K)	$\alpha \times 10^5$ (m^2/seg)	Pr	$g\beta\rho^2/\mu^2$ (1/K · m^3)
				Aire				
250	1.4133	1.0054	1.5991	1.1315	2.2269	1.5672	0.722	2.5768×10^{11}
260	1.3587	1.0054	1.6503	1.2146	2.3080	1.6896	0.719	1.4292
280	1.2614	1.0057	1.7503	1.3876	2.4671	1.9448	0.713	1.0085
300	1.1769	1.0063	1.8464	1.5689	2.6240	2.2156	0.708	0.7371
320	1.1032	1.0073	1.9391	1.7577	2.7785	2.5003	0.703	0.5523
340	1.0382	1.0085	2.0300	1.9553	2.9282	2.7967	0.699	0.4168
360	0.9805	1.0100	2.1175	2.1596	3.0779	3.1080	0.695	0.3238
400	0.8822	1.0142	2.2857	2.5909	3.3651	3.7610	0.689	0.2031
440	0.8021	1.0197	2.4453	3.0486	3.6427	4.4537	0.684	0.1330
480	0.7351	1.0263	2.5963	3.5319	3.9107	5.1836	0.681	9.0410×10^9
520	0.6786	1.0339	2.7422	4.0410	4.1690	5.9421	0.680	6.4201
580	0.6084	1.0468	2.9515	4.8512	4.5407	7.1297	0.680	3.9962
700	0.5040	1.0751	3.3325	6.6121	5.2360	9.6632	0.684	1.7833
800	0.4411	1.0988	3.6242	8.2163	5.7743	11.9136	0.689	1.0024
1000	0.3529	1.1421	4.1527	11.1767	6.7544	16.7583	0.702	0.4462

T (°F)	ρ (lb_m/ft^3)	c_p (Btu/lb_m °F)	$\mu \times 10^5$ (lb_m/ft seg)	$\nu \times 10^3$ (ft^2/seg)	k (Btu/hr ft °F)	α (ft^2/hr)	Pr	$\beta \times 10^3$ (1/°F)	$g\beta\rho^2/\mu^2$ (1/°F · ft^3)
				Vapor					
212	0.0372	0.493	0.870	0.234	0.0145	0.794	1.06	1.49	0.873×10^6
250	0.0350	0.483	0.890	0.254	0.0155	0.920	0.994	1.41	0.698
300	0.0327	0.476	0.960	0.294	0.0171	1.10	0.963	1.32	0.493
400	0.0289	0.472	1.09	0.377	0.0200	1.47	0.924	1.16	0.262
500	0.0259	0.477	1.23	0.474	0.0228	1.85	0.922	1.04	0.148
600	0.0234	0.483	1.37	0.585	0.0258	2.29	0.920	0.944	88.9×10^3
800	0.0197	0.498	1.63	0.828	0.0321	3.27	0.912	0.794	37.8
1000	0.0170	0.517	1.90	1.12	0.0390	4.44	0.911	0.685	17.2
1500	0.0126	0.564	2.57	2.05	0.0580	8.17	0.906	0.510	3.97

T (K)	ρ (kg/m^3)	$c_p \times 10^{-3}$ (J/kg · K)	$\mu \times 10^5$ (Pa · seg)	$\nu \times 10^5$ (m^2/seg)	$k \times 10^2$ (W/m · K)	$\alpha \times 10^5$ (m^2/seg)	Pr	$g\beta\rho^2/\mu^2$ (1/K · m^3)
				Vapor				
380	0.5860	2.0592	12.70	2.1672	2.4520	2.0320	1.067	3.0672×10^{10}
400	0.5549	2.0098	13.42	2.4185	2.6010	2.3322	1.037	2.3306
450	0.4911	1.9771	15.23	3.1012	2.9877	3.0771	1.008	1.2532
500	0.4410	1.9817	17.03	3.8617	3.3903	3.8794	0.995	7.2997×10^9
550	0.4004	2.0006	18.84	4.7053	3.8008	4.7448	0.992	4.4827×10^9
600	0.3667	2.0264	20.64	5.6286	4.2161	5.6738	0.992	2.8634
650	0.3383	2.0555	22.45	6.6361	4.6361	6.6670	0.995	1.8973
700	0.3140	2.0869	24.25	7.7229	5.0593	7.7207	1.000	1.2651
750	0.2930	2.1192	26.06	8.8942	5.4841	8.8321	1.007	0.9174
800	0.2746	2.1529	27.86	10.1457	5.9089	9.9950	1.015	0.6574

T (°F)	ρ (lb_m/ft^3)	c_p (Btu/lb_m °F)	$\mu \times 10^5$ ($lb/_m ft\ seg$)	$\nu \times 10^3$ (ft^2/seg)	k (Btu/hr ft °F)	α (ft^2/hr)	Pr	$\beta \times 10^3$ (1/°F)	$g\beta\rho^2/\mu^2$ ($1/°F \cdot ft^3$)
				Nitrógeno					
0	0.0837	0.249	1.06	0.127	0.0132	0.633	0.719	2.18	4.38×10^6
30	0.0786	0.249	1.12	0.142	0.0139	0.710	0.719	2.04	3.29
60	0.0740	0.249	1.17	0.158	0.0146	0.800	0.716	1.92	2.51
80	0.0711	0.249	1.20	0.169	0.0151	0.853	0.712	1.85	2.10
100	0.0685	0.249	1.23	0.180	0.0154	0.915	0.708	1.79	1.79
150	0.0630	0.249	1.32	0.209	0.0168	1.07	0.702	1.64	1.22
200	0.0580	0.249	1.39	0.240	0.0174	1.25	0.690	1.52	0.854
250	0.0540	0.249	1.47	0.271	0.0192	1.42	0.687	1.41	0.616
300	0.0502	0.250	1.53	0.305	0.0202	1.62	0.685	1.32	0.457
400	0.0443	0.250	1.67	0.377	0.0212	2.02	0.684	1.16	0.263
500	0.0397	0.253	1.80	0.453	0.0244	2.43	0.683	1.04	0.163
600	0.0363	0.256	1.93	0.532	0.0252	2.81	0.686	0.944	0.108
800	0.0304	0.262	2.16	0.710	0.0291	3.71	0.691	0.794	0.0507
1000	0.0263	0.269	2.37	0.901	0.0336	4.64	0.700	0.685	0.0272
1500	0.0195	0.283	2.82	1.45	0.0423	7.14	0.732	0.510	0.00785

T (K)	ρ (kg/m^3)	$c_p \times 10^{-3}$ (J/kg · K)	$\mu \times 10^5$ (Pa · seg)	$\nu \times 10^5$ (m^2/seg)	$k \times 10^2$ (W/m · K)	$\alpha \times 10^5$ (m^2/seg)	Pr	$g\beta\rho^2/\mu^2$ (1/K · m^3)
				Nitrógeno				
250	1.3668	1.0415	1.5528	1.1361	2.2268	1.5643	0.729	1.6868×10^{11}
300	1.1383	1.0412	1.7855	1.5686	2.6052	2.1981	0.713	0.7374
350	0.9754	1.0421	2.0000	2.0504	2.9691	2.9210	0.701	0.3697
400	0.8533	1.0449	2.1995	2.5776	3.3186	3.7220	0.691	0.2052
450	0.7584	1.0495	2.3890	3.1501	3.6463	4.5811	0.688	0.1215
500	0.6826	1.0564	2.5702	3.7653	3.9645	5.4979	0.684	7.6782×10^9
600	0.5688	1.0751	2.9127	5.1208	4.5549	7.4485	0.686	3.4594
700	0.4875	1.0980	3.2120	6.5887	5.0947	9.5179	0.691	1.7960
800	0.4266	1.1222	3.4896	8.1800	5.5864	11.6692	0.700	1.0113
1000	0.3413	1.1672	4.0000	11.7199	6.4419	16.1708	0.724	0.4498

T (°F)	ρ (lb_m/ft^3)	c_p (Btu/lb_m°F)	$\mu \times 10^5$ (lb_m/ft seg)	$\nu \times 10^3$ (ft^2/ seg)	k (Btu/hr ft°F)	α (ft^2/hr)	Pr	$\beta \times 10^3$ (1/°F)	$g\beta\rho^2/\mu^2$ (1/°F · ft^3)
					Oxígeno				
0	0.0955	0.219	1.22	0.128	0.0134	0.641	0.718	2.18	4.29×10^6
30	0.0897	0.219	1.28	0.143	0.0141	0.718	0.716	2.04	3.22
60	0.0845	0.219	1.35	0.160	0.0149	0.806	0.713	1.92	2.43
80	0.0814	0.220	1.40	0.172	0.0155	0.866	0.713	1.85	2.02
100	0.0785	0.220	1.43	0.182	0.0160	0.925	0.708	1.79	1.74
150	0.0720	0.221	1.52	0.211	0.0172	1.08	0.703	1.64	1.19
200	0.0665	0.223	1.62	0.244	0.0185	1.25	0.703	1.52	0.825
250	0.0168	0.225	1.70	0.276	0.0197	1.42	0.700	1.41	0.600
300	0.0578	0.227	1.79	0.310	0.0209	1.60	0.700	1.32	0.442
400	0.0511	0.230	1.95	0.381	0.0233	1.97	0.698	1.16	0.257
500	0.0458	0.234	2.10	0.458	0.0254	2.37	0.696	1.04	0.160
600	0.0414	0.239	2.25	0.543	0.0281	2.84	0.688	0.944	0.103
800	0.0349	0.246	2.52	0.723	0.0324	3.77	0.680	0.794	49.4×10^3
1000	0.0300	0.252	2.79	0.930	0.0366	4.85	0.691	0.685	25.6
1500	0.0224	0.264	3.39	1.52	0.0465	7.86	0.696	0.510	7.22

T (K)	ρ (kg/m^3)	$c_p \times 10^{-3}$ (J/kg · K)	$\mu \times 10^5$ (Pa · seg)	$\nu \times 10^5$ (m^2/seg)	$k \times 10^2$ (W/m · K)	$\alpha \times 10^5$ (m^2/seg)	Pr	$g\beta\rho^2/\mu^2$ (1/K · m^3)
				Oxígeno				
250	1.5620	0.9150	1.7887	1.1451	2.2586	1.5803	0.725	1.6603×10^{11}
300	1.3007	0.9199	2.0633	1.5863	2.6760	2.2365	0.709	0.7210
350	1.1144	0.9291	2.3176	2.0797	3.0688	2.9639	0.702	0.3594
400	0.9749	0.9417	2.5556	2.6214	3.4616	3.7705	0.695	0.1984
450	0.8665	0.9564	2.7798	3.2081	3.8298	4.6216	0.694	0.1171
500	0.7798	0.9721	2.9930	3.8382	4.1735	5.5056	0.697	7.3895×10^{9}
550	0.7089	0.9879	3.1966	4.5092	4.5172	6.4502	0.700	4.8810
600	0.6498	1.0032	3.3931	5.2218	4.8364	7.4192	0.704	3.3269

T (°F)	ρ (lb_m/ft^3)	c_p (Btu/lb_m °F)	$\mu \times 10^5$ (lb_m/ft seg)	$\nu \times 10^3$ (ft^2/seg)	k (Btu/hr ft °F)	α (ft^2/hr)	Pr	$\beta \times 10^3$ (1/°F)	$g\beta\rho^2/\mu^2$ (1/°F · ft^3)
				Bióxido de carbono					
0	0.132	0.193	0.865	0.0655	0.00760	0.298	0.792	2.18	16.3×10^6
30	0.124	0.198	0.915	0.0739	0.00830	0.339	0.787	2.04	12.0
60	0.117	0.202	0.965	0.0829	0.00910	0.387	0.773	1.92	9.00
80	0.112	0.204	1.00	0.0891	0.00960	0.421	0.760	1.85	7.45
100	0.108	0.207	1.03	0.0953	0.0102	0.455	0.758	1.79	6.33
150	0.100	0.213	1.12	0.113	0.0115	0.539	0.755	1.64	4.16
200	0.092	0.219	1.20	0.131	0.0130	0.646	0.730	1.52	2.86
250	0.0850	0.225	1.32	0.155	0.0148	0.777	0.717	1.41	2.04
300	0.0800	0.230	1.36	0.171	0.0160	0.878	0.704	1.32	1.45
400	0.0740	0.239	1.45	0.196	0.0180	1.02	0.695	1.16	1.11
500	0.0630	0.248	1.65	0.263	0.0210	1.36	0.700	1.04	0.485
600	0.0570	0.256	1.78	0.312	0.0235	1.61	0.700	0.944	0.310
800	0.0480	0.269	2.02	0.420	0.0278	2.15	0.702	0.794	0.143
1000	0.0416	0.280	2.25	0.540	0.0324	2.78	0.703	0.685	75.3×10^3
1500	0.0306	0.301	2.80	0.913	0.0340	4.67	0.704	0.510	19.6

T (K)	ρ (kg/m^3)	$c_p \times 10^{-3}$ (J/kg · K)	$\mu \times 10^5$ (Pa · seg)	$\nu \times 10^5$ (m^2/seg)	$k \times 10^2$ (W/m · K)	$\alpha \times 10^5$ (m^2/seg)	Pr	$g\beta\rho^2/\mu^2$ (1/K · m^3)
				Bióxido de carbono				
250	2.1652	0.8052	1.2590	0.5815	1.2891	0.7394	0.793	6.4392×10^{11}
300	1.7967	0.8526	1.4948	0.8320	1.6572	1.0818	0.770	2.6212
350	1.5369	0.8989	1.7208	1.1197	2.0457	1.4808	0.755	1.2399
400	1.3432	0.9416	1.9318	1.4382	2.4604	1.9454	0.738	0.6590
450	1.1931	0.9803	2.1332	1.7879	2.8955	2.4756	0.721	0.3770
500	1.0733	1.0153	2.3251	2.1663	3.3523	3.0763	0.702	0.2320
550	0.9756	1.0470	2.5073	2.5700	3.8208	3.7406	0.685	0.1503
600	0.8941	1.0761	2.6827	3.0004	4.3097	4.4793	0.668	0.1008

T (°F)	ρ (lb_m/ft^3)	c_p (Btu/lb_m°F)	$\mu \times 10^5$ (lb_m/ft seg)	$\nu \times 10^3$ (ft^2/seg)	k (Btu/hr ft °F)	α (ft^2/hr)	Pr	$\beta \times 10^3$ (1/°F)	$g\beta\rho^2/\mu^2$ (1/°F · ft^3)
				Hidrógeno					
0	0.00597	3.37	0.537	0.900	0.092	4.59	0.713	2.18	87 000
30	0.00562	3.39	0.562	1.00	0.097	5.09	0.709	2.04	65 700
60	0.00530	3.41	0.587	1.11	0.102	5.65	0.707	1.92	50 500
80	0.00510	3.42	0.602	1.18	0.105	6.04	0.705	1.85	42 700
100	0.00492	3.42	0.617	1.25	0.108	6.42	0.700	1.79	36 700
150	0.00450	3.44	0.653	1.45	0.116	7.50	0.696	1.64	25 000
200	0.00412	3.45	0.688	1.67	0.123	8.64	0.696	1.52	17 500
250	0.00382	3.46	0.723	1.89	0.130	9.85	0.690	1.41	12 700
300	0.00357	3.46	0.756	2.12	0.137	11.1	0.687	1.32	9 440
400	0.00315	3.47	0.822	2.61	0.151	13.8	0.681	1.16	5 470
500	0.00285	3.47	0.890	3.12	0.165	16.7	0.675	1.04	3 430
600	0.00260	3.47	0.952	3.66	0.179	19.8	0.667	0.944	2 270
800	0.00219	3.49	1.07	4.87	0.205	26.8	0.654	0.794	1 080
1000	0.00189	3.52	1.18	6.21	0.224	33.7	0.664	0.685	571
1500	0.00141	3.62	1.44	10.2	0.265	51.9	0.708	0.510	158

T (K)	ρ (kg/m^3)	$c_p \times 10^{-3}$ (J/kg · K)	$\mu \times 10^5$ (Pa · seg)	$\nu \times 10^5$ (m^2/seg)	$k \times 10^2$ (W/m · K)	$\alpha \times 10^5$ (m^2/seg)	Pr	$g\beta\rho^2/\mu^2$ (1/K · m^3)
				Hidrógeno				
250	9.8218	1.4055	7.9232	0.8067	1.5609	1.1307	0.714	3.3456×10^9
300	8.1850	1.4311	8.9594	1.0946	1.8166	1.5509	0.706	1.5142
350	7.0165	1.4429	9.9393	1.4166	2.0554	2.0302	0.698	0.7746
400	6.1392	1.4480	10.8670	1.7701	2.2808	2.5657	0.690	0.4351
450	5.4578	1.4503	11.7754	2.1575	2.5028	3.1619	0.683	0.2589
500	4.9113	1.4513	12.6417	2.5740	2.7181	3.8134	0.675	0.1643
550	4.4655	1.4530	13.4744	3.0174	2.9317	4.5184	0.668	0.1090
600	4.0934	1.4546	14.2903	3.4911	3.1470	5.2853	0.664	7.4433×10^7

T (°F)	ρ (lb_m/ft^3)	c_p (Btu/lb_m °F)	$\mu \times 10^5$ (lb_m/ft seg)	$\nu \times 10^3$ (ft^2/seg)	k (Btu/hr ft °F)	α (ft^2/hr)	Pr	$\beta \times 10^3$ (1/°F)	$g\beta\rho^2/\mu^2$ (1/°F · ft^3)
				Monóxido de carbono					
0	0.0832	0.249	1.05	0.126	0.0128	0.620	0.749	2.18	4.40×10^6
30	0.0780	0.249	1.11	0.142	0.0134	0.691	0.744	2.04	3.32
60	0.0736	0.249	1.16	0.157	0.0142	0.775	0.740	1.92	2.48
80	0.0709	0.249	1.20	0.169	0.0146	0.828	0.737	1.85	2.09
100	0.0684	0.249	1.23	0.180	0.0150	0.884	0.735	1.79	1.79
150	0.0628	0.249	1.32	0.210	0.0163	1.04	0.730	1.64	1.19
200	0.0580	0.250	1.40	0.241	0.0174	1.20	0.726	1.52	0.842
250	0.0539	0.250	1.48	0.275	0.0183	1.36	0.722	1.41	0.604
300	0.0503	0.251	1.56	0.310	0.0196	1.56	0.720	1.32	0.442
400	0.0445	0.253	1.73	0.389	0.0217	1.92	0.718	1.16	0.248
500	0.0399	0.256	1.85	0.463	0.0234	2.30	0.725	1.04	0.156
600	0.0361	0.259	1.97	0.545	0.0253	2.71	0.723	0.944	0.101
800	0.0304	0.266	2.21	0.728	0.0288	3.57	0.730	0.794	48.2×10^3
1000	0.0262	0.273	2.43	0.929	0.0324	4.54	0.740	0.685	25.6
1500	0.0195	0.286	3.00	1.54	0.0410	7.35	0.756	0.510	6.93

T (K)	ρ (kg/m^3)	$c_p \times 10^{-3}$ (J/kg · K)	$\mu \times 10^5$ (Pa · seg)	$\nu \times 10^5$ (m^2/seg)	$k \times 10^2$ (W/m · K)	$\alpha \times 10^5$ (m^2/seg)	Pr	$g\beta\rho^2/\mu^2$ (1/K · m^3)
				Monóxido de carbono				
250	1.3669	1.0425	1.5408	1.1272	2.1432	1.5040	0.923	1.7134×10^{11}
300	1.1382	1.0422	1.7854	1.5686	2.5240	2.1277	1.087	0.7374
350	0.9753	1.0440	2.0097	2.0606	2.8839	2.8323	1.242	0.3661
400	0.8532	1.0484	2.2201	2.6021	3.2253	3.6057	1.389	0.2013
450	0.7583	1.0550	2.4189	3.1899	3.5527	4.4408	1.530	0.1185
500	0.6824	1.0642	2.6078	3.8215	3.8638	5.3205	1.664	7.4540×10^9
550	0.6204	1.0751	2.7884	4.4945	4.1587	6.2350	1.791	4.9130
600	0.5687	1.0870	2.9607	5.2061	4.4443	7.1894	1.914	3.3470

T (°F)	ρ (lb_m/ft^3)	c_p (Btu/lb_m °F)	$\mu \times 10^6$ (lb_m/ft seg)	$\nu \times 10^3$ (ft^2/seg)	k (Btu/hr ft °F)	α (ft^2/hr)	Pr	$\beta \times 10^3$ (1/°F)	$g\beta\rho^2/\mu^2 \times 10^{-6}$ (1/°F · ft^3)
				Cloro					
0	0.211	0.113	8.06	0.0381	0.00418	0.175	0.785	2.18	48.3
30	0.197	0.114	8.40	0.0426	0.00450	0.201	0.769	2.04	36.6
60	0.187	0.114	8.80	0.0470	0.00480	0.225	0.753	1.92	28.1
80	0.180	0.115	9.07	0.0504	0.00500	0.242	0.753	1.85	24.3
100	0.173	0.115	9.34	0.0540	0.00520	0.261	0.748	1.79	19.9
150	0.159	0.117	10.0	0.0629	0.00570	0.306	0.739	1.64	13.4

T (°F)	ρ (lb_m/ft^3)	c_p (Btu/lb_m °F)	$\mu \times 10^7$ (lb_m/ft seg)	$\nu \times 10^3$ (ft^2/seg)	k (Btu/hr ft °F)	α (ft^2/hr)	Pr	$\beta \times 10^3$ (1/°F)	$g\beta\rho^2/\mu^2$ (1/°F · ft^3)
				Helio					
0	0.0119	1.24	122	1.03	0.0784	5.30	0.698	2.18	66 800
30	0.0112	1.24	127	1.14	0.0818	5.89	0.699	2.04	51 100
60	0.0106	1.24	132	1.25	0.0852	6.46	0.700	1.92	40 000
80	0.0102	1.24	135	1.32	0.0872	6.88	0.701	1.85	33 900
100	0.00980	1.24	138	1.41	0.0892	7.37	0.701	1.79	29 000
150	0.00900	1.24	146	1.63	0.0937	8.36	0.703	1.64	20 100
200	0.00829	1.24	155	1.87	0.0977	9.48	0.705	1.52	14 000
250	0.00772	1.24	162	2.09	0.102	10.7	0.707	1.41	10 400
300	0.00722	1.24	170	2.36	0.106	11.8	0.709	1.32	7 650
400	0.00637	1.24	185	2.91	0.114	14.4	0.714	1.16	4 410
500	0.00572	1.24	198	3.46	0.122	17.1	0.719	1.04	2 800
600	0.00517	1.24	209	4.04	0.130	20.6	0.720	0.994	1 850
800	0.00439	1.24	232	5.28	0.145	27.6	0.722	0.794	915
1000	0.00376	1.24	255	6.78	0.159	35.5	0.725	0.685	480
1500	0.00280	1.24	309	11.1	0.189	59.7	0.730	0.510	135

T (°F)	ρ (lb_m/ft^3)	c_p (Btu/lb_m °F)	$\mu \times 10^5$ (lb_m/ft seg)	$\nu \times 10^3$ (ft^2/seg)	k (Btu/hr ft °F)	α (ft^2/hr)	Pr	$\beta \times 10^3$ (1/°F)	$g\beta\rho^2/\mu^2$ (1/°F · ft^3)
				Bióxido de azufre					
0	0.195	0.142	0.700	3.59	0.00460	0.166	0.778	2.03	50.6×10^6
100	0.161	0.149	0.890	5.52	0.00560	0.233	0.854	1.79	19.0
200	0.136	0.157	1.05	7.74	0.00670	0.313	0.883	1.52	8.25
300	0.118	0.164	1.20	10.2	0.00790	0.407	0.898	1.32	4.12
400	0.104	0.170	1.35	13.0	0.00920	0.520	0.898	1.16	2.24
500	0.0935	0.176	1.50	16.0	0.00990	0.601	0.958	1.04	1.30
600	0.0846	0.180	1.65	19.5	0.0108	0.711	0.987	0.994	0.795

Líquidos									
T (°F)	ρ (lb_m/ft^3)	c_p (Btu/lb_m °F)	$\mu \times 10^3$ (lb_m/ft seg)	$\nu \times 10^5$ (ft^2/seg)	k (Btu/hr ft °F)	$\alpha \times 10^3$ (ft^2/hr)	Pr	$\beta \times 10^4$ (1/°F)	$g\beta\rho^2/\mu^2 \times 10^{-8}$ (1/°F · ft^3)
Agua									
32	62.4	1.01	1.20	1.93	0.319	5.06	13.7	−0.350	
60	62.3	1.00	0.760	1.22	0.340	5.45	8.07	0.800	17.2
80	62.2	0.999	0.578	0.929	0.353	5.67	5.89	1.30	48.3
100	62.1	0.999	0.458	0.736	0.364	5.87	4.51	1.80	107
150	61.3	1.00	0.290	0.474	0.383	6.26	2.72	2.80	403
200	60.1	1.01	0.206	0.342	0.392	6.46	1.91	3.70	1 010
250	58.9	1.02	0.160	0.272	0.395	6.60	1.49	4.70	2 045
300	57.3	1.03	0.130	0.227	0.395	6.70	1.22	5.60	3 510
400	53.6	1.08	0.0930	0.174	0.382	6.58	0.950	7.80	8 350
500	49.0	1.19	0.0700	0.143	0.349	5.98	0.859	11.0	17 350
600	42.4	1.51	0.0579	0.137	0.293	4.58	1.07	17.5	30 300

T (°F)	ρ (lb_m/ft^3)	c_p (Btu/lb_m°F)	$\mu \times 10^5$ (lb_m/ft seg)	$\nu \times 10^5$ (ft^2/seg)	k (Btu/hr ft°F)	$\alpha \times 10^3$ (ft^2/hr)	Pr	$\beta \times 10^3$ (1/°F)	$g\beta\rho^2/\mu^2 \times 10^{-6}$ (1/°F · ft^3)
				Anilina					
60	64.0	0.480	305	4.77	0.101	3.29	52.3		
80	63.5	0.485	240	3.78	0.100	3.25	41.8		
100	63.0	0.490	180	2.86	0.100	3.24	31.8	0.45	17.7
150	61.6	0.503	100	1.62	0.0980	3.16	18.4		
200	60.2	0.515	62	1.03	0.0962	3.10	12.0		
250	58.9	0.527	42	0.714	0.0947	3.05	8.44		
300	57.5	0.540	30	0.522	0.0931	2.99	6.28		

T (°F)	ρ (lb_m/ft^3)	c_p (Btu/lb_m°F)	$\mu \times 10^5$ (lb_m/ft seg)	$\nu \times 10^5$ (ft^2/seg)	k (Btu/hr ft °F)	$\alpha \times 10^3$ (ft^2/hr)	Pr	$\beta \times 10^3$ (1/°F)	$g\beta\rho^2/\mu^2 \times 10^{-7}$ (1/°F · ft^3)
				Amoniaco					
−60	43.9	1.07	20.6	0.471	0.316	6.74	2.52	0.94	132
−30	42.7	1.07	18.2	0.426	0.317	6.93	2.22	1.02	265
0	41.3	1.08	16.9	0.409	0.315	7.06	2.08	1.1	467
30	40.0	1.11	16.2	0.402	0.312	7.05	2.05	1.19	757
60	38.5	1.14	15.0	0.391	0.304	6.92	2.03	1.3	1130
80	37.5	1.16	14.2	0.379	0.296	6.79	2.01	1.4	1650
100	36.4	1.19	13.5	0.368	0.287	6.62	2.00	1.5	2200
120	35.3	1.22	12.6	0.356	0.275	6.43	2.00	1.68	3180

T (°F)	ρ (lb_m/ft^3)	c_p (Btu/lb_m °F)	$\mu \times 10^5$ (lb_m/ft seg)	$\nu \times 10^5$ (ft^2/seg)	k (Btu/hr ft °F)	$\alpha \times 10^3$ (ft^2/hr)	Pr	$\beta \times 10^4$ (1/°F)	$g\beta\rho^2/\mu^2 \times 10^{-6}$ (1/°F · ft^3)
				Freón 12					
−40	94.5	0.202	125	1.32	0.0650	3.40	14.0	9.10	168
−30	93.5	0.204	123	1.32	0.0640	3.35	14.1	9.60	179
0	90.9	0.212	116	1.28	0.0578	3.00	15.4	11.4	225
30	87.4	0.221	108	1.24	0.0564	2.92	15.3	13.1	277
60	84.0	0.230	99.6	1.19	0.0528	2.74	15.6	14.9	341
80	81.3	0.238	94.0	1.16	0.0504	2.60	16.0	16.0	384
100	78.7	0.246	88.4	1.12	0.0480	2.48	16.3	17.2	439
150	71.0	0.271	74.8	1.05	0.0420	2.18	17.4	19.5	625

T (°F)	ρ (lb_m/ft^3)	c_p (Btu/lb_m °F)	$\mu \times 10^5$ (lb_m/ft seg)	$\nu \times 10^5$ (ft^2/seg)	k (Btu/hr ft °F)	$\alpha \times 10^3$ (ft^2/hr)	Pr	$\beta \times 10^3$ (1/°F)	$g\beta\rho^2/\mu^2 \times 10^{-6}$ (1/°F · ft^3)
				N-Butil alcohol					
60	50.5	0.55	225	4.46	0.100	3.59	44.6		
80	50.0	0.58	180	3.60	0.099	3.41	38.0	0.25	6.23
100	49.6	0.61	130	2.62	0.098	3.25	29.1	0.43	2.02
150	48.5	0.68	68	1.41	0.098	2.97	17.1		

T (°F)	ρ (lb_m/ft^3)	c_p (Btu/lb_m °F)	$\mu \times 10^5$ (lb_m/ft seg)	$\nu \times 10^5$ (ft^2/ seg)	k (Btu/hr ft °F)	$\alpha \times 10^3$ (ft^2/hr)	Pr	$\beta \times 10^4$ (1/°F)	$g\beta\rho^2/\mu^2 \times 10^{-6}$ (1/°F · ft^3)
				Benceno					
60	55.2	0.395	44.5	0.806	0.0856	3.93	7.39		
80	54.6	0.410	38	0.695	0.0836	3.73	6.70	7.5	498
100	53.6	0.420	33	0.615	0.0814	3.61	6.13	7.2	609
150	51.8	0.450	24.5	0.473	0.0762	3.27	5.21	6.8	980
200	49.9	0.480	19.4	0.390	0.0711	2.97	4.73		

T (°F)	ρ (lb_m/ft^3)	c_p (Btu/lb_m °F)	$\mu \times 10^5$ (lb_m/ft seg)	$\nu \times 10^5$ (ft^2/ seg)	k (Btu/hr ft °F)	$\alpha \times 10^3$ (ft^2/hr)	Pr	$\beta \times 10^3$ (1/°F)	$g\beta\rho^2/\mu^2 \times 10^{-4}$ (1/°F · ft^3)
				Fluido hidráulico (MIL-M-5606)					
0	55.0	0.400	5550	101	0.0780	3.54	1030	0.76	2.39
30	54.0	0.420	2220	41.1	0.0755	3.32	446	0.68	13.0
60	53.0	0.439	1110	20.9	0.0732	3.14	239	0.60	44.1
80	52.5	0.453	695	13.3	0.0710	3.07	155	0.52	95.7
100	52.0	0.467	556	10.7	0.0690	2.84	136	0.47	132
150	51.0	0.499	278	5.45	0.0645	2.44	80.5	0.32	346
200	50.0	0.530	250	5.00	0.0600	2.27	79.4	0.20	258

T (°F)	ρ (lb_m/ft^3)	c_p (Btu/lb_m °F)	μ (lb_m/ft seg)	$\nu \times 10^2$ (ft^2/seg)	k (Btu/hr ft °F)	$\alpha \times 10^3$ (ft^2/hr)	Pr	$\beta \times 10^3$ (1/°F)	$g\beta\rho^2/\mu^2$ (1/°F · ft^3)
				Glicerina					
30	79.7	0.540	7.2	9.03	0.168	3.91	832		
60	79.1	0.563	1.4	1.77	0.167	3.75	170		
80	78.7	0.580	0.6	0.762	0.166	3.64	75.3	0.30	166
100	78.2	0.598	0.1	0.128	0.165	3.53	13.1		

T (°F)	ρ (lb_m/ft^3)	c_p (Btu/lb_m °F)	$\mu \times 10^5$ (lb_m/ft seg)	$\nu \times 10^5$ (ft^2/seg)	k (Btu/hr ft °F)	$\alpha \times 10^3$ (ft^2/hr)	Pr	$\beta \times 10^3$ (1/°F)	$g\beta\rho^2/\mu^2 \times 10^{-4}$ (1/°F · ft^3)
				Queroseno					
30	48.8	0.456	800	16.4	0.0809	3.63	163		
60	48.1	0.474	600	12.5	0.0805	3.53	127	0.58	120
80	47.6	0.491	490	10.3	0.0800	3.42	108	0.48	146
100	47.2	0.505	420	8.90	0.0797	3.35	95.7	0.47	192
150	46.1	0.540	320	6.83	0.0788	3.16	77.9		

T (°F)	ρ (lb_m/ft^3)	c_p (Btu/lb_m °F)	$\mu \times 10^5$ (lb_m/ft seg)	$\nu \times 10^5$ (ft^2/seg)	k (Btu/hr ft °F)	$\alpha \times 10^3$ (ft^2/hr)	Pr	$\beta \times 10^3$ (1/°F)	$g\beta\rho^2/\mu^2 \times 10^{-4}$ (1/°F · ft^3)
				Hidrógeno líquido					
−435	4.84	1.69	1.63	0.337	0.0595	7.28	1.67		
−433	4.77	1.78	1.52	0.319	0.0610	7.20	1.59		
−431	4.71	1.87	1.40	0.297	0.0625	7.09	1.51	7.1	2.59
−429	4.64	1.96	1.28	0.276	0.0640	7.03	1.41		
−427	4.58	2.05	1.17	0.256	0.0655	6.97	1.32		
−425	4.51	2.15	1.05	0.233	0.0670	6.90	1.21		

T (°F)	ρ (lb_m/ft^3)	c_p (Btu/lb_m °F)	$\mu \times 10^5$ (lb_m/ft seg)	$\nu \times 10^5$ (ft^2/seg)	$k \times 10^3$ (Btu/hr ft °F)	α 10^5 (ft^2/hr)	Pr	$\beta \times 10^3$ (1/°F)	$g\beta\rho^2/\mu^2 \times 10^{-8}$ (1/°F · ft^3)
				Oxígeno líquido					
−350	80.1	0.400	38.0	0.474	3.1	9.67	172		
−340	78.5	0.401	28.0	0.356	3.4	10.8	109		
−330	76.8	0.402	21.8	0.284	3.7	12.0	85.0		
−320	75.1	0.404	17.4	0.232	4.0	12.2	63.5	3.19	186
−310	73.4	0.405	14.8	0.202	4.3	14.5	50.1		
−300	71.7	0.406	13.0	0.181	4.6	15.8	41.2		

T (°F)	ρ (lb_m/ft^3)	c_p ($Btu/lb_m°F$)	$\mu \times 10^3$ ($lb_m/ft\ seg$)	$\nu \times 10^6$ (ft^2/seg)	k ($Btu/hr\ ft\ °F$)	α (ft^2/hr)	Pr	$\beta \times 10^3$ (1/°F)	$g\beta\rho^2/\mu^2 \times 10^{-9}$ ($1/°F \cdot ft^3$)
				Bismuto					
600	625	0.0345	1.09	1.75	8.58	0.397	0.0159		
700	622	0.0353	0.990	1.59	8.87	0.405	0.0141	0.062	0.786
800	618	0.0361	0.900	1.46	9.16	0.408	0.0129	0.065	0.985
900	613	0.0368	0.830	1.35	9.44	0.418	0.0116	0.068	1.19
1000	608	0.0375	0.765	1.26	9.74	0.427	0.0106	0.071	1.45
1100	604	0.0381	0.710	1.17	10.0	0.435	0.00970	0.074	1.72
1200	599	0.0386	0.660	1.10	10.3	0.446	0.00895	0.077	2.04
1300	595	0.0391	0.620	1.04	10.6	0.456	0.00820		

T (°F)	ρ (lb_m/ft^3)	c_p (Btu/lb_m°F)	$\mu \times 10^3$ (lb_m/ft seg)	$\nu \times 10^6$ (ft^2/ seg)	k (Btu/hr ft °F)	α (ft^2/hr)	Pr	$\beta \times 10^3$ (1/°F)	$g\beta\rho^2/\mu^2 \times 10^{-9}$ (1/°F · ft^3)
				Mercurio					
40	848	0.0334	1.11	1.31	4.55	0.161	0.0292		1.57
60	847	0.0333	1.05	1.24	4.64	0.165	0.0270		1.76
80	845	0.0332	1.00	1.18	4.72	0.169	0.0252		1.94
100	843	0.0331	0.960	1.14	4.80	0.172	0.0239		2.09
150	839	0.0330	0.893	1.06	5.03	0.182	0.0210		2.38
200	835	0.0328	0.850	1.02	5.25	0.192	0.0191		2.62
250	831	0.0328	0.806	0.970	5.45	0.200	0.0175		2.87
300	827	0.0328	0.766	0.928	5.65	0.209	0.0160		3.16
400	819	0.0328	0.700	0.856	6.05	0.225	0.0137	0.084	3.70
500	811	0.0328	0.650	0.803	6.43	0.243	0.0119		4.12
600	804	0.0328	0.606	0.754	6.80	0.259	0.0105		4.80
800	789	0.0329	0.550	0.698	7.45	0.289	0.0087		5.54

T (°F)	ρ (lb_m/ft^3)	c_p (Btu/lb_m °F)	$\mu \times 10^5$ (lb_m/ft seg)	$\nu \times 10^6$ (ft^2/seg)	k (Btu/hr ft °F)	α (ft^2/hr)	Pr	$\beta \times 10^3$ (1/°F)	$g\beta\rho^2/\mu^2 \times 10^{-6}$ (1/°F · ft^3)
				Sodio					
200	58.1	0.332	0.489	8.43	49.8	2.58	0.0118		68.0
250	57.6	0.328	0.428	7.43	49.3	2.60	0.0103		87.4
300	57.2	0.324	0.378	6.61	48.8	2.64	0.00903		110
400	56.3	0.317	0.302	5.36	47.3	2.66	0.00725		168
500	55.5	0.309	0.258	4.64	45.5	2.64	0.00633	0.15	224
600	54.6	0.305	0.224	4.11	43.1	2.58	0.00574		287
800	52.9	0.304	0.180	3.40	38.8	2.41	0.00510		418
1000	51.2	0.304	0.152	2.97	36.0	2.31	0.00463		548
1300	48.7	0.305	0.120	2.47	34.2	2.31	0.00385		795

APENDICE

J

COEFICIENTES DE TRANSFERENCIA DE MASA POR DIFUSION EN SISTEMAS BINARIOS

Tabla J.1 Difusividades binarias de masa en los gases*

Sistema	T, K	$D_{AB}P$, cm^2 atm/s	$D_{AB}P$, m^2 Pa/s
Aire			
Amoniaco	273	0.198	2.006
Anilina	298	0.0726	0.735
Benceno	298	0.0962	0.974
Bromo	293	0.091	0.923
Bióxido de carbono	273	0.136	1.378
Bisulfuro carbónico	273	0.0883	0.894
Cloro	273	0.124	1.256
Difenil	491	0.160	1.621
Acetato etílico	273	0.0709	0.718
Etanol	298	0.132	1.337
Eter etílico	293	0.0896	0.908
Yodo	298	0.0834	0.845
Metanol	298	0.162	1.641
Mercurio	614	0.473	4.791
Naftalina	298	0.0611	0.619
Nitrobenceno	298	0.0868	0.879
n-Octano	298	0.0602	0.610
Oxígeno	273	0.175	1.773
Acetato propílico	315	0.092	0.932
Bióxido sulfúrico	273	0.122	1.236
Tolueno	298	0.0844	0.855
Agua	298	0.260	2.634
Amoniaco			
Etileno	293	0.177	1.793

*R. C. Reid y T. K. Sherwood, *The Properties of Gases and Liquids*, McGraw Hill Book Company, Nueva York, 1958, Cap. 8.

Sistema	T, K	$D_{AB}P$, cm^2 atm/s	$D_{AB}P$, m^2 Pa/s
Argón			
Neón	293	0.329	3.333
Bióxido de carbono			
Benceno	318	0.0715	0.724
Bisulfuro carbónico	318	0.0715	0.724
Acetato etílico	319	0.0666	0.675
Etanol	273	0.0693	0.702
Eter etílico	273	0.0541	0.548
Hidrógeno	273	0.550	5.572
Metano	273	0.153	1.550
Metanol	298.6	0.105	1.064
Nitrógeno	298	0.158	1.601
Oxido nitroso	298	0.117	1.185
Propano	298	0.0863	0.874
Agua	298	0.164	1.661
Monóxido de carbono			
Etileno	273	0.151	1.530
Hidrógeno	273	0.651	6.595
Nitrógeno	288	0.192	1.945
Oxígeno	273	0.185	1.874
Helio			
Argón	273	0.641	6.493
Benceno	298	0.384	3.890
Etanol	298	0.494	5.004
Hidrógeno	293	1.64	16.613
Neón	293	1.23	12.460
Agua	298	0.908	9.198
Hidrógeno			
Amoniaco	293	0.849	8.600
Argón	293	0.770	7.800
Benceno	273	0.317	3.211
Etanol	273	0.439	4.447
Metano	273	0.625	6.331
Oxígeno	273	0.697	7.061
Agua	293	0.850	8.611
Nitrógeno			
Amoniaco	293	0.241	2.441
Etileno	298	0.163	1.651
Hidrógeno	288	0.743	7.527
Yodo	273	0.070	0.709
Oxígeno	273	0.181	1.834

Tabla J.3 Difusividades binarias en los sólidos*

Soluto	Sólido	K	Difusividad en cm^2/s or $m^2/s \times 10^4$	Difusividad en ft^2/hr
Helio	Pyrex	293	4.49×10^{-11}	1.74×10^{-10}
		773	2.00×10^{-8}	7.76×10^{-8}
Hidrógeno	Níquel	358	1.16×10^{-8}	4.5×10^{-8}
		438	1.05×10^{-7}	4.07×10^{-7}
Bismuto	Plomo	293	1.10×10^{-16}	4.27×10^{-16}
Mercurio	Plomo	293	2.50×10^{-15}	9.7×10^{-15}
Antimonio	Plata	293	3.51×10^{-21}	1.36×10^{-20}
Aluminio	Cobre	293	1.30×10^{-30}	5.04×10^{-30}
Cadmio	Cobre	293	2.71×10^{-15}	1.05×10^{-14}

*R. M. Barrer, *Diffusion In and Through Solids*, The Macmillan Company, Nueva York, 1941.

Sistema	T, K	$D_{AB}P$, cm^2atm/s	$D_{AB}P$, m^2 Pa/s
Oxígeno			
Amoniaco	293	0.253	2.563
Benceno	296	0.0939	0.951
Etileno	293	0.182	1.844

Tabla J.2 Difusividades binarias de masa en los líquidos*

Soluto A	Solvente B	Temperatura en K	Concentración de soluto en g mol/litro o kg mol/m^3	Difusividad $cm^2/s \times 10^5$ or $m^2/s \times 10^9$
Cloro	Agua	289	0.12	1.26
Cloruro de hidrógeno	Agua	273	9	2.7
			2	1.8
		283	9	3.3
			2.5	2.5
		289	0.5	2.44
Amoniaco	Agua	278	3.5	1.24
		288	1.0	1.77
Bióxido de carbono	Agua	283	0	1.46
		293	0	1.77
Cloruro de sodio	Agua	291	0.05	1.26
			0.2	1.21
			1.0	1.24
			3.0	1.36
			5.4	1.54
Metanol	Agua	288	0	1.28
Acido acético	Agua	285.5	1.0	0.82
			0.01	0.91
		291	1.0	0.96
Etanol	Agua	283	3.75	0.50
			0.05	0.83
		289	2.0	0.90
n-Butanol	Agua	288	0	0.77
Bióxido de carbono	Etanol	290	0	3.2
Cloroformo	Etanol	293	2.0	1.25

*R. E. Treybal, *Mass Transfer Operations*, McGraw Hill Book Company, Nueva York, 1955, pág. 25.

APENDICE
K
CONSTANTES DE LENNARD-JONES

Tabla K.1 Las integrales de colisión, Ω_μ y Ω_D, basadas en el potencial de Lennard-Jones.*

$\kappa T/\epsilon$	$\Omega_\mu = \Omega_k$ Correspondientes a la viscosidad y conductividad térmica	Ω_D Correspondientes a difusividad de la masa	$\kappa T/\epsilon$	$\Omega_\mu = \Omega_k$ Correspondientes a la viscosidad y conductividad térmica	Ω_D Correspondientes a difusividad de la masa
			1.25	1.424	1.296
0.30	2.785	2.662	1.30	1.399	1.273
0.35	2.628	2.476	1.35	1.375	1.253
0.40	2.492	2.318	1.40	1.353	1.233
0.45	2.368	2.184	1.45	1.333	1.215
0.50	2.257	2.066	1.50	1.314	1.198
0.55	2.156	1.966	1.55	1.296	1.182
0.60	2.065	1.877	1.60	1.279	1.167
0.65	1.982	1.798	1.65	1.264	1.153
0.70	1.908	1.729	1.70	1.248	1.140
0.75	1.841	1.667	1.75	1.234	1.128
0.80	1.780	1.612	1.80	1.221	1.116
0.85	1.725	1.562	1.85	1.209	1.105
0.90	1.675	1.517	1.90	1.197	1.094
0.95	1.629	1.476	1.95	1.186	1.084
1.00	1.587	1.439	2.00	1.175	1.075
1.05	1.549	1.406	2.10	1.156	1.057
1.10	1.514	1.375	2.20	1.138	1.041
1.15	1.482	1.346	2.30	1.122	1.026
1.20	1.452	1.320	2.40	1.107	1.012
2.50	1.093	0.9996	4.50	0.9464	0.8610
2.60	1.081	0.9878	4.60	0.9422	0.8568

*Tomado de J. O. Hirschfelder y E. L. Spotz, *Chem. Revs*, 44, 205 (1949).

$\kappa T/\epsilon$	$\Omega_\mu = \Omega_k$ Correspondientes a la viscosidad y conductividad térmica	Ω_D Correspondientes a difusividad de la masa	$\kappa T/\epsilon$	$\Omega_\mu = \Omega_k$ Correspondientes a la viscosidad y conductividad térmica	Ω_D Correspondientes a difusividad de la masa
2.70	1.069	0.9770	4.70	0.9382	0.8530
2.80	1.058	0.9672	4.80	0.9343	0.8492
2.90	1.048	0.9576	4.90	0.9305	0.8456
3.00	1.039	0.9490	5.0	0.9269	0.8422
3.10	1.030	0.9406	6.0	0.8963	0.8124
3.20	1.022	0.9328	7.0	0.8727	0.7896
3.30	1.014	0.9256	8.0	0.8538	0.7712
3.40	1.007	0.9186	9.0	0.8379	0.7556
3.50	0.9999	0.9120	10.0	0.8242	0.7424
3.60	0.9932	0.9058	20.0	0.7432	0.6640
3.70	0.9870	0.8998	30.0	0.7005	0.6232
3.80	0.9811	0.8942	40.0	0.6718	0.5960
3.90	0.9755	0.8888	50.0	0.6504	0.5756
4.00	0.9700	0.8836	60.0	0.6335	0.5596
4.10	0.9649	0.8788	70.0	0.6194	0.5464
4.20	0.9600	0.8740	80.0	0.6076	0.5352
4.30	0.9553	0.8694	90.0	0.5973	0.5256
4.40	0.9507	0.8652	100.0	0.5882	0.5170

Tabla K.2 Constantes de fuerza de Lennard-Jones calculadas a partir de datos de viscosidad.

Compuesto	Fórmula	ϵ_A/κ, in K	σ, in Å
Acetileno	C_2H_2	185	4.221
Aire		97	3.617
Argón	A	124	3.418
Arsina	AsH_3	281	4.06
Benceno	C_6H_6	440	5.270
Bromo	Br_2	520	4.268
i-Butano	C_4H_{10}	313	5.341
n-Butano	C_4H_{10}	410	4.997
Bióxido de carbono	CO_2	190	3.996
Bisulfuro carbónico	CS_2	488	4.438
Monóxido de carbono	CO	110	3.590
Tetracloruro de carbono	CCl_4	327	5.881
Sulfuro de carbonilo	COS	335	4.13
Cloro	Cl_2	357	4.115
Cloroformo	$CHCl_3$	327	5.430
Cianógeno	C_2N_2	339	4.38

*R. C. Reid y T. K. Sherwood, *The Properties of Gases and Liquids*, McGraw Hill Book Company, Nueva York, 1958.

Compuesto	Fórmula	ϵ_A/κ, in K	σ, in Å
Ciclohexano	C_6H_{12}	324	6.093
Etano	C_2H_6	230	4.418
Etanol	C_2H_5OH	391	4.455
Etileno	C_2H_4	205	4.232
Flúor	F_2	112	3.653
Helio	He	10.22	2.576
n-Heptano	C_7H_{16}	282†	8.88†
n-Hexano	C_6H_{14}	413	5.909
Hidrógeno	H_2	33.3	2.968
Cloruro de hidrógeno	HCl	360	3.305
Yoduro de hidrógeno	HI	324	4.123
Yodo	I_2	550	4.982
Kriptón	Kr	190	3.60
Metano	CH_4	136.5	3.822
Metanol	CH_3OH	507	3.585
Cloruro de metileno	CH_2Cl_2	406	4.759
Cloruro de metilo	CH_3Cl	855	3.375
Yoduro mercúrico	HgI_2	691	5.625
Mercurio	Hg	851	2.898
Neón	Ne	35.7	2.789
Oxido nítrico	NO	119	3.470
Nitrógeno	N_2	91.5	3.681
Oxido nitroso	N_2O	220	3.879
n-Nonano	C_9H_{20}	240	8.448
n-Octano	C_8H_{18}	320	7.451
Oxígeno	O_2	113	3.433
n-Pentano	C_5H_{12}	345	5.769
Propano	C_3H_8	254	5.061
Bióxido de azufre	SO_2	252	4.290
Agua	H_2O	356	2.649
Xenón	Xe	229	4.055

† Calculado a partir de los coeficientes viriales.

APENDICE
L
LA FUNCION ERROR*

ϕ	erf ϕ	ϕ	erf ϕ
0	0.0	0.85	0.7707
0.025	0.0282	0.90	0.7970
0.05	0.0564	0.95	0.8209
0.10	0.1125	1.0	0.8247
0.15	0.1680	1.1	0.8802
0.20	0.2227	1.2	0.9103
0.25	0.2763	1.3	0.9340
0.30	0.3286	1.4	0.9523
0.35	0.3794	1.5	0.9661
0.40	0.4284	1.6	0.9763
0.45	0.4755	1.7	0.9838
0.50	0.5205	1.8	0.9891
0.55	0.5633	1.9	0.9928
0.60	0.6039	2.0	0.9953
0.65	0.6420	2.2	0.9981
0.70	0.6778	2.4	0.9993
0.75	0.7112	2.6	0.9998
0.80	0.7421	2.8	0.9999

*J. Crank, *The Mathematics of Diffusion*, Oxford Univ. Press, Londres, 1958.

APENDICE

M

TAMAÑOS ESTANDAR DE TUBERIA

Tamaño nominal del tubo en in	Diámetro exterior en plg.	Cédula No.	Espesor de la pared, en in	Diámetro interior en in	Sección transversal de área de metal en in^2	Area seccional interna en ft^2
$\frac{1}{8}$	0.405	40	0.068	0.269	0.072	0.00040
		80	0.095	0.215	0.093	0.00025
$\frac{1}{4}$	0.540	40	0.088	0.364	0.125	0.00072
		80	0.119	0.302	0.157	0.00050
$\frac{3}{8}$	0.675	40	0.091	0.493	0.167	0.00133
		80	0.126	0.423	0.217	0.00098
$\frac{1}{2}$	0.840	40	0.109	0.622	0.250	0.00211
		80	0.147	0.546	0.320	0.00163
		160	0.187	0.466	0.384	0.00118
$\frac{3}{4}$	1.050	40	0.113	0.824	0.333	0.00371
		80	0.154	0.742	0.433	0.00300
		160	0.218	0.614	0.570	0.00206
1	1.315	40	0.133	1.049	0.494	0.00600
		80	0.179	0.957	0.639	0.00499
		160	0.250	0.815	0.837	0.00362
$1\frac{1}{2}$	1.900	40	0.145	1.610	0.799	0.01414
		80	0.200	1.500	1.068	0.01225
		160	0.281	1.338	1.429	0.00976
2	2.375	40	0.154	2.067	1.075	0.02330
		80	0.218	1.939	1.477	0.02050
		160	0.343	1.689	2.190	0.01556
$2\frac{1}{2}$	2.875	40	0.203	2.469	1.704	0.03322
		80	0.276	2.323	2.254	0.02942
		160	0.375	2.125	2.945	0.02463
3	3.500	40	0.216	3.068	2.228	0.05130
		80	0.300	2.900	3.016	0.04587
		160	0.437	2.626	4.205	0.03761

Tamaño nominal del tubo en in	Diámetro exterior en in	Cédula No.	Espesor de la pared, en in	Diámetro interior en in	Sección transversal de área de metal en in^2	Area seccional interna en ft^2
4	4.500	40	0.237	4.026	3.173	0.08840
		80	0.337	3.826	4.407	0.07986
		120	0.437	3.626	5.578	0.07170
		160	0.531	3.438	6.621	0.06447
5	5.563	40	0.258	5.047	4.304	0.1390
		80	0.375	4.813	6.112	0.1263
		120	0.500	4.563	7.953	0.1136
		160	0.625	4.313	9.696	0.1015
6	6.625	40	0.280	6.065	5.584	0.2006
		80	0.432	5.761	8.405	0.1810
		120	0.562	5.501	10.71	0.1650
		160	0.718	5.189	13.32	0.1469
8	8.625	20	0.250	8.125	6.570	0.3601
		30	0.277	8.071	7.260	0.3553
		40	0.322	7.981	8.396	0.3474
		60	0.406	7.813	10.48	0.3329
		80	0.500	7.625	12.76	0.3171
		100	0.593	7.439	14.96	0.3018
		120	0.718	7.189	17.84	0.2819
		140	0.812	7.001	19.93	0.2673
		160	0.906	6.813	21.97	0.2532
10	10.75	20	0.250	10.250	8.24	0.5731
		30	0.307	10.136	10.07	0.5603
		40	0.365	10.020	11.90	0.5475
		60	0.500	9.750	16.10	0.5158
		80	0.593	9.564	18.92	0.4989
		100	0.718	9.314	22.63	0.4732
		120	0.843	9.064	26.24	0.4481
		140	1.000	8.750	30.63	0.4176
		160	1.125	8.500	34.02	0.3941
12	12.75	20	0.250	12.250	9.82	0.8185
		30	0.330	12.090	12.87	0.7972
		40	0.406	11.938	15.77	0.7773
		60	0.562	11.626	21.52	0.7372
		80	0.687	11.376	26.03	0.7058
		100	0.843	11.064	31.53	0.6677
		120	1.000	10.750	36.91	0.6303
		140	1.125	10.500	41.08	0.6013
		160	1.312	10.126	47.14	0.5592

Diámetro exterior en in	Espesor de la pared		Diámetro interior en in	Sección transversal de área en ft^2	Sección interior de área en ft^2
	Calibres BWG y de Stubs	in.			
$1\frac{1}{2}$	12	0.109	1.282	0.4763	0.00896
	13	0.095	1.310	0.4193	0.00936
	14	0.083	1.334	0.3694	0.00971
	15	0.072	1.358	0.3187	0.0100
	16	0.065	1.370	0.2930	0.0102
	17	0.058	1.384	0.2627	0.0107
	18	0.049	1.402	0.2234	0.0109
$1\frac{3}{4}$	10	0.134	1.482	0.6803	0.0120
	11	0.120	1.510	0.6145	0.0124
	12	0.109	1.532	0.5620	0.0128
	13	0.095	1.560	0.4939	0.0133
	14	0.083	1.584	0.4346	0.0137
	15	0.072	1.606	0.3796	0.0141
	16	0.065	1.620	0.3441	0.0143
2	10	0.134	1.732	0.7855	0.0164
	11	0.120	1.760	0.7084	0.0169
	12	0.109	1.782	0.6475	0.0173
	13	0.095	1.810	0.5686	0.0179
	14	0.083	1.834	0.4998	0.0183
	15	0.072	1.856	0.4359	0.0188
	16	0.065	1.870	0.3951	0.0191

APENDICE
N
MEDIDAS ESTANDAR DE TUBERIA

Diámetro exterior en in	Espesor de la pared		Diámetro interior en in	Sección transversal de área en ft^2	Sección interior de área en ft^2
	Calibres BWG y de Stubs	in.			
$\frac{1}{2}$	12	0.109	0.282	0.1338	0.000433
	14	0.083	0.334	0.1087	0.000608
	16	0.065	0.370	0.0888	0.000747
	18	0.049	0.402	0.0694	0.000882
	20	0.035	0.430	0.0511	0.001009
$\frac{3}{4}$	12	0.109	0.532	0.2195	0.00154
	13	0.095	0.560	0.1955	0.00171
	14	0.083	0.584	0.1739	0.00186
	15	0.072	0.606	0.1534	0.00200
	16	0.065	0.620	0.1398	0.00210
	17	0.058	0.634	0.1261	0.00219
	18	0.049	0.652	0.1079	0.00232
1	12	0.109	0.782	0.3051	0.00334
	13	0.095	0.810	0.2701	0.00358
	14	0.083	0.834	0.2391	0.00379
	15	0.072	0.856	0.2099	0.00400
	16	0.065	0.870	0.1909	0.00413
	17	0.058	0.884	0.1716	0.00426
	18	0.049	0.902	0.1463	0.00444
$1\frac{1}{4}$	12	0.109	1.032	0.3907	0.00581
	13	0.095	1.060	0.3447	0.00613
	14	0.083	1.084	0.3042	0.00641
	15	0.072	1.106	0.2665	0.00677
	16	0.065	1.120	0.2419	0.00684
	17	0.058	1.134	0.2172	0.00701
	18	0.049	1.152	0.1848	0.00724

RESPUESTAS A PROBLEMAS SELECCIONADOS

CAPITULO 1

1.3 $T = \dfrac{T_0 e^{-1}}{ab} [b(\cos 1)(\cosh 1)\mathbf{e}_x + a(\text{sen}\,1)(\text{senh}\,1)\mathbf{e}_y]$

1.12 (a) $P = \dfrac{\rho_m(1 - x)}{\left[1 - \dfrac{\rho_m}{\rho} x\right]} \dfrac{RT}{M}$

(b) Sí, si el fluido es incompresible

CAPITULO 2

2.3 −0.67%
2.6 abajo
2.9 4.62 psi
2.12 (a) 12.87 ft
(b) 13.54 ft
2.15 57 782 lb_f, 701 lb_f
2.18 13 290 psi, 1.045 ρ_0
2.21 1.759×10^{11} Pa

CAPITULO 4

4.3 85.3 pps
4.6 (a) 5.6pps
(b) 12.20 ft^3/seg
4.12 $v_{prom} = 0.817\, v_{máx}$

CAPITULO 5

5.3 7.31 kPa
5.6 53.7 lb_f
5.9 (a) 16.67 fps
(b) 7.5 psi

5.15 11 393 N, −200 N
5.18 (a) 0.187 psi
(b) 633 psi
5.21 (a) 125°
(b) 77.0 lb_f
5.24 372 ft lb_f ccw
5.27 $\sqrt{h^2 + \frac{2v^2h}{g}}$

CAPITULO 6

6.3 9.4°R/s
6.6 49.6 hp
6.9 3.666 ft
6.12 0.340 m
6.15 102 s
6.18 14.32 psi
6.21 −1.96 psig
6.24 volumen grande, presión baja
6.27 44.9 min

CAPITULO 7

7.3 $\frac{\pi\mu\omega D^4}{32\, h \sin\alpha}$

7.6 $1/\sqrt{3}$
7.9 12.637 μPa · s

CAPITULO 8

8.6 5.563×10^{-5} m³/s, 7.002×10^{-4} m³/s
8.9 $2\mu v_0/h^2$
8.12 (a) $y = 0,\ u = V_0;\ y = h,\ \tau = 0$

(b) $u = V_0 - \frac{\rho g h^2}{2\mu}\left[2\frac{y}{h} - \left(\frac{y}{h}\right)^2\right]$

(c) $Q = h\left(V_0 - \frac{\rho g h^2}{3\mu}\right)$

8.15 $v_x = \frac{\rho g \operatorname{sen}\theta\, L^2}{\mu}\left[\frac{y}{L} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{L}\right)^2\right] - \frac{W\rho g \operatorname{sen}\theta\, L^2 y}{2\mu^2\left(1 + \frac{WL}{\mu}\right)}$

CAPITULO 9

9.6 $v_x = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x}(y^2 - L^2)$

9.9 $P = -\frac{8 \times 10^4}{L}\mathbf{e}_x - \left(2g + \frac{16 \times 10^4}{L}\right)\mathbf{e}_y$ psf/ft

CAPITULO 10

10.3 $\psi = v_\infty y \cos\alpha - v_\infty x \operatorname{sen}\alpha$

10.6 (a) 126.41 fps
(b) 1.57 s
(c) 38 psf

10.9 $\pm 30°$, $\pm 150°$

10.12 (a) $\psi = Q\dfrac{\theta}{2\pi}$

(b) $\psi = v_\infty y = v_\infty r \operatorname{sen}\theta$

10.15 $\frac{4}{3}\rho v_\infty^2 R(2 - 3\operatorname{sen}^2\theta)$

CAPITULO 11

11.3 $\pi_1 = \Delta P/\rho D^2\omega^2$, $\pi_2 = Q/\omega D^3$, $\pi_3 = \mu/\rho\omega D^2$
$\pi_1 = P/\rho\omega^3 D^5$, $\pi_3 = \eta$

11.6 (a) 5
(b) 3
(c) α, b, L/R, $C_{max}/Mg\,R$, $\rho R^3/M$

11.9 273.3 m/s, 0.122

11.12 Q/ND^3, $\rho ND^2/\mu$, $\sigma/\rho N^2 D^3$

11.15 $P/\rho\omega^3 D^5$, $PD^4/\rho Q^3$, $\rho Q/\mu D$

11.18 2.72 atmósferas, 0.0867

CAPITULO 12

12.3 ~75 m/s

12.6 0.532 pps 0.376 pps 0.266 pps, 0.217 pps,

12.9 $$\frac{v_x}{v_\delta} = \frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + \frac{\delta^2}{2\mu v_\delta} - \left[\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right) + \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right]\frac{dP}{dx}$$

12.15 (a) 1/6

(b) $\dfrac{4-\pi}{2\pi}$

12.18 25.4 hp, 36.58 hp, 16.26 hp

12.21 2186 lb_f

CAPITULO 13

13.3 $$\frac{\delta}{x} = \left[0.0281\,\frac{(n+1)(n+2)}{n}\right]^{0.8} Re_x^{-0.2}$$

13.6 $$\frac{\delta^*}{x} = 0.0476\,Re_x^{-0.2}$$

13.9 (a) 11.2 lb_f
(b) 76.3 lb_f

CAPITULO 14

14.3 4.152 MW
14.6 13.6 gal/min
14.9 -1.57 psig
14.12 0.0125 in. H_2O
14.15 0.1663 m^3/s, 0.0108 m^3/s

CAPITULO 15

15.3 8990 W, 1338 K, 494 K, 496 K

15.6 $$\frac{q}{A_0} = \frac{k_0(1 - A_L/A_0)}{L \ln A_0/A_L}\left[T_0 - T_L + \frac{\alpha}{2}(T_0^2 - T_L^2) + \frac{\beta}{3}(T_0^3 - T_L^3)\right]$$

15.9 (b) $R_{ss} = 0.00208$ hr ft^2 °F/Btu, $R_c = 10$, $R_{pl} = 0.0278$
(c) 16.94 Btu/hr ft^2
(d) 250°F, 80.5°F

15.12 1.73 W
15.15 297 Btu/hr por pie
15.18 3.85 in.
15.21 226°F
15.24 2500 W

CAPITULO 16

16.3 (a) $$\frac{d^2T}{d\theta^2} = 0$$

(b) $$T = T_0 - (T_0 - T_\pi)\theta/\pi$$

(c) $$q_\theta = kL\frac{\ln r_0/r_i}{\pi}(T_0 - T_\pi)$$

(d) $$S = \frac{\ln r_0/r_i}{\pi}$$

16.6 $$T - T_0 = (T_L - T_0)\frac{x}{L} + \frac{\dot{q}_0 L^2}{k\beta^2}\left[\frac{x}{L}(e^{-\beta} - 1) + 1 - e^{-\beta x/L}\right]$$

CAPITULO 17

17.3 176 hr
17.6 (a) 763 W
(b) 681 W
17.9 -8.3%, -66.7%, -160%
17.12 (a) 4.88 mm
(b) 1.8 m
(c) 3.61 mm, 1.33 m
17.15 8530 Btu/hr por ft,
7500 Btu/hr por ft
17.18 625 K
17.21 (b) 253 W
17.24 (a) 372%
(b) 514%, 429%, 291%,
165%, 117%

17.27 $$r = r_0 \exp\left[\frac{\ln\left(\frac{r_0}{r_0 + L}\right)}{2k\,(T_0 - T_L)} \cdot \left\{\frac{\bar{k}}{\beta} - \beta T_0\left(T_0 + \frac{2}{\beta}\right) - 1\right\}\right]$$

17.30 108 amp
17.33 72.5 Btu/hr por ft
17.36 205 Btu/hr por ft
17.39 52.2 kW
17.42 20.6 kW

CAPITULO 18

18.3 12.6 s
18.6 420 K
18.9 24.5 s, 1401 °F
18.12 (a) 19.7 min
(b) 23.6 min
(c) 26.3 min
(d) 27.9 min
(e) 28.9 min
18.15 53 millas
18.18 16.3 horas
18.21 580 °F, 396 °F, 275 °F
18.24 63 °F, 2 ft (aproximadamente)
263 Btu por ft^2

CAPITULO 19

19.3 plots
19.6 465 000 Btu/h,
19.12 $\alpha = 0.29 \quad \beta = 1/4$
19.15 $$Nu_x = 0.328\,Re_x^{1/2} \cdot \left[0.635 + \left(0.403 - \frac{0.27}{Pr}\right)^{1/2}\right]^{-1}$$
19.18 1965 Btu/h, 60.1 °F
19.21 1965 Btu/h,. 423 °F
19.24 0.56 cm, 1.86×10^{-3},
0.465 cm, 9.31 $W/m^2 \cdot K$

CAPITULO 20

20.3 150 °F, 157 °F
20.6 1270 s, 770 s, 695 s
20.9 1252 Btu/hr, 157 °F
20.12 1210 kW
20.15 33 Btu/hr ft^2 °F
20.18 8860 Btu/hr, 421 °F
20.21 12 740 J/s, 305 °F
20.24 (a) 2470 Btu/hr ft^2
(b) 27 100 Btu/hr ft^2
20.27 54 900 W/m^2
20.30 3.5 ft, 3.03 ft
20.33 (a) 73.8 $W/m^2 \cdot K$
(b) 896 K, 424 K

CAPITULO 21

21.3 10 000 Btu/hr ft^2 °F,
178 000 Btu/hr
21.6 29 000 Btu/hr ft^2
21.12 1210 m
21.15 106.7 kW
21.18 15 ft
21.21 1.1 min

CAPITULO 22

22.3 5 ft^2
22.6 3.89 kg/s, 0.0393 W
22.9 8.68×10^{-3} kg/s, 347 K

CAPITULO 23

23.3 369 K
23.6 aproximadamente 37%, 12%, 51%, 0.50 μ
23.9 2650 Btu/hr
23.12 316 °F
23.15 8.1 W
23.18 632 W por metro de longitud del conducto

CAPITULO 24

24.3 (a) 0.21
(b) 0.21
(c) 26.35 kg
(d) 0.205 kg/m^3
(e) 0.674 kg/m^3
(f) 0.879 kg/m^3
(g) 30.5 mol/m^3
(h) 28.84
(i) 8.0×10^4 Pa

24.6 (a) 0.60
(b) 39.2
(c) 2.44 kg/m^3, 0.80 kg/m^3, 1.64 kg/m^3
(d) 63 mol/m^3, 25 mol/m^3, 38 mol/m^3
(e) 0.328, 0.672
(f) 0.0672 m/s, −0.0328 m/s
(g) 0.0603 m/s, −0.0397 m/s
(h) 2.0 $mol/m^2 \cdot s$, −0.76 $mol/m^2 \cdot s$, 1.24 $mol/m^2 \cdot s$
(i) 0.064 $kg/m^2 \cdot s$, −0.0334 $kg/m^2 \cdot s$, 0.0306 $kg/m^2 \cdot s$
(j) −0.0538 $kg/m^2 \cdot s$
(k) −1.51 $mol/m^2 \cdot s$

24.9 12.94 ft/s, 13.37 ft/s, −0.0329 $lb_m/(ft^2)(s)$, −0.00083 lb mole/$(ft^2)(s)$
24.12 0.225 cm^2/s, 0.289 cm^2/s
24.15 0.084 cm^2/s
24.18 0.201 cm^2/s
24.21 0.219 cm^2/s
24.24 (a) 1.74×10^{-5} cm^2/s
(b) 1.78×10^{-5} cm^2/s
(c) 2.00×10^{-5} cm^2/s
(d) 1.46×10^{-5} cm^2/s
(e) 2.72×10^{-5} cm^2/s

CAPITULO 25

25.3 $$\frac{\partial c_A}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial (r N_{A,r})}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial N_{A,\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial N_{A,z}}{\partial z} = R_A$$

25.9 $$\frac{dN_{A,z}}{dz} = -cD_{AB}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}y_A}\frac{dy_A}{dz}\right) = 0$$

25.12 (a) $\frac{dN_{A,z}}{dz} = -cD_{AB}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-y_A}\frac{dy_A}{dz}\right) = 0$

(b) $\frac{dN_{A,z}}{dz} = -cD_{AB}\frac{d}{dz}\left(\frac{dx_A}{dz}\right) = 0$

25.15 (a) $\frac{dN_{A,z}}{dz} = -cD_{AB}\frac{d}{dz}\left(\frac{dy_A}{dz}\right) = 0$

(b) $\frac{dN_{A,z}}{dz} = -cD_{AB}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1+y_A}\frac{dy_A}{dz}\right) = 0$

(c) $\frac{dN_{A,z}}{dz} = -cD_{AB}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}y_A}\frac{dy_A}{dz}\right) = 0$

CAPITULO 26

26.3 (a) $N_A = \frac{cD_{AB}}{2\delta}\ln(1+2y_{A_0})$

(b) $y_A = \frac{1}{2}\left[(1+2y_{A_0})^{\frac{2\delta - z}{2\delta}} - 1\right]$

26.6 (a) 21.5 hr
(b) 3.52×10^5 hr

26.9 (b) 15.4 cm^3/hr

26.12 5.67×10^{-6} $g/cm^2 \cdot seg$

26.15 1.95×10^{-9} $mol/cm^2 \cdot seg$

26.18 0.59 hr

26.21 2030 s

26.24 $c_A = \frac{c_{A_1} J_0(r\sqrt{k/D_{AB}})}{J_0(R\sqrt{k/D_{AB}})}$

26.27 $W_A = -\frac{D(D+2\delta)}{2\delta}\pi cD_{AB}\ln(1+2y_{A_\delta})$

26.30 (a) $N_{A,z}\big|_{z=0} = \frac{bcD_{AB}[1 - y_{B_0}\cosh(b\delta)]}{\operatorname{senh}(b\delta)}$, donde $b = \sqrt{k_1/cD_{AB}}$

(b) $y_A = \left[\left(\frac{k_1}{k_1+k_1'} - y_{A_0}\right)\cosh(M\delta) - \frac{k_1}{k_1+k_1'}\right]\frac{\operatorname{senh}(Mz)}{\operatorname{senh}(M\delta)}$
$+ \left(y_{A_0} - \frac{k_1}{k_1+k_1'}\right)\cosh(Mz) + \frac{k_1}{k_1+k_1'}$, donde $M = \sqrt{\frac{k_1+k_1'}{cD_{AB}}}$

26.33 (a) $p_A = p_{A_1} + \frac{\beta}{4}(r^2 - R_1^2) - \frac{\beta^2 R_2^2}{2}\ln\left(\frac{r}{R_1}\right)$, donde $\beta = \frac{mRT}{D_{AB}}$

(b) $N_{A,r}\big|_{r=R_1} = \frac{m}{2R_1}(R_2^2 - R_1^2)$

CAPITULO 27

27.3 (a) 0.34%
(b) 0.24%
(c) 0.20%

27.6 1.99 cm

27.9 0.19 c_{A_0}

27.12 18.9 hr

27.15 (a) 205 hr
(b) 8600 hr
(c) 204 hr

27.18 (a) 33.8 hr
(b) 32.5 hr

CAPITULO 28

28.3 (a) $\bar{k}_c(\text{cm/s}) = 8.69\, D_{AB}(\text{cm}^2/\text{s})\, Sc^{1/3}$
(b) $W_A(\text{mol/s}) = 1.304 \times 10^5 D_{AB}(\text{cm}^2/\text{s})\, Sc^{1/3}\, \Delta c_A(\text{mol/cm}^3)$

28.6 (a) $\bar{k}_c(\text{m/s}) = 296.95 \dfrac{D_{AB}(\text{m}^2/\text{s})}{L(\text{m})} Sc^{1/3}$

(b) $\bar{k}_c(\text{m/s}) = 1772 \dfrac{D_{AB}(\text{m}^2/\text{s})}{L(\text{m})} Sc^{1/3}$

28.9 $a = 0,\ b = \dfrac{3}{2} \dfrac{(c_{A,\infty} - c_{A,s})}{\delta_c},\ c = 0,\ d = -\dfrac{1}{2} \dfrac{(c_{A,\infty} - c_{A,s})}{\delta_c^3}$

28.12 No

28.15 Yes

28.18 2.44×10^{-5} lb mol/seg

28.21 9.65 ft

28.24 0.066 ft/seg

28.27 101 °F

28.30 0.0129 lb mol/ft^2 · hr

CAPITULO 29

29.3 95.9 °C

29.6 (a) 17.13 lb_m NH_3/100 lb_m agua
(b) 17.5 mm
(c) 460.5 mm

29.9 (a) 0.272 lb mol/(ft^2) (hr) (Δp_A)
(b) 0.190 lb mol/(ft^2) (hr) (Δp_A)
(c) 0.070 atm, 0.282 lb mol/ft^3

29.12 $p_{A,i} = 3.6 \times 10^4$ Pa, $c_{A,i} = 48.5$ mol/m^3

29.15 $p_{A,i} = 1.4$ mm, $c_{A,i} = 0.033$ lb mol/ft^3

0.295 lb mol/(ft^2) (hr) (atm)	28.6 mm
1.3 lb mol/(ft^2) (hr) (lb mol/ft^3	0.010 lb mol/ft^3)
0.292 lb mol/(ft^2) (hr) (atm)	29.2 mm
0.0134 lb mol/(ft^2) (hr) (lb mol/ft^3)	0.39 lb mol/ft^3

CAPITULO 30

30.3 Yes

30.6 (a) 0.0401 cm/seg
(b) 0.860 cm/seg

30.9 2.31 ft

30.12 5.67×10^{-3} ft

30.15 7.16 ft

30.18 1.65 $lb_m/(hr)(ft^2)$

CAPITULO 31

31.3 (a) 2.18 hr
(b) 2.44 hr
(c) 0.44 hr
(d) 6.40 hr

31.6 1.72

31.9 2.36 lb mol/(h) $(ft^3)(\Delta Y_A)$

31.12 (a) 94%
(b) 48%

31.15 16.67 lb mol/(hr)$(ft^3)(\Delta Y_A)$

31.18 (a) 0.40 mol HCl/mol agua
(b) 16.8 ft

31.21 27.2 ft

31.24 4.61 ft, 9.20 ft

Obras afines:

TRANSFERENCIA DE CALOR APLICADA A LA INGENIERÍA
James R. Welty

El Contenido temático se presenta en forma lógica, destacando la solución de problemas por medio de los métodos numéricos que incluyen diagramas de flujo, ejemplos de programas y listados de computadora.

PROBLEMAS DE TRANSFERENCIA DE CALOR
Antonio Valiente Barderas

Obra de texto y de consulta estructurada a manera de problemario, que presenta los aspectos más importantes con respecto a transferencia de calor. En la primera parte aborda temas sobre balances de energía, conducción, convección natural y forzada, condensación, evaporación y radiación. En la segunda se trata el diseño de cambiadores de calor.

TRANSFERENCIA DE CALOR
Keith Cornwell

Mediante razonamientos matemáticos de fácil comprensión se exponen los métodos de transferencia de calor, fenómeno que influye en forma determinante tanto en la conservación como en máximo aprovechamiento de la energía calorífica.

El proceso de transferencia es, sin duda alguna, uno de los problemas más importantes a resolver en el campo de la ingeniería. Por lo anterior y tomando en cuenta la necesidad de un buen libro de texto en español relacionado con el tema, Editorial Limusa ha decidido publicar esta obra.

El material presentado incluye aplicaciones de la tecnología actual, incorporando unidades en el sistema internacional. En el desarrollo de cada capítulo se da un gran número de problemas resueltos que sirven de guía para la solución de los que se dejan a resolver.

La obra se divide en 31 capítulos que abarcan temas de gran interés, tales como estática de fluidos, conservación de masa, esfuerzo cortante en el flujo laminar, ecuaciones diferenciales del flujo de fluidos, análisis dimensional, el efecto de la turbulencia en la transferencia de momento, fundamentos de la transferencia de calor, equipo para la transferencia de calor, fundamentos de transferencia de calor, fundamentos de transferencia de masa y equipo para la transferencia de masa.

Por su contenido y claridad de exposición, es un buen libro de texto para los cursos que se imparten sobre la materia a nivel de licenciatura en las carreras de ingeniería mecánica e ingeniería química.

ÁREA: ING. QUÍMICA
ISBN 968-18-1306-5